上海大学理学院数学系 编

高等数学教程

（中册）

上海大学出版社

SHANGHAI DAXUE CHUBANSHE

高等数学教程

（中册）

上海大学理学院数学系　编

上海大学出版社
·上海·

内 容 提 要

本书是按照全国高等学校工科数学课程教学指导委员会制定的《高等数学课程教学基本要求》编写而成的，分上、中、下三册. 上册内容为函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分. 中册的内容为定积分、定积分的应用、级数、微分方程. 下册的内容为空间解析几何与向量代数、多元微分学、重积分、曲线与曲面积分.

本册力图从数学的实际应用背景出发，引入一些数学建模的基本思想，围绕高等微积分的主要思想、理论和方法，突出其广泛的应用，并根据学生学习的需求，在书中每节安排了习题(A)、(B)，在每章安排了总复习题，以供学生系统地练习与复习. 本册逻辑推理严谨清晰，叙述通顺浅显，例题典型面广，适合学生自学，可供综合性大学、高等师范院校的非数学理工类及管理类的本科学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学教程．中册/上海大学理学院数学系编. 上海：上海大学出版社，2005.11

ISBN 7-81058-931-8

Ⅰ. 高...　Ⅱ. 上...　Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 127914 号

责任编辑　王悦生

封面设计　孙　敏

高等数学教程(中册)

上海大学理学院数学系　编

上海大学出版社出版发行

(上海市上大路 99 号　邮政编码 200444)

(http://www.shangdapress.com　发行热线 66135110)

出版人：姚铁军

*

上海市印刷七厂印刷　各地新华书店经销

开本 890×1240　1/32　印张 11.25　字数 320 千

2005 年 11 月第 1 版　2005 年 11 月第 1 次印刷

印数：1—5 100 册

ISBN 7-81058-931-8/O·033　定价：22.00 元

序 言

微积分是人类最伟大的创造发明之一.在微积分诞生的三百多年间,它已为阐述和解决现实世界中所提出的各种问题提供了强有力的工具.微积分作为“高等数学”课程的核心内容,也已成为人才培养必须掌握的重要内容.

上海大学是一所全面实行短学期制、学分制和选课制的高等学校,“我们希望学生来到学校是为掌握一种正确的学习方法、工作方法和思想方法,也就是辩证唯物主义的方法.所学课程也好,专业也好,仅仅是一种载体,通过这个载体使大家掌握这种方法.”因此,结合学校的办学理念、体制和机制,编写出一本既反映学习内容和思想方法,同时又能满足学校人才培养目标的教材,是我校培养高素质人才战略的重要组成部分.

“高等数学”是上海大学理工类和管理类大学生的必修课程,微积分中的“以直代曲、先分后合”的这种综合分析方法的辩证思想,其作为一种科学研究方法正逐渐成为各专业大学生必须掌握的一种思想方法,因此“高等数学”也逐步成为其他专业学生的必修或选修课程,它已在我校人才培养中占据极其重要的地位.

教育的目的是培养人,教学应以学生为中心,因此在教学过程中仅仅是教师的讲解是不够的.一个好的教学过程应该是教师和学生共同构建的互动的整体,充分发挥教师在教学中的核心指导作用,教学为学生着想,学生在学习中能够不断地有所反应和互动,这样的教学才会富有成效.本教材即在以上这些方面作了一些有益的尝试和实践.

上海大学理学院数学系拥有一批长期活跃在教学与科研第一线的教师,他们结合我校教育教学改革的特点,在教学过程进行了许多探索和实践,今天编写完成的《高等数学教程》一书,就是他们长期坚持将教

学和科研相结合的结晶.本教材结合微积分的思想,并试图把数学建模的思想和方法有机地融入到《高等数学教程》的课程教学之中,这是对大学“高等数学”教学改革的初步尝试.它也许能使学生通过对《高等数学教程》的学习,逐步掌握起一种用数学的思想和方法去分析和解决实际问题的能力,更能使学生在学习“高等数学”的过程中提高学习兴趣和学习主动性,同时能起到提高学生的自学能力的作用.

在本教材出版之际,我借此机会衷心感谢我校理学院数学系广大教师所发挥的聪明才智和爱岗敬业的精神,为基础理论课程的教学工作所做出的探索和创新.同时也希望使用本教材的广大老师们对教材中存在的不足提出批评和意见,为进一步提高“高等数学”的教学质量,为培养高素质人才做出贡献.

上海大学副校长叶志明

2005 年 7 月 19 日于上海大学新校区

前　言

本书是为综合性大学、高等师范院校的非数学理工类、管理类本科学生编写的高等数学教程，是上海大学组建十多年以来，为满足广大学生后续学习要求，经过多年的教学实践而编写完成的公共基础课教材.

20 世纪后半叶，信息技术获得了超乎想像的发展，数学的应用空前地向一切领域渗透，数学教学的需求也随之不断地扩大. 如何以学生为中心，满足他们后继课程的需要，编写出一本与时俱进的教材是我们努力追求的目标.

本书力图从数学的实际应用背景出发，引入一些数学建模的基本思想，围绕高等微积分的主要思想、理论和方法，突出其广泛的应用. 此外根据学生不同的需求，精心设计了课后习题(A)、(B)和总复习题. 习题(A)是为本课程所有学生准备的必须进行且必须掌握的训练内容，习题(B)是为继续深造的学生准备的训练内容.

本书根据上海大学实行短学期制(一学年三个教学学期、一个实践学期)的特点而编写，分上、中、下三册. 上册主编唐一鸣，中册主编俞国胜，下册主编屠立煌. 全书由邬冬华统稿.

本书的第一、第二、第三章由唐一鸣执笔完成；第四、第五章由应立毅、唐一鸣执笔完成；第六章由应立毅、屠立煌执笔完成；第七章由吴寿柏、屠立煌执笔完成；第八、第九章由俞国胜执笔完成；第十章由姜勤执笔完成；第十一、十二章由任亚娣执笔完成. 书中的数学建模的内容由邬冬华、屠立煌编写。研究生范莉霞、庞莉莉、严侃等同学帮助打印了本书中、下册的大部分内容。各节习题由吴东红、任亚娣、姜勤、应立毅编写完成. 潘宝珍、刘彬清、岳洪、郭伟娟、耿辉、沈裕华、金石明、吴牧、何龙敏等和编写本书的作者一起参加了为编写本教程举行的多次教研活动，他们献计献策，为本书的出版做出了重要贡献.

在本书出版过程中,得到了上海大学校领导和教务处领导的大力支持;同时也得到了理学院和数学系领导的鼓励和支持;上海大学出版社王悦生编辑为本书出版做了诸多卓有成效的工作,在此一并表示深深的谢意.

编写一本适合时代需求的高质量的高等数学教程实非易事,我们虽然做了一些探索,但限于作者水平,不妥和谬误之处在所难免,希望各位专家和广大师生不吝指正.

编　者

于 2005 年盛夏

符 号 说 明

符号	表示的意义
$\exists$	“存在”或“找到”
$\forall$	“对任何”或“对每一个”
$\Leftrightarrow$	等价，充分且必要，当且仅当
$A\Rightarrow B$	由 A 得到 B
$f: A\to B$	f 是从集合 A 到集合 B 的映射
$\mathbf{N}$	自然数集合
$\mathbf{Z}$	整数集合
$\mathbf{Q}$	有理数集合
$\mathbf{J}$	无理数集合
$\mathbf{R}$	实数集合
$\mathbf{C}$	复数集合
$x\in A$	x 是集合 A 的元素
$A\subset B$	集合 A 是集合 B 的子集
$C=A\cup B$	集合 C 是集合 A 与集合 B 的并集
$C=A\cap B$	集合 C 是集合 A 与集合 B 的交集
$x\in A\cup B$	$x\in A$ 或 $x\in B$
$x\in A\cap B$	$x\in A$ 且 $x\in B$
$C=A\setminus B$	C 是集合 A 与集合 B 的差集
$x\in A\setminus B$	$x\in A$ 但 $x\notin B$(x 不属于 B)
$f\in C[a, b]$	f 属于在$[a, b]$上连续的函数类
$f\in C^1[a, b]$	f 属于在$[a, b]$上具有一阶连续导数的函数类
$f\in R[a, b]$	f 属于在$[a, b]$上黎曼可积的函数类

目　录

第五章　定积分

自然科学与社会科学中的许多问题都可以归结为积分学的另一个基本问题——定积分问题.

当我们开始定积分的学习之前，让我们先简单回顾一下微积分发展的历史.

微积分的发明是 17 世纪科学史上最光辉的一页，是数学在 17 世纪所取得的最伟大成就，也是人类历史上最伟大的发现和创造之一. 事实上微积分是长期演变的结果，它既不是从牛顿和莱布尼兹开始的，也不是由他们完成的，但不可否认他们两人在其中起了决定性的作用. 在 17 世纪的欧洲，当时探索微积分的有一大批有志向的科学家，他们顽强地继续着伽利略和开普勒的数学工作. 有两个中心问题引起了他们的注意. 第一个是切线问题：确定已知曲线的切线，这是微分学的基本问题. 第二个是求积问题：确定已知曲线内部的面积，这是积分学的基本问题. 而牛顿和莱布尼兹分别进行了卓有成效的开创性工作，明确地认识到这两个问题之间的密切联系. 这个新的统一的方法变成了科学的强有力工具.

牛顿是从物理学观点上来研究数学的，他创立的微积分学原理是同他的力学研究分不开的. 他先后写成三篇论文《运用无穷多项的方程的分析学》、《流数法和无穷级数》、《求曲边形的面积》，这三篇论文构成了他对创建微积分的主要贡献. 1687 年牛顿出版了他的名著《自然哲学的数学原理》，这本书是研究天体力学的，微积分的一些基本概念和原理就包括在这本书里.

莱布尼兹是从几何学观点上研究微积分的，主要是在研究曲线的切线以及面积的问题上运用分析学方法引进微积分概念的. 他从 1684 年起发表了一系列微积分著作. 莱布尼兹的最大功绩是精心设计了非常巧妙而简洁并能反映事物本质的微积分学里的一些数学符号. 例如

微分符号 $\mathrm{d}x$，积分符号 $\int y\mathrm{d}x$，导数符号 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$，等. 除了微积分里的符号外，他还创设了其他的一些数学符号，从而他又以"数学符号大师"的称号闻名于世.

牛顿和莱布尼兹以不同的途径研究了微积分，荣誉应由他们两人共享，然而不幸的是历史上发生过发明微积分的"优先权"的争论，从而使数学家分裂成两派. 两派争论激烈，甚至尖锐地互相敌对、嘲笑，这一争论已成为科学史上的前车之鉴. 后经充分的调查证实：事实上，牛顿和莱布尼兹是各自独立地创立了微积分，只不过在创立年代上牛顿先于莱布尼兹，而在公开发表的时间上莱布尼兹却早于牛顿.

创立初期的微积分还存在严重的逻辑缺陷，但它却有旺盛的生命力，经过几代数学家的不懈努力，不断地加以完善，直到 19 世纪 20 年代开始，经过法国数学家柯西、德国数学家魏尔斯特拉斯为代表的一批数学家的努力，以极限理论为基础的微积分严谨体系才逐步建立起来. 在这一过程中一些数学家做出了巨大的贡献. 比如 19 世纪的德国数学家黎曼给出了沿用至今的目前教科书中的有关定积分的定义，为了纪念他，人们把积分和称为黎曼和，把定积分称为黎曼积分.

随着微积分的蓬勃发展，它渐渐成为了数学的一个重要部分. 它渗透了数学的各个领域，并且成为了自然科学、技术发展以及社会科学中解决实际问题的一个有力工具.

本章我们首先从实际问题引进定积分的概念，通过讨论变限积分函数的性质导出微积分基本公式，然后讨论定积分的性质和计算方法，最后介绍定积分在几何问题和经济问题中的某些应用.

第一节　定积分的基本概念和性质

一、定积分问题举例

1. 曲边梯形的面积

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续且 $f(x) \geqslant 0$. 由曲线 $y =$

$f(x)$，直线 $x=a, x=b$ 与 x 轴围成的平面图形，即平面点集

$$\{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant f(x), a \leqslant x \leqslant b\}$$

称为曲边梯形(图 5 - 1). 其中 x 轴上的区间 $[a, b]$ 称为其底边，曲线弧 $y=f(x)$ 称为其曲边.

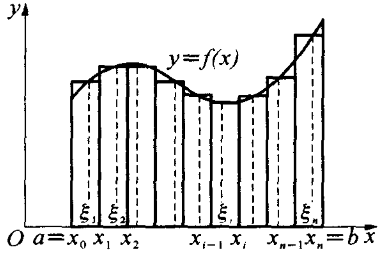

图 5 - 1

我们知道，矩形的高是不变的，它的面积可按公式

矩形的面积 = 高 × 底

来定义和计算. 由于曲边梯形在其底边上各点处的高 $y=f(x)$ 是变化的，故它的面积就不能按矩形面积公式来计算. 然而，由于函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是连续的，在 $[a, b]$ 的一个很小的子区间上它的变化很小，近似于不变，因此，如果限制在一个很小的局部来看，子区间上的曲边梯形接近于矩形. 基于这一事实，我们通过下列步骤来计算它的面积.

(1) 划分. 把曲边梯形面积划分成许多窄曲边梯形面积之和. 为此，在区间 $[a, b]$ 中任意插入 $n-1$ 个分点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

把 $[a, b]$ 分成 n 个小区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n],$$

它们的长度依次为

$$\Delta x_1=x_1-x_0, \Delta x_2=x_2-x_1, \cdots, \Delta x_n=x_n-x_{n-1},$$

用直线 $x=x_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 把曲边梯形分为 n 个窄曲边梯形. 设这些曲边梯形的面积分别为 $\Delta A_1, \Delta A_2, \cdots, \Delta A_n$，则曲边梯形面积

$$A=\Delta A_1+\Delta A_2+\cdots+\Delta A_n.$$

(2) 近似. 把每个窄边曲边梯形近似地看成一个窄矩形，从而求出

其面积的近似值. 为此在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上任取一点 ξ_i,用 $f(\xi_i)$ 作窄矩形的高,从而得

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i \quad (i = 1,2,\cdots,n).$$

(3) 求和. 把窄梯形面积的近似值加起来,所得之和作为曲边梯形面积 A 的近似值,即

$$\begin{aligned} A &= \Delta A_1 + \Delta A_2 + \cdots + \Delta A_n \\ &\approx f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \end{aligned}$$

(4) 逼近. 由于随着对已知区间$[a, b]$的划分不断加细,第三步所得近似值的精确度将不断提高,并且不断地逼近面积的精确值. 我们要求小区间的长度都无限缩小,即记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$,令 $\lambda \to 0$. 当 $\lambda \to 0$ 时(这时分段数 n 无限增大,即 $n \to \infty$),若上述和式的极限存在,便得曲边梯形的面积 A. 即

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

2. 变速直线运动的路程

设某质点作直线运动,已知速度 $v = v(t)$ 是在区间$[T_1, T_2]$上关于 t 的连续函数,且 $v(t) \geqslant 0$,计算在这段时间$[T_1, T_2]$内质点所经过的路程 s.

我们知道,如果质点作匀速直线运动,有计算公式:

$$\text{路程} = \text{速度} \times \text{时间}.$$

由于质点运动的速度不是常量而是变量,所以我们不能由上述公式来计算路程 s. 但是,质点运动的速度函数 $v = v(t)$ 是连续函数,在很短的一段时间内,速度的变化是很小的,质点运动可以近似地看作匀速运动. 基于这一事实,我们通过下列步骤来计算所求的路程 s.

(1) 划分. 把整段路程划分成许多小段路程之和. 为此,在时间间

隔区间$[T_1, T_2]$中任意插入$n-1$个分点

$$T = t_0 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_2,$$

把$[T_1, T_2]$分成 n 个小段

$$[t_0, t_1],[t_1, t_2],\cdots,[t_{n-1}, t_n],$$

各小段时间的长度依次为

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0, \Delta t_2 = t_2 - t_1, \cdots, \Delta t_n = t_n - t_{n-1}.$$

设在时间段$[t_{i-1}, t_i]$内质点所经过的路程分别为 $\Delta s_i (i=1,2,\cdots,n)$，则

$$s = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \cdots + \Delta s_n.$$

(2) 近似. 把每个时间段内的运动都近似地看作匀速运动，从而求出这段时间内所经过路程的近似值. 为此在每个时间段$[t_{i-1}, t_i]$上任取一点 τ_i，以 τ_i 时刻的速度 $v(\tau_i)$作为$[t_{i-1}, t_i]$上的速度，得到相应时间段内质点所经过的路程的近似值

$$\Delta s_i \approx v(\tau_i)\Delta t_i \quad (i = 1,2,\cdots,n).$$

(3) 求和. 把 n 个时间段内物体所经过的路程的近似值相加，得到全部路程的近似值，即

$$\begin{aligned} s &= \Delta s_1 + \Delta s_2 + \cdots + \Delta s_n \\ &\approx v(\tau_1)\Delta t_1 + v(\tau_2)\Delta t_2 + \cdots + v(\tau_n)\Delta t_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i. \end{aligned}$$

(4) 逼近. 随着对时间间隔$[T_1, T_2]$的划分不断加细，显然由第三步所得的近似值的精度将不断提高，并且不断地逼近路程的精确值 s. 记 $\lambda = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_n\}$，当 $\lambda \to 0$ 时，若上述和式的极限存在，便得质点作变速直线运动在时间$[T_1, T_2]$ 内经过的路程 s. 即

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i.$$

二、定积分的定义

上述两例虽然实际意义不同，但解决问题的思路、方法却完全相同，最终都可以归结为求同一结构的和式极限. 事实上，几何学、物理学以及科学技术中许多重要问题的解决都归结到要计算此类和式极限. 抽去这些问题的具体意义，抓住它们在数量关系上的共同本质与特性，并加以概括，我们就可以抽象出定积分的定义.

定义 1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界，在 $[a, b]$ 中任意插入若干分点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

把区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n],$$

各个小区间的长度依次为

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \cdots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 $\xi_i (x_{i-1} \leqslant \xi \leqslant x_i)$，作函数值 $f(\xi_i)$ 与小区间长度 Δx_i 的乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i (i=1,2,\cdots,n)$，并作和式

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{1}$$

记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$，如果不论对 $[a, b]$ 的怎样分法，也不论 ξ_i 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的取法，只要当 $\lambda \to 0$ 时，和 S_n 总是趋于确定的常数 S，这时我们称极限 S 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分（简称积分），记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{2}$$

其中 $f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，x 称为积分变量，a 与 b 分别称为积分的下限和积分的上限，$[a, b]$ 称为积分区间.

利用“$\varepsilon-\delta$”的说法，定积分的定义可以表达如下：

定义 2 设有常数 S，如果对于任意给定的正数 ε，总存在一个正数 δ，使得对于区间$[a, b]$的任何分法，及 ξ_i 在$[x_{i-1}, x_i]$中的任意取法，只要 $\lambda<\delta$，总有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - S\right|<\varepsilon$$

成立，则称 S 为 $f(x)$在区间$[a, b]$上的定积分，记作$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

和式 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 通常称为 $f(x)$的积分和（也称黎曼和）. 如果 $f(x)$ 在区间$[a, b]$上定积分存在，我们称 $f(x)$在区间$[a, b]$上可积（也称黎曼可积）.

注意 函数在任何特定区间上的定积分依赖于函数而不依赖表示其变量的字母. 如果我们用 t 或 u 代替 x，可把积分写为 $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ 或 $\int_a^b f(u)\mathrm{d}u$，以代替$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，不论怎么表示积分，它所表示的是同一个数.

对于定积分，有这样一个重要问题：函数 $f(x)$在区间$[a, b]$上满足什么条件，$f(x)$在区间$[a, b]$上一定可积？这个问题我们不作深入讨论，而只给出下述两个充分条件.

定理 1 设 $f(x)$在区间$[a, b]$上连续，则 $f(x)$在区间$[a, b]$上可积.

定理 2 设 $f(x)$在区间$[a, b]$上有界，且只有有限个间断点，则 $f(x)$ 在区间$[a, b]$上可积.

利用定积分的定义，前面所讨论的两个实际问题可以分别表述如下：

曲线 $y=f(x)$ $(f(x)\geqslant 0)$，直线 $x=a, x=b$ 与 x 轴围成的曲边梯形面积 A 等于函数 $y=f(x)$ 在区间$[a, b]$上的定积分，即

$$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$