全国高等农林院校"十一五"规划教材

高等数学

上册

工科类专业用

吴 坚 主编

中国农业出版社

全国高等农林院校“十一五”规划教材

高　等　数　学

上　册

工科类专业用

吴　坚　主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．上册/吴坚主编．— 北京：中国农业出版社，2006.8

全国高等农林院校“十一五”规划教材

ISBN 7-109-09921-0

Ⅰ．高…　Ⅱ．吴…　Ⅲ．高等数学—高等学校—教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 083769 号

中国农业出版社出版

（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）

（邮政编码 100026）

出版人：傅玉祥

责任编辑　朱　雷

北京中兴印刷有限公司印刷　　新华书店北京发行所发行

2006 年 8 月第 1 版　　2006 年 8 月北京第 1 次印刷

开本：820mm×1080mm　1/16　　印张：19.25

字数：462 千字

定价：27.00 元

主　编　吴　坚（安徽农业大学）

副主编　汪宏喜（安徽农业大学）

杨逢建（仲恺农业技术学院）

编　者　李丽华（河北科技师范学院）

甄　苓（中国农业大学）

蒋华松（南京农业大学）

孙丹娜（莱阳农学院）

吴瑞武（云南农业大学）

* * * * *

内 容 提 要

本教材是全国高等农林院校“十一五”规划教材。教材按照教育部非数学类专业数学基础课程教学指导委员会制定的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》进行编写，兼顾农林院校的特点，结合多年来的教学体会，对教材进行了一些有益的改革尝试。

全书分上、下两册编写，共九章。上册内容包括：函数的极限与连续，一元函数微分学及其应用，一元函数积分学及其应用，微分方程等四章。下册内容包括：空间解析几何，多元函数微分学，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数等五章。

本教材可以作为高等农林院校工科类专业高等数学课程教材，也可供其他普通高等学校理工类非数学专业选用。

前　言

本教材是全国高等农林院校“十一五”规划教材，主要面向高等农林院校的理工科非数学类专业，也适用于普通高等院校的理工科非数学类专业。该教材按照教育部非数学类专业数学基础课程教学指导委员会制定的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》进行编写，兼顾到高等农林院校的特点，旨在传授基本数学知识，提高读者的数学素养和能力，培养读者运用数学知识分析和解决实际问题的能力。

高等数学课程是工科类专业十分重要的一门基础课程，是许多后继课程的基础，对培养具有良好科学素养以及应用数学知识解决实际问题的人才起着重要作用。在教材编写过程中，我们主要考虑以下几个方面：(1)考虑与中学教材的衔接，删去了传统的初等函数一节，拓宽和加强了数学基础。因此在极限理论上，我们通过讨论实数的完备性，从确界定理出发，讲解并建立了极限论。凡所涉及的定理如柯西收敛准则，闭区间上连续函数的性质等都给予严格的证明。(2)高等数学的概念和方法都是从研究各种物质形态以及各种运动形式的数量关系而产生的。教材力求在引入重要概念和方法时，对它们的实际背景给予说明。(3)教材还注重引入一些数学发展史，强调数学的应用，以提高学生的数学素养和分析解决实际问题的能力。(4)尽量使内容安排趋于合理，符合学生的认知规律。(5)编者精选了例题和习题，力求使例题不仅配合所授内容，而且让学生能够从中获取分析问题、解决问题的思想和方法。

安徽农业大学吴坚编写第一章和第二章，中国农业大学王来生、甄苓编写第七章，莱阳农学院崔文善、孙丹娜编写第六章，南京林业大学刘应安、蒋华松编写第五章，安徽农业大学汪宏喜编写第四章，安徽农业大学张长勤编写第八章，云南农业大学郑大川、吴瑞武编写第九章，河北科技师范学院李丽华编写第三章(四至五节)，仲恺农业技术学院杨逢建编写第三章(一至二节)。全书由吴坚和汪宏喜教授统稿。

本教材的出版得到了中国农业出版社和兄弟院校同仁们的大力支持,在此表示诚挚的谢意。

本教材是全国高等农林院校首次正式出版的面向工科类专业的《高等数学》教材,囿于学识,该书的错误和不足之处在所难免,恳请广大读者和授课教师提出批评和建议。

吴 坚

2006 年 3 月 9 日

目　　录

第一章　函数的极限与连续

函数是高等数学或微积分学的研究对象，极限理论是高等数学的基础，它是研究函数性质的有力工具，也是区别高等数学与初等数学的显著标志．本章在讨论实数完备性的基础上，主要讨论数列与函数的极限理论，并讨论在高等数学中有着广泛应用的一些重要的连续函数及其性质．

第一节　数列的极限

1.1　实数

1.1.1　集合及其运算

首先我们对关于集合的基本记号和运算加以复习和说明．

集合是一个不难理解的概念，但要给集合下一个严格的数学定义是相当困难的，它是一个无法定义只能加以描述的基本概念．我们把具有某种属性并可相互区别的事物(或对象)组成的全体称为**集合**，构成集合的每个事物称为该集合的**元素**(或**元**)．习惯上，用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用 $a,b,c\cdots$ 表示集合的元素．a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记为 $a\in A$；a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记为 $a\notin A$(或 $a\,\overline{\in}A$)．含有有限个元素的集合称为**有限集**；不含有任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$；既不是有限集又不是空集的集合称为**无限集**．

一般情形下，集合可用**描述法**来表示，即用

$$A=\{x\mid x\text{ 具有性质 }P(x)\}$$

来表示由满足某种性质 $P(x)$ 的一切元素 x 组成的集合，例如，有理数集为

$$\mathbf{Q}=\left\{x\mid x=\frac{q}{p},\text{且 }p\in\mathbf{N}^+,q\in\mathbf{Z}\right\}^*$$

集合也可用**列举法**来表示，即把它的所有元素一一列举出来．例如，方程 $x^2-9=0$ 的解集可以表示为 $S=\{-3,3\}$，也可以表示为 $S=\{x\mid x^2-9=0\}$．

设 A,B 为两个集合，凡是 $a\in A$ 都有 $a\in B$，则称 A 是 B 的子集，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，读作"A 包含于 B"(或"B 包含 A")．例如 $\mathbf{N}\subset\mathbf{Q},\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$(亦可写作 $\mathbf{N}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$)．若 $A\subset B$ 且 $A\supset B$，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$；若 $A\subset B$，且 $A\neq B$，则称 A 为 B 的真子集．并规定：任何 A 都有 $\varnothing\subset A$.

集合的运算有三种：并、交、差．

设有两个集合 A,B，由至少属于其中一个集合的元素的全体构成的集合，称为 A 与 B 的**并集**，记为 $A\cup B$，即有

* 在国家标准中规定，自然数的集合，$\{0,1,2,\cdots\}$ 用 $\mathbf{N}$ 表示，$\mathbf{N}^+$ 表示正整数的集合．其中 $\mathbf{Z}$ 是整数集．

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

它是由属于 A 或属于 B 的所有元素构成的集合.

同时属于 A,B 的元素的全体构成的集合,称为 A 与 B 的**交集**,记为 $A\cap B$,即有

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

若 $A\cap B\neq\varnothing$,称 A 与 B 相交;若 $A\cap B=\varnothing$,称 A 与 B 不相交.

由属于 A 但不属于 B 的元素构成的集合,称为 A 与 B 的**差集**,记为 $A\backslash B$,即有

$$A\backslash B = \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\}.$$

特别地,若 $B\subset A$,则称差 $A\backslash B$ 为 B 关于 A 的**余(或补)集**,记为 $\complement_A B$. 一般我们所讨论的问题是在一个大的集合 X(称为基本集或全集)中进行,所考虑的其他集合 A 均为 X 的子集,此时称 $X\backslash A$ 为 A 的余集,记为 $\complement A$(或 A^C).

在数集中,区间和邻域是常用的概念.

设 a,b 都是实数,则满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的集合称为以 a,b 为端点的**开区间**,记为

$$(a,b) = \{x \mid a < x < b\};$$

满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合称为以 a,b 为端点的**闭区间**,记为

$$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\};$$

满足不等式 $a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$ 的所有实数 x 的集合称为以 a,b 为端点的**半开半闭区间**,记为

$$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\},[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}.$$

用绝对值表示的实数集

$$\{x \mid |x-a| < \delta,\delta > 0\}$$

称为点 a 的邻域,它等价于 $a-\delta<x<a+\delta$,即以 a 为中心,长度为 2δ 的开区间 $(a-\delta,a+\delta)$. 实数集

$$\{x \mid 0 < |x-a| < \delta,\delta > 0\}$$

称为 a 的**去心邻域**.

实数的绝对值还满足以下基本性质:

设 a,b 为两个任意实数,则有

(1)若 $|a|\leqslant b$,则 $-b\leqslant a\leqslant b$;反之亦然.

(2)$||a|-|b||\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

(3)$|ab|=|a||b|$.

(4)若 $b\neq0$,则 $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$.

作为练习,我们把证明留给读者.

集合的运算满足下面的基本性质.

定理 1.1.1 设 A,B,C 为三个任意集合,则有

(1)交换律 $A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$.

(2)结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3)分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(4)幂等律　$A\cup A=A, A\cap A=A$.

(5)吸收律　$A\cup\varnothing=A, A\cap\varnothing=\varnothing$.

$A\cup B=B, A\cap B=A$(当 $A\subset B$ 时)；

$A\cup(A\cap B)=A, A\cap(A\cup B)=A$.

证　仅以分配律中第一式为例，说明集合等式的证明方法，其余类推．

设 $x\in(A\cup B)\cap C$，由交的定义，$x\in A\cup B$ 且 $x\in C$. 再按并的定义，$x\in A$ 且 $x\in C$，或 $x\in B$ 且 $x\in C$. 这就是说 $x\in A\cap C$ 或 $x\in B\cap C$，即 $x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$. 这就证明了 $(A\cup B)\cap C\subset(A\cap C)\cup(B\cap C)$，类似可证明相反的包含关系，于是有等式成立．

下面的等式通常称为**对偶原理**，它可将已经证明的关于集合的某种性质转移到它的余集上去．

定理 1.1.2　设 X 为基本集，A,B 为它的两个子集，则

(1) $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$.

(2) $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

也就是说，两个集合的并的余集等于它们的余集的交，两个集合交的余集等于它们余集的并．

证明留给读者．集合的并与交的定义和对偶原理才可以推广到有限和无限多个集合的场合，读者可作为练习自行完成．

若 A,B 是两个集合，且 $x\in A, y\in B$，它们组成一个有序对 (x,y)，将这样的有序对作为新的元素，它们全体组成的集合称为集合 A 与 B 的**笛卡儿**(Descartes)**乘积集合**(**或直积**)，记为 $A\times B$，即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A \text{ 且 } y\in B\}.$$

例如，设 $A=[0,1]B=[-1,1]$，则 $A\times B$ 就表示平面上以 $(0,-1),(1,-1),(1,1),(0,1)$ 为顶点的长方形，而 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 表示的是平面笛卡儿直角坐标系(这也是“笛卡儿乘积集合”一词的由来)，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记为 R^2.

读者不妨举一反三地推知由更多集合构成笛卡儿乘积集合的情况．

1.1.2　实数系的连续性

人类对数的认识是从自然数开始的．对于我们来说，自然数序列是已知的，并不需要从哲学的观点来讨论这些抽象的事物(数)究竟属于怎样的范畴．对于数学工作者和任何与数打交道的人来说，重要的是要知道一些规则或定律，根据这些规则或定律可将一些自然数组合起来而得到另一些自然数．例如，任意两个自然数 m 与 n，其和 $m+n$ 与积 mn 必定还是自然数，但对它们的逆运算——减法与除法，在自然数集合中并不总是可能的．也就是说，自然数集合对加法与乘法运算是封闭的，而对于减法和除法运算是不封闭的．

当数系由自然数集合扩充到整数集合后，关于加法、减法与乘法都封闭了，即对于任意两个整数 $p,q\in\mathbf{Z}, p\pm q\in\mathbf{Z}, pq\in\mathbf{Z}$. 但是，整数集 $\mathbf{Z}$ 关于除法是不封闭的．因此，数系又从整数集 $\mathbf{Z}$ 扩充到有理* 数集 $\mathbf{Q}=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{q}{p}, p\in\mathbf{N}^+, q\in\mathbf{Z}\right\}$. 显然，有理数集 $\mathbf{Q}$ 关于加法、减法、乘法和除法($p\neq 0$)的四则运算都是封闭的，也就是说，在有理数集内，一切有理运算(加法、减法、乘法和除法，除数

* “有理(rational)”一词，在这里不是指合理或合乎逻辑的意思，而是从“比(ration)”一词派生出来的，即关于两个量的比.

不为零)都能够实行,而得到的仍然为有理数.因此,这个特性称为有理数关于有理运算的**封闭性**.

有理数的另一个特性是它的**稠密性**.即任意两个有理数之间必存在一个有理数.例如,设 a, b 为两个不同的有理数,显然$\frac{a+b}{2}$就是介于 a 与 b 之间的有理数.所以任意两个有理数之间存在着另外的无穷多个有理数.我们把一条规定了原点和单位长度的有向直线称为**坐标轴**.有了坐标轴,就可以使有理数与坐标轴上的点对应起来.任何有理数$\frac{q}{p}$都能在坐标轴上得到一个对应点.这种与有理数相对应的点,称为有理点.有理数的稠密性反映在坐标轴上,就是任何两个有理点之间必定存在着另外的无穷多个有理点.所以有理点在坐标轴上的分布是处处稠密的.虽然有理数是稠密的,但是,作为用数来建立度量的理论基础,有理数是不够的.两个量,如果其比是有理数,则称为是**可通约**的,因为可将它们表示为某同一单位的整数倍.早在公元前五或六世纪,希腊的数学家和哲学家就有着重大和深远的发现,即存在一些量,这些量同给定的单位是**不可通约**的.特别是,存在一些线段,这些线段不是给定单位的有理数倍.我们可以给出一个例子.

各边为单位长度的正方形之对角线 l. 它的长度的平方应为 2. 所以如果 l 是有理数,应等于$\frac{q}{p}$,这里 p,q 均为正整数.所以有 $p^2=2q^2$. 我们可以约定 p 和 q 是互质的.根据上述方程,p^2 是偶数,因此 p 本身必是偶数,比如说,$p=2p'$. 又以此可得 $4p'^2=2q^2$,即 $q^2=2p'^2$. 因此,q^2 是偶数,于是 q 本身也是偶数,表明 p 和 q 二者具有公因子 2,这与我们所作的 p 和 q 没有公因子的约定相矛盾.这一矛盾是由假设对角线长度能表示为有理数$\frac{q}{p}$引起的.这一用反证法推导的例子表明$\sqrt{2}$不能对应任何有理数*.事实上,不可通约的量在某种意义上远比可通约的量更为普遍.

由于有理数对于几何学来说是不够的,所以必须创造新的数作为不可通约的量的度量,这些新的数称为**无理数**.有理数与无理数统称为**实数**,实数布满了整个坐标轴(因此坐标轴也称为实数轴).也就是说实数轴上的每一个点对应着一个有理数或无理数,并且全体实数所服从的算术运算法则同于有理数.后来,直到 19 世纪,人们才感到有必要来证明这样的假设,而在戴德金(Dedeking)的"Nature and Meaning of Number"(数的性质和意义)"中得以完满实现.所以,实数系对于科学度量来说是一种谐调和完备的工具,且在实数系中,有理数的运算法则仍然有效.人们把实数的连续或完备性,又称为实数连续统.

1.1.3 确界与确界存在定理

实数集的完备性是实数的最基本属性之一,极限理论必须建立在此基础上.由有理数的稠密性知道,对于实数轴上的任意点 P,都可以用有理点来任意地接近它,并且可以达到任何精确的程度(P 点也可以不是有理点).换句话说,任何无理点均可用有理数列来逼近.例如,$\sqrt{2}$的不足近似值构成的有理数列

$$1.4,1.41,1.414,1.414\,2,\cdots$$

* 另一著名的例子是 π——圆的周长与直径之比.这一证明要复杂得多,直到近代才由兰伯特(Lambert,1761)解决.

任意逼近无理数$\sqrt{2}$. 今后，我们就说$\sqrt{2}$是该数列的极限(极限的严格定义见节 1.2). 这就说明，有理数列的极限未必是有理数. 也就是说，有理数集关于极限运算是不封闭的，这与有理数集不具有完备性是有关的. 为了说明该问题，下面介绍实数集的确界的概念以及刻画实数集完备性的确界存在定理.

下面我们所讨论的实数集 $\mathbf{R}$ 的各种子集简称为数集. 为了表达上的方便，引入几个记号："$\exists$"表示"存在"或"有"；"$\forall$"表示"对于任意给定的"或"对于每一个". "$P\Rightarrow Q$"表示命题"若 P 则 Q"(或"P 蕴含 Q"，或"P 是 Q 的充分条件"，或"Q 是 P 的必要条件")；"$P\Leftrightarrow Q$"表示命题"P 当且仅当 Q"(或"P 等价于 Q"，或"P 的充分必要条件是 Q"). 例如

$$A\subset B\Leftrightarrow \forall x\in A,\text{有 } x\in B;$$

$$A\not\subset B\Leftrightarrow \exists x\in A,\text{使得 } x\notin B.$$

定义 1.1.1　设 S 是一个非空数集，若

$$\exists M\in \mathbf{R},\text{使得 } \forall x\in S,\text{都有 } x\leqslant M,$$

则称 S **有上界**(**或上有界**)，并称 M 为 S 的一个上界. 若 S 的上界 M 也属于 S，则称它为 S 的**最大数**，记为 $M=\max S$；若

$$\exists m\in \mathbf{R},\text{使得 } \forall x\in S,\text{都有 } x\geqslant m,$$

则称 S **有下界**(**或下有界**)并称 m 为 S 的一个下界. 若 S 的下界 m 也属于 S，则称它为 S 的**最小数**，记为 $m=\min S$. 若 S 既有上界也有下界，则称 S 有界，否则称 S 无界.

显然，当数集 S 为非空有限数集时，即 S 只含有有限多个数时，$\max S$ 和 $\min S$ 均存在，且 $\max S$ 就是这有限多个数中的最大者，$\min S$ 就是这有限多个数中的最小者. 但是当 S 是无限集时，$\max S$ 和 $\min S$ 就有可能不存在.

由定义 1.1.1 易知：

(1) S 有界$\Leftrightarrow \exists M\in\mathbf{R}, M>0$，使得 $\forall x\in S$，都有 $|x|\leqslant M$；

(2) 有上界(下界)数集的上界(下界)不是唯一的.

例 1.1.1　$S=\{x\mid x>0\}$是既无上界又无最小数的数集. 实际上，若不然，假定 M 是它的最大限度数，但存在 $x=2M\in S$，并有 $x>M$，这与假设矛盾. 其次，假定有 $m=\min S$，且 $m>0$，但有 $0<\frac{m}{2}\in S$，且$\frac{m}{2}<m$，故与 m 为最小数矛盾，故 S 中无最小数.

例 1.1.2　$S=\{x\mid x=\sin t, -\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\}$是一个有界数集，$M=1$ 是它的一个上界，$m=-1$ 是它的一个下界，并且任何大于 1 的数也都是它的上界，任何小于 -1 的数也都是它的下界.

又如，$S=\{x\mid 0<x<1\}$，显然它的下界 $m=0$，上界为 $M=1$，故是有界集合. 易证 S 既无最大数，也无最小数. 但是不属于数集 S 的两个数 0 与 1 具有如下性质：数集 S 中无小于 0 的数，而当任意给定一个正数 ε 时，总有小于 $0+\varepsilon$ 的数；同时，数集 S 中无大于 1 的数，而对任意给定一个正数 ε 之后，总有大于 $1-\varepsilon$ 的数，即 0 与 1 分别是数集 S 的最大下界与最小上界. 于是，我们有：

定义 1.1.2　设 S 是一个非空数集，且 $S\subset\mathbf{R}$. 若存在这样的实数 β 满足：

(1) $\forall x\in S$，都有 $x\leqslant\beta$；