·各个击破·

名师视点

MINGSHI SHIDIAN

高中数学

·多面体与旋转体·

张绍春 主编

双色亮丽版

东北师范大学出版社

名师视点 各个击破

名师视点

MINGSHI SHIDIAN

高中数学

·多面体与旋转体·

东北师范大学出版社·长春

图书在版编目（CIP）数据

名师视点．高中数学．多面体与旋转体/张绍春主编．—长春：东北师范大学出版社，2002．6

ISBN 7-5602-3012-1

Ⅰ．名…　Ⅱ．张…　Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 029549 号

MINGSHI SHIDIAN

□出 版 人：贾国祥　□策划创意：一编室
□责任编辑：才广林　□责任校对：张志荣
□封面设计：魏国强　□责任印制：栾喜湖

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街138号　邮政编码：130024
电话：0431-5695744　5688470　传真：0431-5695734
网址：WWW.NNUP.COM　电子函件：SDCBS@MAIL.JL.CN

东北师范大学出版社激光照排中心制版
沈阳新华印刷厂印刷
2002年6月第1版　2002年6月第1次印刷

开本：890mm×1240mm　1/32　印张：5.25　字数：152千
印数：00 001 — 30 000 册

定价：6.80元

出版者的话

CHUBANZHE DE HUA

《名师视点》丛书的创意始于教材改革的进行，教材的不稳定使教辅图书市场一度处于混乱状态，新旧图书杂糅，读者即使有一双火眼金睛，也难辨真伪。但无论各版别的教材如何更新、变革，万变不离其宗的是，删改陈旧与缺乏新意的内容，增加信息含量，增强人文意识，创新精神，增添科技内涵，活跃思维，培养学生的创新、理解、综合分析及独立解决问题等诸多能力，而这些目标的实现均是以众多不断调整的知识版块、考查要点串连在一起的，不管教材如何更改，无论教改的步子迈得多大，这些以丰富学生头脑，开拓学生视野，提高其综合素养为宗旨的知识链条始终紧密地联系在一起，不曾有丝毫的断裂，而我们则充分关注形成这一链条的每一环节，这也是“视点”之所在。

《名师视点》丛书的出版正是基于此种理念，涵盖初高中两个重点学习阶段，以语文、英语、数学、物理、化学五个学科为线索，以各科可资选取的知识版块作为专题视点，精讲，精解，精练。该丛书主要具有以下特点：

一、以专题为编写线索

语文、英语、数学、物理、化学五主科依据初高中各年级段整体内容及各学科的自身特点，科学、系统地加以归纳、分类及整理，选取各科具有代表性的知识专题独立编写成册，并以透彻的讲解，精辟的分析，科学的练习，准确的答案为编写思路，再度与一线名师携手合作，以名师的教学经验为图书的精髓，以专题为视点，抓住学科重点、知识要点，缓解学生过重的学习负担。

二、针对性、渗透性强

“专题”，即专门研究和讨论的题目，这就使其针对性较明显。其中语文、英语两科依据学科试题特点分类，数学、物理、化学各科则以知识块为分类依据，各科分别撷取可供分析讨论的不同版块，紧抓重点难点，参照国家课程标

准及考试说明，于潜移默化中渗透知识技能，以达“润物细无声”之功效。

三、双色印刷，重点鲜明

《名师视点》丛书采用双色印刷，不仅突破以往教辅图书单调刻板的局限，而且对重点提示及需要引起学生注意的文字用色彩加以突出，使其更加鲜明、醒目。这样，学生在使用时既可以方便地找到知识重点，又具有活泼感，增添阅读兴趣。

四、适用区域广泛

《名师视点》丛书采用“专题”这一编写模式，以人教版教材为主，兼顾国内沪版、苏版等地教材，汲取多种版本教材的精华，选取专题，使得该套书在使用上适用于全国的不同区域，不受教材版本的限制。

作为出版者，我们力求以由浅入深、切中肯綮的讲解过程，化解一些枯燥的课堂教学，以重点、典型的例题使学生从盲目的训练中得以解脱，以实用、适量的练习减少学生课下如小山般的试卷。

我们的努力是真诚的，我们的探索是不间断的，成功并不属于某一个人，它需要我们的共同努力，需要我们携手前行。

东北师范大学出版社

第一编辑室

MINGSHI SHIDIAN

目录

名师视点

第一章
多面体

本章内容分为三部分:棱柱、棱锥、棱台. 在学习这一章时,同学们要掌握三种多面体间的联系和区别,同时要注意化归思想的应用,将空间图形的局部性质化为熟悉的平面图形的性质.

在求函数最值时我们常遇到如下形式的题:

求函数 $f(x)=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-10x+34}$ 的最小值.

分析:从函数的结构我们很容易想到用几何法来解决,即利用两点间距离公式转化为对称问题. 其实,此题还可以构造一个长方体的模型,将函数问题转化成几何体中的问题解决.

解:将原式变形为

$f(x)=\sqrt{x^2+2^2}+\sqrt{(5-x)^2+3^2}$.

如图 1 - 1, 构造长体 AC_1, 令 $AB=2, BC=3$, $BB_1=5$, 如图, 设 $BE=x$, 则 $AE=\sqrt{x^2+2^2}$,$EC_1=\sqrt{(5-x)^2+3^2}$, 这样问题就转化为在棱 BB_1 上找一点 E,使折线 AEC_1 的长度最短,转化为侧面展开图线段最短的问题.

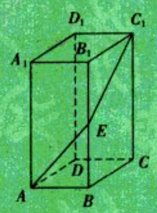

图 1 - 1

由上例可看出,在解决一些数学问题时,如果能利用构造思想构造出新的数学模型, 则问题的解决常可有意想不到的效果. 而最常用的数学模型则是棱柱.

这启示我们,无论是数学中的代数问题还是几何问题,都要拓展思维,将二者联系起来,找到一个解决问题的捷径. 这样,不但思路新颖,解决问题迅速,最重要的是能赢得宝贵的时间.这样的题型在本书中有很多典型的例子.

第一节 棱 柱

知识技能

1 定 义

一个多面体，如果有两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都平行，这些面围成的几何体叫做棱柱.

棱柱是最简单的一种多面体，在学习定义中要把握两点：① 有两个面互相平行. ②其余各面的交线都互相平行.

两个互相平行的面叫做棱柱的底面，其余各面叫做棱柱的侧面；两个面的公共边叫做棱柱的棱，其中两个侧面的公共边叫做棱柱的侧棱，侧面与底面的公共顶点叫做棱柱的顶点，不在同一面上两个顶点的连线叫做棱柱的对角线，两个底面的距离叫做棱柱的高.

2 分 类

(1)按底面多边形的边数分：三棱柱、四棱柱、五棱柱……

(2)按侧棱与底面的位置关系分：

$$\text{棱柱}\begin{cases}\text{斜棱柱}\\ \text{直棱柱(侧棱垂直于底面)}\begin{cases}\text{正棱柱(底面是正多边形的直棱柱)}\\ \text{其他直棱柱}\end{cases}\end{cases}$$

3 性质(要掌握证明)

性质①：棱柱的侧棱都相等，侧面为平行四边形. 直棱柱的每个侧面都是矩形，正棱柱的各个侧面是全等的矩形.

性质②：棱柱的两个底面与平行于底面的截面是全等的多边形.

性质③：过棱柱的不相邻的两条侧棱的截面是平行四边形.

4 典型的棱柱

(1)有关概念

平行六面体是底面为平行四边形的棱柱. 侧棱和底面垂直的平行六面体叫

做直平行六面体，它是特殊的直四棱柱. 底面是矩形的直平行六面体叫做长方体. 底面是正方形的长方体叫做正四棱柱. 棱长都相等的长方体叫做正方体.

结构关系：

四棱柱 $\xrightarrow[\text{平行四边形}]{\text{底面为}}$ 平行六面体 $\xrightarrow[\text{底面}]{\text{侧棱垂直于}}$ 直平行六面体 $\xrightarrow[\text{矩形}]{\text{底面为}}$ 长方体 $\xrightarrow[\text{正方形}]{\text{底面为}}$ 正四棱柱 $\xrightarrow[\text{边长相等}]{\text{侧棱与底面}}$ 正方体.

用集合包含符号表示：

{平行六面体} $\supsetneqq$ {直平行六面体} $\supsetneqq$ {长方体} $\supsetneqq$ {正四棱柱} $\supsetneqq$ {正方体}.

(2)平行六面体的性质

① 平行六面体任何相对两面是各为互相平行并且全等的平行四边形. 因此，平行六面体任何相对两个面都可看做两个底面.

② 平行六面体的对角线交于一点，并且在这点互相平分.

(3)长方体的有关性质

① 三度定理.

② 若对角线和各棱所成角分别为 α,β,γ, 则 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$; $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$.

③ 若对角线和各面所成角分别为 α,β,γ, 则 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2$; $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$.

长方体是最典型的棱柱，也是解一些构造题的理想模型，因此要重点掌握长方体的有关性质.

5 棱柱的侧面积

(1)直棱柱的侧面积

利用直棱柱的侧面展开为平面图形的方法可以推导出直棱柱侧面积公式：$S_{直棱柱}=c\cdot h$.

将侧面展开是将空间图形化归为平面图形的一种重要手段，它是用来研究多面体、旋转体侧面积的主要方法.

(2)斜棱柱的侧面积

① 直接法：各个侧面面积之和.

② 间接法：$S=c_{直}\cdot l$.

$C_{直}$指直截面周长，直截面是与斜棱柱的侧棱都垂直相交的截面.

6 截 面

(1)截面的确定：利用确定平面的条件及线面平行和面面平行的性质定理确定交线，关键是找到与各个棱的交点.

(2)用途:在二面角求解时用来找交线.

(3)三棱柱、四棱柱、五棱柱、六棱柱被一个平面所截,其截面有几种可能性.

① 三棱柱有五个表面,所以被一个平面所截,得到的截面可能为三角形、四边形或五边形,如图1-2.

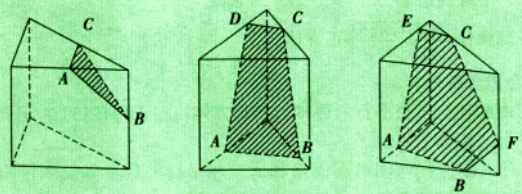

图1-2

② 四棱柱有六个表面,所以被一个平面所截,得到的截面可能为三角形、四边形、五边形或六边形,如图1-3.

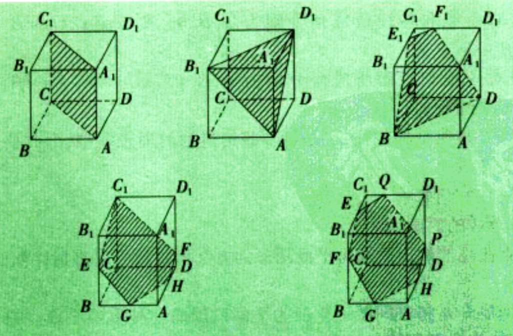

图1-3

③ 五棱柱有七个表面,所以被一个平面所截,得到的截面可能为三角形、四边形、五边形、六边形或七边形,如图1-4.

④ 六棱柱被一平面面所截,得到的截面可能为三角形、四边形、五边形、六边形、七边形或八边形.

对任意的 n 面多面体,按不同方式为平面所截,截得的截面至多可能为 n 边形.

(4)正方体截面形状的判定

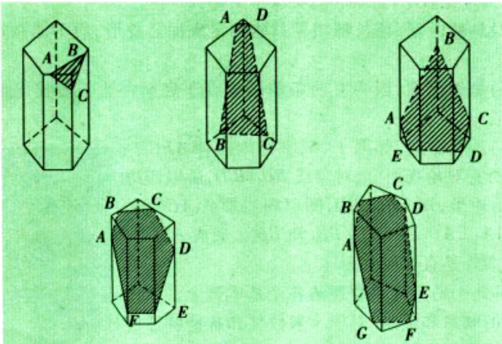

图 1 - 4

截面的形状：

如果截面的形状是三角形，则截面只能是锐角三角形.

如果截面的形状是四边形，则截面可能为正方形、矩形、平行四边形、菱形、等腰梯形或非等腰梯形，但不可能是直角梯形.

如果截面的形状是五边形，则截面只能是有两组边平行的五边形，不可能是正五边形.

如果截面的形状是六边形，则截面一定是三组对边平行的六边形.

典型示例

例 1 设有四个命题：

(1)底面是矩形的平行六面体是长方体.

(2)棱长都相等的直四棱柱是正方体.

(3)有两条侧棱都垂直于底面一边的平行六面体是直平行六面体.

(4)对角线相等的平行六面体是直平行六面体.

其中真命题的个数为(　　　　).

A. 1　　　B. 2　　　C.3　　　D. 4

解析 命题(1)是假命题，因为底面是矩形的直平行六面体才是长方体，

此条件无法判定是直平行六面体，更谈不上是长方体.

命题(2)是假命题，棱长都相等只能判定底面是菱形，而不能判定底面是正方形.

命题(3)是假命题，因为有两条侧棱垂直于底面一边不能推出侧棱与底面垂直.

命题(4)是真命题，如图 1 - 5，平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中所有对角线相等，对角线 $BD_1=B_1D$，所以四边形 B_1BDD_1 是矩形，即 $BB_1\perp BD$，同理四边形 A_1ACC_1 是矩形，所以 $AA_1\perp AC$，由 $AA_1/\!/BB_1$ 知 $BB_1\perp$ 底面 $ABCD$，即该平行六面体是直平行六面体.

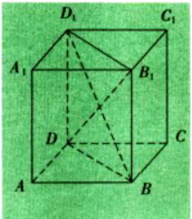

图 1 - 5

说明 解此类题关键是要理清各个基本概念，掌握各个概念间的联系和区别. 对于一般棱柱和各种特殊棱柱要抓住底面形状及侧棱与底面关系来解题.

启示：在平面内，对角线相等的平行四边形是矩形，那么空间对角线相等的平行六面体是否是长方体呢？在立体几何学习中许多性质可依平面几何性质进行推广类比学习.

例 2 如图 1 - 6，已知平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$，求证对角线 AC' 分别过三角形 BDA' 和 $D'B'C$ 的重心 G_1 和 G_2，并且被重心三等分.

解析 第一问证明点在线上，须利用 $G_1\in\alpha, G_1\in\beta$，而 $\alpha\cap\beta=AC'$，则 $G_1\in AC'$，这是利用第一章的理论知识. 证明线段等分问题须结合具体图形注意比例关系.

(1)设 $AC'\cap$ 平面 $BDA'=G_1$. $\because G_1\in AC'$，而 $AC'\subset$ 平面 $A'ACC'$，

$\therefore G_1\in$ 平面 BDA'.

且平面 $BDA'\cap$ 平面 $AA'C'C=A'O$，

$\therefore G_1\in A'O$，$A'C'\underline{\underline{/\!/}}AC$.

$\therefore A'G_1:G_1O=A'C':AO=2:1$，

$\therefore G_1$ 为 $\triangle A'BD$ 的重心.

同理可证 G_2 为 $\triangle D'B'C$ 的重心.

(2)$\because A'C'/\!/AC$，

$\therefore AG_1:G_1C'=AO:A'C'=1:2$，

$C'G_2:G_2A=A'C':AO=2:1$.

$\therefore AG_1=G_1G_2=G_2C'$.

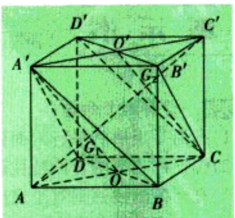

图 1 - 6

说明 同学们在立体几何的证明问题中，不仅要思路清晰，而且要掌握一些解重要习题的方法，同时要灵活结合图形，把问题具体化.

例3 如图 1-7,斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$,底面是边长为 a 的正三角形,侧棱 $AA_1=b$,且与底面相邻两边都成 $45°$角,求其侧面积.

解析 求斜三棱柱的侧面积主要是依据条件顺利作出其直截面,然后利用公式求解.当有些题不容易作出某一斜三棱柱的直截面时,可利用求各个侧面的面积之和的方法直接求解,但要分析出各个侧面的特点.此题两种方法均可以,关键是捕捉到"侧棱 AA_1 与底面相邻两边都成 $45°$"渗透的信息,即"顶点在底面射影在角平分线上",这样问题就可迎刃而解了.

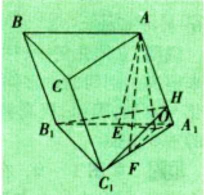

图 1-7

方法一:过 C_1 作 $C_1H\perp AA_1$,连结 B_1H.

$\because A_1B_1=A_1C_1, A_1H=A_1H, \angle C_1A_1H=\angle B_1A_1H$,

$\therefore \triangle A_1B_1H\cong\triangle A_1C_1H$,

$\therefore \angle B_1HA_1=\angle C_1HA_1=90°$,$\therefore B_1H\perp AA_1$.

又 $\because C_1H\perp AA_1$,且 $B_1H\cap C_1H=H$,

$\therefore AA_1\perp$ 平面 B_1HC_1.

$\therefore$ 平面 B_1C_1H 为斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的直截面,

$\therefore S_{侧}=C_{直}\cdot l=(B_1H+C_1H+B_1C_1)\cdot AA_1=(\sqrt{2}+1)ab$.

方法二 过 A 作 $AO\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$,再过 O 作 $OE\perp A_1B_1$, $OF\perp A_1C_1$,

由三垂线定理知 $AE\perp A_1B_1$, $AF\perp A_1C_1$,

$\therefore$ $Rt\triangle AA_1E\cong Rt\triangle AA_1F$.

$\therefore AE=AF$,由射影性质知 $OE=OF$,

$\therefore O$ 在 $\angle B_1A_1C_1$ 的角平分线 A_1O 上.

又 $\because A_1B_1=A_1C_1$,$\therefore A_1O\perp B_1C_1$.

$\therefore AA_1\perp B_1C_1$. 又 $AA_1/\!/CC_1$,$\therefore CC_1\perp B_1C_1$,即 BB_1C_1C 为矩形,

$\therefore S_{侧}=2S_{\square AA_1B_1B}+S_{矩形\ BB_1C_1C}=(\sqrt{2}+1)ab$.

说明 方法一还可利用方法二的结论来证明三角形 B_1C_1H 为斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的直截面.立体几何题的解题方法应是由已知条件得到性质后与相应公式的双向沟通.在斜棱柱侧面积的计算中,关键点是抓住图形中的垂直关系和侧面特点.在学习第三章以后,同学们不妨试一下求它的体积.

例4 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,一只小蚂蚁欲从 A 点到 C_1 点觅食,它沿长方体表面如何行走,距离最短.

解析 此题实质就是求 A 到 C_1 的最短距离,联想平面几何知识,只有折线变为直线时距离最短,因此可将长方体沿表面展开,利用在平面内两点间线段长是两点间的最短距离来解答.

不妨设长方体的长、宽、高分别为 a,b,c,如图 1-8,将长方体表面展开,则沿

长方体表面从 A 到 C_1 的最短距离,只可能是下面情形之一:

$l_1=\sqrt{C_1D_1^2+D_1N^2}=\sqrt{b^2+(a+c)^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2+2ac}$

$l_2=\sqrt{C_1B_1^2+B_1M^2}=\sqrt{a^2+(b+c)^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc}$

$l_3=\sqrt{C_1C^2+CH^2}=\sqrt{c^2+(a+b)^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2+2ab}$

$\because a\geqslant b\geqslant c$,$\therefore ab\geqslant ac\geqslant bc$,$\therefore l_2\leqslant l_1\leqslant l_3$.

故沿着长方体表面,从 A 到 C_1 的最短距离为 $\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc}$.

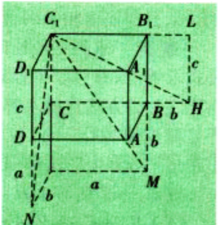

图 1 - 8

说明 立体几何中,往往把空间问题转化为平面问题来解决,空间的许多问题可以看成平面几何问题的深化与发展,因而,提高将空间图形转化为平面图形的能力,就成为提高解题能力的重要方面.

例5 如图 1 - 9,在四面体 $S\text{-}ABC$ 中,SA,SB,SC 两两垂直,$SA=SB=SC=a$,那么平面 ABC 内一点 P 到另外三个面的距离的平方和的最小值是多少?

解析 在立体几何最值问题中有两种解法:一种是代数法,另外某些几何题要根据已知条件灵活应用几何法.本题中 P 到另外三个面的距离“可转化为长方体某一顶点到三个面的距离”,构造长方体,则问题就豁然开朗了.

$\because SA$,SB,SC 两两垂直,

$\therefore$ 平面 SAB、平面 SAC、平面 SBC 两两垂直.

以点 P 和点 S 作为对角线的相对顶点构造长方体,点 P 到三个面距离的平方和即等于长方体对角线 SP 的平方,即 $SP^2=d_1^2+d_2^2+d_3^2$.

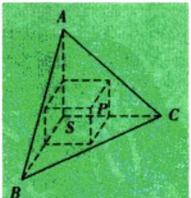

图 1 - 9(甲)

因此问题转化为求点 S 与平面 ABC 上任意一点 P 距离的最小值,即求点 S 到平面 ABC 的距离.

$\because SA=SB=SC$,

设点 S 在 $\triangle ABC$ 上射影是 H,则 $HA=HB=HC$.

$\triangle ABC$ 中,$AB=BC=CA=\sqrt{2}a$,

$HA=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$,又在 $\mathrm{Rt}\triangle SAH$ 中,

$$SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}a\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

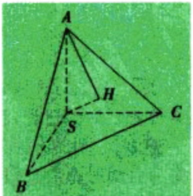

图 1 - 9(乙)

$\therefore S$ 到平面 ABC 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$,

故点 P 到另外三个平面的距离平方和的最小值为 $\frac{1}{3}a^2$.

说明 在满足某些前提条件时，正方体、长方体常是我们用来解决问题的典型模型.同学们在今后学习中要逐步培养自己应用数学模型解决问题的意识.

例 6 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$BC_1\perp AB_1$，$BC_1\perp A_1C$.

求证：$AB_1=A_1C$.

解析 证明两条线段相等，设法寻找线段所在三角形的关系.

方法一：如图 1 - 10，作 $AE\perp BC$ 于 E，连结 B_1E，则 $AE\perp$ 平面 BC_1，由 $BC_1\perp AB_1$，根据三垂线定理逆定理得 $BC_1\perp B_1E$. ①

同理作 $A_1F\perp B_1C_1$ 于点 F，则 $BC_1\perp CF$. ②

由①，②易得 B_1FCE 是平行四边形，

$\therefore CE=B_1F$.

又易得 $A_1F/\!/AE$.

$\therefore \triangle A_1B_1F\cong\triangle ABE$.

$\therefore BE=B_1F$，$CE=B_1F$，$CE=BE$.

$\therefore E$ 为 BC 中点，即 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

$\therefore AB=AC$，$\triangle ABB_1\cong\triangle A_1AC$.

$\therefore A_1C=AB_1$.

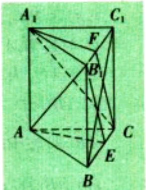

图 1 - 10

说明 利用三垂线定理的逆定理，将已知条件中的两对异面直线垂直关系转化为同一平面内两直线的垂直关系，再利用平面几何中证明线段相等的方法来证明结论. 这种化立体几何问题为平面几何问题的方法十分重要.

方法二：如图 1 - 11，过 B 作 $BE/\!/AC$，过 C 作 $CE/\!/AB$，BE 与 CE 相交于点 E；过 B_1 作 $B_1E_1/\!/A_1C_1$，过 C_1 作 $C_1E_1/\!/A_1B_1$，C_1E_1 交 B_1E_1 于 E_1；连结 EE_1 将三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 补成四棱柱 $A_1B_1C_1E_1-ABCE$，则 $AB_1/\!/CE_1$.

$\because BC_1\perp AB_1$，

$\therefore BC_1\perp CE_1$.

又 $\because BC_1\perp A_1C$，$A_1C\cap CE_1=C$，

$\therefore BC_1\perp$ 平面 A_1CE_1，

$\therefore BC_1\perp A_1E_1$.

由三垂线定理逆定理知 $B_1C_1\perp A_1E_1$.

再由平行四边形 $A_1B_1E_1C_1$ 的对角线垂直知平行四边形 $A_1B_1E_1C_1$ 是菱形，即 $A_1B_1=A_1C_1$.

因此 $AB_1=A_1C$.

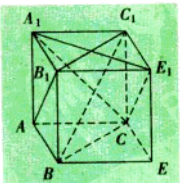

图 1 - 11

说明 把三棱柱补成四棱柱后，线段顺利平移，这种"补形法"在实现线段的平

行移动以及体积的解决时非常有效，是同学们应熟练掌握的基本方法.

例 7 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle BAC=30°$，$\angle ACB=90°$，$BC=1$，$AA_1=\sqrt{6}$，点 M 为 CC_1 的中点.

(1)求 AB_1 与平面 AA_1C_1C 所成的角；

(2)求 A_1M 与 AB_1 所成角.

解析 找线面角关键是找到面的垂线，找线线角主要是把"异面角"变为"平面角". 但无论求三种角中哪一种角，首先要判断是否是直角.

(1)如图 1 - 12，在直三棱柱中，

$\because AA_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，$\therefore AA_1\perp B_1C_1$.

又 $\because \angle ACB=90°$，$\therefore \angle A_1C_1B_1=90°$.

$\therefore A_1C_1\perp B_1C_1$，$\therefore B_1C_1\perp$ 平面 AA_1C_1C.

$\therefore C_1A$ 是 B_1A 在平面 A_1ACC_1 上的射影.

$\therefore \angle B_1AC_1$ 为 AB_1 与平面 A_1ACC_1 所成的角.

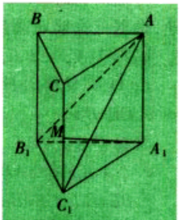

图 1 - 12

在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$\angle BAC=30°$，$BC=1$.

$\therefore AB=2$，在 $Rt\triangle ABB_1$ 中，$AB_1=\sqrt{BB_1^2+AB^2}=\sqrt{10}$.

$\therefore \sin\angle B_1AC_1=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，$\therefore \angle B_1AC_1=\arcsin\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

(2)在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$\angle BAC=30°$，$BC=1$，

$\therefore AC=\sqrt{3}$，$A_1C_1=\sqrt{3}$.

又在 $Rt\triangle AA_1C_1$ 中，$AA_1=\sqrt{6}$，

$\therefore \tan\angle A_1AC_1=\dfrac{C_1A_1}{AA_1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

在 $Rt\triangle C_1A_1M$ 中，

$C_1M=\dfrac{1}{2}CC_1=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$A_1C_1=\sqrt{3}$，$\therefore \tan\angle C_1A_1M=\dfrac{C_1M}{C_1A_1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore \angle A_1AC_1=\angle C_1A_1M$，$\angle A_1AC_1+\angle AA_1M=90°$.

$\therefore A_1M\perp AC_1$，而 AC_1 是 AB_1 在面 AA_1C_1C 的射影，故 AB_1 与 A_1M 垂直，

$\therefore AB_1$ 与 A_1M 成 $90°$角.

说明 同学们在直棱柱问题的解决中，要抓住底面与侧面、侧棱间的垂直关系.

例 8 如图 1 - 14，在正三棱柱中，$E\in BB_1$，截面 $A_1EC\perp$ 侧面 AC_1.

(1)求证：$BE=EB_1$；

(2)若 $AA_1=A_1B_1$，求平面 A_1EC 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成二面角的度数.

解析 第(1)问欲证明 E 是中点，要在题中利用已知条件得出中点，从而建

立线段之间的关系.

第(2)问二面角中没有棱,因此若想求二面角的平面角,必须先作出棱,即找到另外一个公共点.

(1)如图 1 - 14(甲),在截面 A_1EC 内,过 E 作 $EG\perp A_1C$,G 是垂足.

$\because$ 面 $A_1EC\perp$ 侧面 A_1C,

$\therefore EG\perp$ 侧面 AC_1,取 AC 的中点 F,连结 BF,FG,

由 $AB=BC$,得 $BF\perp AC$.

$\because$ 面 $ABC\perp$ 侧面 AC_1,

$\therefore BF\perp$ 侧面 AC_1,得 $BF/\!/EG$;BF,EG 确定一个平面,交侧面 AC_1 于 FG.

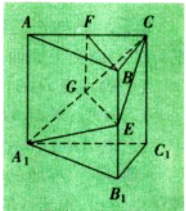

图 1 - 14(甲)

$\because BE/\!/$ 侧面 AC_1,

$\therefore BE/\!/FG$,四边形 $BEGF$ 是平行四边形,$BE=FG$.

$\because BE/\!/AA_1$,

$\therefore FG/\!/AA_1$,$\triangle AA_1C\backsim\triangle FGC$.

$\because AF=FC$,

$\therefore FG=\frac{1}{2}AA_1=\frac{1}{2}BB_1$,而 $BE=\frac{1}{2}BB_1$,故 $BE=EB_1$.

(2)如图 1 - 14(乙)分别延长 CE,C_1B_1 交于点 D,连结 A_1D.

$\because EB_1/\!/CC_1$,$EB_1=\frac{1}{2}BB_1=\frac{1}{2}CC_1$,

$\therefore DB_1=\frac{1}{2}DC_1=B_1C_1=A_1B_1$.

$\because \angle B_1A_1C_1=\angle B_1C_1A_1=60°$,

$\angle DA_1B_1=\angle A_1DB_1=\frac{1}{2}(180°-\angle DB_1A_1)=30°$,

$\therefore \angle DA_1C_1=\angle DA_1B_1+\angle B_1A_1C_1=90°$,

即 $DA_1\perp A_1C_1$.

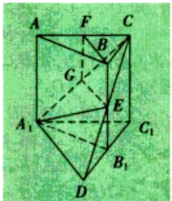

图 1 - 14(乙)

$\because CC_1\perp$ 面 $A_1C_1B_1$,即 A_1C_1 是 A_1C 在平面 A_1C_1D 上的射影,由三垂线定理得 $DA_1\perp A_1C$,

$\therefore \angle CA_1C_1$ 即为所求二面角的平面角.

$\because CC_1=AA_1=A_1B_1=A_1C_1$,$\angle A_1C_1C=90°$,

$\therefore \angle CA_1C_1=45°$,即所求二面角为 45°.

说明 ① 要灵活利用正棱柱的性质解题,即利用底面的特殊性以及侧面与底面的垂直关系. ② 二面角的棱如题中只有一个公共点时,另一个公共点要利用