中学数学复习题解

福建人民教育出版社

O12
102

中学数学复习题解

下　册

福建教育学院编

*

福建人民教育出版社出版

福建省新华书店发行

福建新华印刷厂印刷

787×1092　1/32　7印张　158千字

1980年4月第一版　1980年4月第一次印刷

印数1—250,300

书号：7159·540　定价 0.54 元

目　　录

下　　册

平面解析几何部分

练 习 4·1

1.（1）在 x 轴上的点，它们的纵坐标都等于多少？

（2）在y轴上的点，它们的横坐标都等于多少？

（3）在第Ⅰ、Ⅲ象限的两条坐标轴夹角平分线上的点，它们的横坐标和纵坐标有什么关系？

（4）在第Ⅱ、Ⅳ象限的两条坐标轴夹角平分线上的点，它们的横坐标和纵坐标有什么关系？

解 （1）纵坐标都等于零；

（2）横坐标都等于零；

（3）纵坐标和横坐标相等，因而$y=x$；

（4）纵坐标与横坐标绝对值相等，符号相反，因而$y=-x$。

2．已知P点的坐标为（a，b），在下表中根据所给的条件填写它的对称点的坐标。

对称轴或对称中心	x轴	y轴	原点	Ⅰ、Ⅲ象限角平分线	Ⅱ、Ⅳ象限角平分线
对 称 点					

解

对称轴或对称中心	x轴	y轴	原点	Ⅰ、Ⅲ象限角平分线	Ⅱ、Ⅳ象限角平分线
对 称 点	$(a,-b)$	$(-a,b)$	$(-a\ \ -b)$	$(b,\ a)$	$(-b,\ -a)$

3. 按下列条件确定点$M(x, y)$的位置。

(1) $x-y=0$；　　(2) $x+y=0$；

(3) $x^2+y^2=0$；　　(4) $x^2-y^2=0$；

(5) $x=|y|$；　　(6) $y=|x|$；

(7) $y=\sqrt{x^2}$；　　(8) $xy=0$。

解

(1) 在Ⅰ、Ⅲ象限角平分线上；

(2) 在Ⅱ、Ⅳ象限角平分线上；

(3) 在原点；

(4) 在象限角的平分线上；

(5) 在Ⅰ、Ⅳ象限角平分线上；

(6)、(7) 在Ⅰ、Ⅱ象限角平分线上；

(8) 在坐标轴上。

4. 已知x，y为实数，且$xy>0$，试确定点$M(x, y)$所在的象限。

解　$M(x, y)$点在第Ⅰ、Ⅲ象限。

5. (1) 一个菱形的边长为5，一条对角线的长为8，取两条对角线作为坐标轴，求菱形顶点的坐标；

(2) 等边三角形的边长为$2a$，一顶点为(0,0)，且一边在x轴的正方向上，求其余二顶点的坐标。

解　(1) 由于菱形对角线互相垂直，可求得另一条对角线长为6。

当长为8的对角线放在x轴上时，则各顶点分别为(－4, 0)，(0, －3)，(4, 0)，(0, 3)；

当长为6的对角线放在x轴上时，则各顶点分别为(－3, 0)，(0, －4)，(3, 0)，(0, 4)。

(2) 等边三角形ABC，A为(0, 0)，一边在x轴上且边

长为$2a$，因而$AB=2a$，

∴ B点坐标为$(2a, 0)$。

又由等边三角形性质知，底边上的中线长为边长的$\frac{\sqrt{3}}{2}$，即为$\sqrt{3}a$。

当顶点C在x轴上方时，C为$(a, \sqrt{3}a)$；

当顶点C在x轴下方时，C为$(a, -\sqrt{3}a)$。

综上所述，其余二顶点的坐标分别为$(2a,0)$、$(a,\sqrt{3}a)$或$(2a, 0)$、$(a, -\sqrt{3}a)$。

6. 求下列两点间的距离：

(1) $(5, 1)$与$(-3, -4)$； (2) $(0, 5)$与$(12, 0)$；

(3) (a, b)与$(-a, b)$；

(4) $(\sqrt{3}, -\sqrt{2})$与$(-\sqrt{2}, -\sqrt{3})$。

解 (1) $d=\sqrt{(-3-5)^2+(-4-1)^2}=\sqrt{89}$；

(2) $d=\sqrt{(12-0)^2+(0-5)^2}=13$；

(3) $d=\sqrt{(-a-a)^2+(b-b)^2}=2|a|$；

(4) $d=\sqrt{(-\sqrt{2}-\sqrt{3})^2+(-\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}$

$=\sqrt{2(3+2)}=\sqrt{10}$。

7. (1) 坐标为$(-4, -3)$、$(7, -3\sqrt{2})$、$(2, 4)$、$(5\cos\theta, 5\sin\theta)$的点，是否都在方程$x^2+y^2=25$的曲线上；

(2) 求证三个点$P_1(a\cos\theta_1, a\sin\theta_1)$，$P_2(a\cos\theta_2, a\sin\theta_2)$，$P_3(a\cos\theta_3, a\sin\theta_3)$，都在以原点为圆心的同一个圆上。

解 (1) 将上述四点坐标分别代入$x^2+y^2=25$方程，

左边$=(-4)^2+(-3)^2=25=$右边，

∴ $(-4, -3)$在曲线上；

左边$=7^2+(-3\sqrt{2})^2=67\neq$右边，

∴ $(7, -3\sqrt{2})$不在曲线上；

左边$=2^2+4^2=20\neq$右边，∴ $(2, 4)$不在曲线上；

左边$=(5\cos\theta)^2+(5\sin\theta)^2=25=$右边，

∴ $(5\cos\theta, 5\sin\theta)$ 在曲线上。

证明 (2) 我们只要证 $|P_1O|=|P_2O|=|P_3O|$，

$$|P_1O|=\sqrt{(a\cos\theta_1)^2+(a\sin\theta_1)^2}=|a|,$$

$$|P_2O|=\sqrt{(a\cos\theta_2)^2+(a\sin\theta_2)^2}=|a|,$$

$$|P_3O|=\sqrt{(a\cos\theta_3)^2+(a\sin\theta_3)^2}=|a|.$$

因而P_1，P_2，P_3这三点都在以原点为圆心，以$|a|$为半径的圆上。

8. 试分别求出与两点$A(-1, 3)$，$B(2, 4)$等距离，且在x轴或y轴上的点。

解 (i) 在x轴上的点$P_1(x, 0)$到A、B的距离相等，

即 $\sqrt{(x+1)^2+3^2}=\sqrt{(x-2)^2+4^2}$，

化简，解得 $x=1\frac{2}{3}$，

(ii) 在y轴上的点$P_2(0, y)$到A、B的距离相等，

即 $\sqrt{2^2+(y-4)^2}=\sqrt{1^2+(y-3)^2}$，

化简，解得 $y=5$，

由(i)、(ii)得，在x轴或y轴上到A，B等距离的点分别为$P_1(1\frac{2}{3}, 0)$，$P_2(0, 5)$。

9. 判定以下列各点为顶点的三角形的形状（以边分类）：

(1) $A(1, 4)$，$B(4, 1)$，$C(5, 5)$；

(2) $A(2, 2)$，$B(-2, -2)$，$C(2\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$；

(3) $A(3,\ 2)$，$B(7,\ 5)$，$C(1,\ 10)$。

解 (1) ∵ $|AB|=\sqrt{(4-1)^2+(1-4)^2}=3\sqrt{2}$，

$|BC|=\sqrt{(5-4)^2+(5-1)^2}=\sqrt{17}$，

$|AC|=\sqrt{(5-1)^2+(5-4)^2}=\sqrt{17}$，

∴ $|AC|=|BC|\neq|AB|$，

∴ $\triangle ABC$为等腰三角形。

(2) ∵ $|AB|=\sqrt{(-2-2)^2+(-2-2)^2}=4\sqrt{2}$，

$|BC|=\sqrt{(2\sqrt{3}+2)^2+(-2\sqrt{3}+2)^2}=4\sqrt{2}$，

$|AC|=\sqrt{(2\sqrt{3}-2)^2+(-2\sqrt{3}-2)^2}=4\sqrt{2}$，

∴ $|AB|=|BC|=|AC|=4\sqrt{2}$，

∴ $\triangle ABC$为等边三角形。

(3) ∵ $|AB|=\sqrt{(7-3)^2+(5-2)^2}=5$，

$|BC|=\sqrt{(1-7)^2+(10-5)^2}=\sqrt{61}$，

$|AC|=\sqrt{(1-3)^2+(10-2)^2}=2\sqrt{17}$，

∴ $|AB|$，$|BC|$，$|AC|$都不相等，

∴ $\triangle ABC$为不等边三角形。

10. (1) 在x轴上，求与点$A(3,\ 4)$距离为5的点；

(2) 在$4x-3y=0$上，求与点$A(3,\ 4)$距离为5的点；

(3) 已知两点$M(2,\ 2)$和$N(-2,\ 5)$，试在纵轴上求一点P，使$\angle MPN=90°$。

解 (1) 在x轴上的点为$P(x,\ 0)$，依题意得

$$\sqrt{(x-3)^2+4^2}=5,$$

∴ $x=0$ 或 $x=6$，

∴ 在x轴上与A距离为5的点是$(0,\ 0)$，$(6,\ 0)$。

(2) 在$4x-3y=0$上的点为$P\left(x,\ \frac{4}{3}x\right)$，依题意得

$$\sqrt{(x-3)^2+\left(\frac{4}{3}x-4\right)^2}=5,$$

∴ $x=0$ 或 $x=6$,

∴ 在$4x-3y=0$上与A距离为5的点为$(0, 0)$,$(6, 8)$.

(3) 依题意设P为 $(0, y)$,

∵ $|PM|^2+|PN|^2=|MN|^2$,

即 $[2^2+(y-2)^2]+[(-2)^2+(y-5)^2]$

$=(2+2)^2+(2-5)^2$,

化简得 $y^2-7y+6=0$,

∴ $y=1$ 或 $y=6$,

∴ 在纵轴上使 $\angle MPN=90°$的点P为$(0,1)$或$(0, 6)$.

11. (1) 已知B点分AC的比是$\frac{2}{3}$,求B点分CA的比,A点分BC的比,C点分AB的比;

(2) P_1和P_2坐标分别是$(-1, -6)$和$(3, 0)$,延长P_2P_1到P,使$|P_1P|=\frac{1}{3}|P_1P_2|$,求$P$点的坐标;

(3) 从点$A(1, -1)$向点$B(-4, 5)$引线段,再沿这个方向延长到哪一点时,才能使全长等于原来的线段的三倍?

解 (1) 设B点为(x, y),依题意

$\frac{AB}{BC}=\frac{2}{3}$,即 B是AC的内分点,

若B点分CA,则 $\frac{CB}{BA}=\frac{-3}{-2}=1\frac{1}{2}$;

若A点分BC,则 $\frac{BA}{AC}=\frac{BA}{AB+BC}=\frac{-2}{2+3}=-\frac{2}{5}$;

若C点分AB,则 $\frac{AC}{CB}=\frac{5}{-3}=-1\frac{2}{3}$.

(2) 设P为 (x, y)，P是P_2P_1延长线上的外分点，

$$\therefore \quad \lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=-\frac{1}{4},$$

$$\therefore \quad x=\frac{-1+\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot 3}{1-\frac{1}{4}}=-2\frac{1}{3},$$

$$y=\frac{-6+\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot 0}{1-\frac{1}{4}}=-8,$$

$\therefore$ P 点坐标为$\left(-2\frac{1}{3},-8\right)$.

(3) AB延长线上外分点$P(x, y)$，依题意

$$\lambda=\frac{AP}{PB}=-\frac{3}{2},$$

$$\therefore \quad x=\frac{1+\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(-4)}{1-\frac{3}{2}}=-14,$$

$$y=\frac{-1+\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot 5}{1-\frac{3}{2}}=17,$$

$\therefore$ P点坐标为 $(-14, 17)$.

12. (1) 已知线段AB被点$P(1, 2)$和$Q(3, 4)$分成相等的三部分，求A、B两点的坐标；

(2) 连结两点 $P_1(2, y)$、$P_2(x, 6)$ 的线段的中点是$P(3, 2)$，求x和y；

(3) 已知点 $M(2, -1)$、$N(-1, 4)$ 和 $P(-2, 2)$ 是 $\triangle ABC$ 各边的中点，试确定三角形的顶点。

解 (1) P，Q 是 AB 的内分点，则 A，B 是 PQ 的外分点，依题意知

$$\lambda_1=\frac{PA}{AQ}=-\frac{1}{2}, \qquad \lambda_2=\frac{PB}{BQ}=-2,$$

设 A 点坐标为 (x_1, y_1)，

则 $$x_1=\frac{1+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 3}{1-\frac{1}{2}}=-1,$$

$$y_1=\frac{2+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 4}{1-\frac{1}{2}}=0;$$

又设 B 点坐标为 (x_2, y_2)，

则 $$x_2=\frac{1+(-2)\cdot 3}{1-2}=5,$$

$$y_2=\frac{2+(-2)\cdot 4}{1-2}=6,$$

$\therefore$ A，B 坐标分别为 $(-1, 0)$、$(5, 6)$。

(2) 依题意得

$$\frac{2+x}{2}=3, \qquad \frac{y+6}{2}=2,$$

$\therefore$ $x=4$，$y=-2$。

(3) 设 A、B、C 坐标分别为 (x_1, y_1)、(x_2, y_2)、(x_3, y_3)。

则 $\begin{cases} \dfrac{x_1+x_2}{2}=2, \\ \dfrac{x_2+x_3}{2}=-1, \\ \dfrac{x_1+x_3}{2}=-2, \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{y_1+y_2}{2}=-1; \\ \dfrac{y_2+y_3}{2}=4; \\ \dfrac{y_1+y_3}{2}=2; \end{cases}$

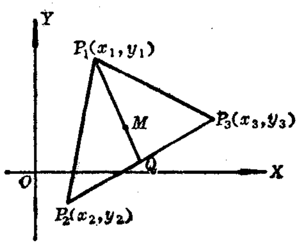
解方程组得：$x_1=1$，$x_2=3$，$x_3=-5$，

$y_1=-3$，$y_2=1$，$y_3=7$，

因而A、B、C坐标分别为$(1, -3)$、$(3, 1)$、$(-5, 7)$。

13. (1) 三角形的三个顶点分别是$P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$、$P_3(x_3, y_3)$，求证$\triangle P_1P_2P_3$的重心坐标是$\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$；

(2) 求以$(4, 9)$、$(-2, 6)$和$(7, -3)$为顶点的三角形的重心坐标。



解 (1) 设重心坐标为$M(x, y)$，则M点在P_2P_3的中线P_1Q上，且$\dfrac{P_1M}{MQ}=2:1$，又Q点坐标是$\left(\dfrac{x_2+x_3}{2}, \dfrac{y_2+y_3}{2}\right)$，

$$\therefore \quad x=\frac{x_1+2\times\dfrac{x_2+x_3}{2}}{1+2}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},$$

$$y=\frac{y_1+2\times\dfrac{y_2+y_3}{2}}{1+2}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3};$$

(2) 利用（1）的公式得，

$$\frac{4+(-2)+7}{3}=3,\qquad \frac{9+6+(-3)}{3}=4,$$

∴ 三角形的重心坐标为（3，4）。

14. 求证 $A(0,\ 2)$，$B(1,\ \frac{1}{2})$，$C(2,\ -1)$ 三点在一直线上。

证 ∵ AB的斜率$k_{AB}=\dfrac{2-\frac{1}{2}}{0-1}=-1\frac{1}{2}$，

BC 的斜率 $k_{BC}=\dfrac{\frac{1}{2}-(-1)}{1-2}=-1\frac{1}{2}$，

∴ AB，BC有一公共点B，且斜率相等，因而A、B、C三点共线。

15. （1）求与定点$A(-1,3)$的距离等于5的点的轨迹方程；

（2）求与两定点$A(a,\ b)$、$B(a,\ -b)$等距离的点的轨迹方程；

（3）长度为l的线段AB上有一定点P，AP与PB的比为2，两端点A、B分别在x轴和y轴上滑动，求P点的轨迹方程。

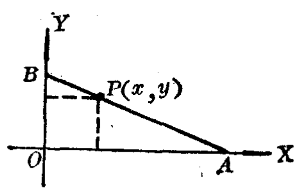
解 （1）$(x+1)^2+(y-3)^2=5^2$；

（2）设动点为$P(x,\ y)$，依题意$|AP|=|BP|$，

∴ $(x-a)^2+(y-b)^2=(x-a)^2+(y+b)^2$，

∴ $y=0$是P到A，B等距离点的轨迹。

（3）设P点坐标为$(x,\ y)$，



且设A点坐标为$(a,\ 0)$，B点坐标为$(0,\ b)$，

则 $\dfrac{a}{x}=\dfrac{3}{1}$，$\dfrac{b}{y}=\dfrac{3}{2}$，

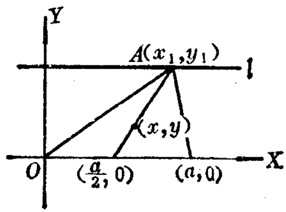
即 $a=3x$，$b=\frac{3}{2}y$。

$\therefore\ (3x)^2+\left(\frac{3}{2}y\right)^2=l^2$，即 $9x^2+\frac{9y^2}{4}=l^2$，

故P点的轨迹方程为 $36x^2+9y^2=4l^2$。

16. $\triangle ABC$中，已知B、C的坐标分别为$(0,\ 0)$、$(a,\ 0)$，求当A在下列直线l上移动时，$\triangle ABC$重心的轨迹方程：

(1) l与BC所在直线平行，且距离为h；(2) l的方程为$x+2y-8=0$。



解 (1) 设顶点A的坐标为$(x_1,\ y_1)$，重心坐标为$(x,\ y)$，

则 $x=\frac{x_1+a+0}{3}=\frac{x_1+a}{3}$，

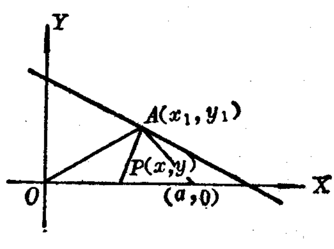
$$y=\frac{0+h+0}{3}=\frac{y_1}{3}=\frac{h}{3}.$$

即 对于任意x_1，纵坐标y恒等于$\frac{h}{2}$，$\therefore$ $\triangle ABC$重心轨迹方程为 $y=\frac{h}{3}$；

(2) 设重心坐标为$P(x,\ y)$，顶点A的坐标为$(x_1,\ y_1)$，

则 $x_1=3x-a$；$y_1=3y$，

代入直线方程得

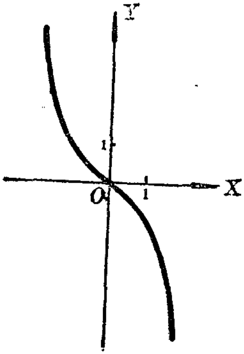


$3x+6y-(a+8)=0$。

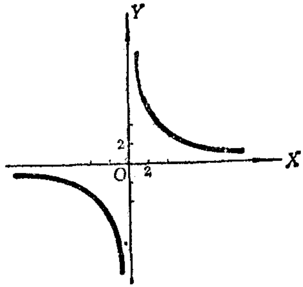
17. 描绘下列各方程的曲线：

(1) $y=-x^3$；　(2) $xy=12$；　(3) $y=|2x-3|$。

解



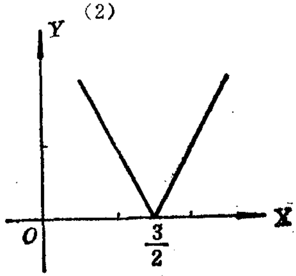
(1)



(2)

(3) $y=2x-3\left(x\geqslant\frac{3}{2}\right)$;

$y=3-2x\left(x<\frac{3}{2}\right)$.



(3)

18. 当 k 为何值时，下列曲线有两个交点，一个交点，没有交点?

(1) $\begin{cases}y=2x-5,\\x^2+y^2=k;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}y=x+k,\\4x^2+9y^2=36.\end{cases}$

解 (1) 把$y=2x-5$ 代入$x^2+y^2=k$得

$5x^2-20x+25-k=0$.

$\Delta=400-500+20k=20k-100$.

当$k>5$时，$\Delta>0$，两曲线有两个交点；

当$k=5$时，$\Delta=0$，两曲线有一个交点；

当$k<5$时，$\Delta<0$，两曲线没有交点；

(2) 把$y=x+k$代入$4x^2+9y^2=36$，得

$13x^2+18kx+9k^2-36=0$,

$\Delta=(18k)^2-4\times13\times(9k^2-36)=-144k^2+1872$。

当$-\sqrt{13}<k<\sqrt{13}$时，$\Delta>0$，两曲线有两个交点；

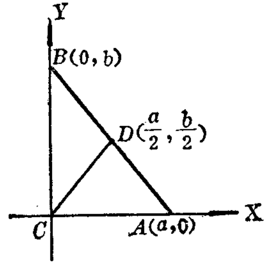
当$k=\pm\sqrt{13}$时，$\Delta=0$，两曲线有一个交点；

当$k>\sqrt{13}$或$k<-\sqrt{13}$时，$\Delta<0$，两曲线没有交点。

19. 用解析法证明：

(1) 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半；

(2) 平行四边形$ABCD$中，E、F分别为BC、CD的中点，则AE、AF三等分BD。



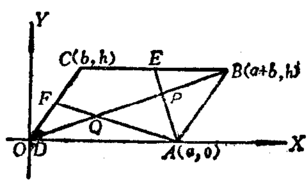
证明 (1) 如图，建立直角坐标系。

设A点的坐标为$(a,\ 0)$，B点的坐标为$(0,\ b)$，

则中点D的坐标是$\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2}\right)$，

中线CD的长$|CD|=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$

$$=\frac{1}{2}|AB|;$$



(2) 如图，建立直角坐标系并设A、C坐标分别为$(a,\ 0)$、$(b,\ h)$，

则B点坐标为$(a+b,h)$；E、F点坐标分别为$\left(\frac{a+2b}{2},\ h\right)$、$\left(\frac{b}{2},\ \frac{h}{2}\right)$。

设AE、AF与BD的交点坐标分别为$P(x_1,\ y_1)$、

$Q(x_2, y_2)$，

则P点为$\triangle ABC$重心，且$x_1=\dfrac{2(a+b)}{3}$，$y_1=\dfrac{2}{3}h$

$\therefore\quad OP:OB=2:3.\qquad(1)$

同样可得 $x_2=\dfrac{a+b}{3}$，$y_2=\dfrac{1}{3}h$，

$\therefore\quad OQ:OB=1:3.\qquad(2)$

由(1)，(2)知　$OQ=QP=PB$。

练　习　4·2

1．根据下列所给的条件，求出直线方程：

(1) 经过$P(2,\ -3)$点，并且平行于直线$x-2y+3=0$；

解　$k=\dfrac{1}{2}$，$y+3=\dfrac{1}{2}\left(x-2\right)$，$\therefore\quad 2y-x+8=0$；

(2) 经过 $P\left(-\dfrac{1}{2},\ 2\right)$点，并且垂直于斜率为$\dfrac{2}{3}$的直线；

解　$k=-\dfrac{3}{2}$，$y-2=-\dfrac{3}{2}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$，

$\therefore\quad 4y+6x-5=0$；

(3) 经过$P(4,\ 2)$点，并且平行于x轴；

解　过P且平行x轴的直线为$y=2$；

(4) 经过$P\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$点，并且平行于$y$轴；

解　过P且平行y轴的直线为$x=-\dfrac{1}{2}$；

(5) 倾斜角是$120°$，在y轴上的截距是-5；

解　倾斜角$\theta=120°$，在y轴上截距$b=-5$，