高考纵横

陈振宣 杨象富 主编

数学总复习新指南

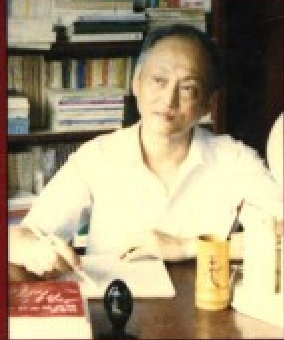
知情篇

基础篇

能力篇

上海远东出版社

世纪出版



陈振宣 杭州市人，大学本科毕业。1981年被评为上海市先进教师，1994年被中国管理科学研究院思维科学研究所评为研究员。

已出版著作40余部，发表论文百余篇，其中代表作《培养数学思维能力的探索》被列入《上海教育丛书》。

杨象富 浙江宁海人，1981年被评为浙江省特级教师，1989年被授予中国数学奥林匹克高级教练称号。曾受聘参加全国高考和全国高中数学联赛命题工作。

已发表教研论文百余篇（多篇获省市一等奖），已出版著作40余部，其中《杨象富数学教学经验》由苏步青教授题字。

ISBN 7-80706-210-X

9 787807 062103 >

www.ewen.cc

定价：28.00元

上架建议：高考专题

高考纵横

数学总复习新指南

陈振宣 杨象富 主编

上海远東出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考纵横:数学总复习新指南/陈振宣,杨象富主编.
上海:上海远东出版社,2006
ISBN 7-80706-210-X

Ⅰ.高... Ⅱ.①陈...②杨... Ⅲ.数学课-高中-
升学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 021532 号

责任编辑:丁是玲 储成连
装帧设计:王月琴

高考纵横 数学总复习新指南

主编:陈振宣、杨象富

出版:上海世纪出版股份有限公司远东出版社
地址:中国上海市仙霞路 357 号
邮编:200336
网址:www.ydbook.com
发行:新华书店上海发行所 上海远东出版社
制版:南京理工出版信息技术有限公司

印刷:上海市印刷二厂
装订:张行装订厂
版次:2006 年 7 月第 1 版
印次:2006 年 7 月第 1 次印刷
开本:787 × 1092 1/16
字数:430 千字
印张:21.5
印数:1—8000

ISBN 7—80706—210—X/G·586 定价:28.00 元

前　　言

两位五六十年如一日、潜心教学与研究的老教师，指导十余位有出色实绩的在职特级、高级教师，经历一整年的酝酿和六个月的紧张写作，终成此书.

舐犊情深.无"黄婆卖瓜"之意，坦陈本书有三大特色：

一、"知情篇"大胆而有创新，有深意

高考的作用，除了"选拔"就是"指向".正确的"指向"不必保密，近年多位权威专家的有关文章受到师生的欢迎，有很好的积极作用.破除考题的神秘感，让师生适当"知情"，使学生从没完没了的被动解题，到学会自己发现问题、自己编创问题，这不但可减轻负担，还一定能提高学习的兴趣和信心，提高研究、创新能力.

二、"基础篇"既精又简，以少御多

理想的高复用书应该高素质、高效率.本书选材精中求简，返璞归真，以少御多，以简御繁，突出重点，抓住关键，化解难点，力求能实用、收实效.每章的能力测试题，至精至简，少则五六题，至多十题，可供考前"热身"之用.

三、"能力篇"丰富深刻，求真务实

为应对高考的"能力立意"（出活题，考能力），本书"能力篇"的内容约为同类书的 3～10 倍.作者为此付出了极大的心力，顾及能力的各个方面，除了对重要数学思想方法的提炼，更有十分丰富、多姿多彩的生动范例，分析自然精到，解法别具一格，读者心领神会，一定能大大提高解题能力.

《国家（上海）中长期科学技术发展规划纲要》公布，创新思维提到前所未有的高度，将促使高考命题改革进入快车道，不但考演绎、推理，同时考类比、归纳等合情推理，为学生搭建了创新思维的平台，让考生自由地思考去发现问题、发现规律，并对自己的发现作出科学的论证，题海战术正在失去优势.

如何适应新形势的需要，这是我们高考复习中必须面对的问题.窃以为是否应抓住构建思维能力空间的"三基"：(1)数学知识和语言的理解与应用；(2)领悟数学思维方法的精神实质；(3)注意情感智力的培养与调控.这些是数学的精髓，大概也是我们编写这本"高考纵横"所想达到的目的.限于我们的水平，敬请广大读者与专家指正，以利再版改进.

除主编外参加编写的还有：王永利（副教授），闻炘威、柴盛榍、胡庆彪（以上均为特级教师），贝跃敏、潘亚奎、项宁、张晓方、陈永箴、张莉萍、严正、范人伊（以上均为高级教师）.

陈振宣　杨象富

目 录
Contents

第0篇 知 情 篇

第1篇 基 础 篇

第2篇 能 力 篇

第0篇

知情篇

$\sqrt{a+b+c+d}$

提 要：

“知彼知己，百战不殆”．备考如备战，为改变高负担、低效率、无边题海的局面，迎考师生应该学习一点数学习题的理论，了解一些高考试题的编拟意图和过程．

本篇收录的两文，点面结合，为读者提供资深学者的精彩论述和权威命题专家已公开的“秘密”，意在使你的复习亲切、主动、更有效。

一、追忆一份全国高考数学卷的编拟过程

《孙子兵法》“谋攻”篇的结语是：

“知彼知己，百战不殆；不知彼而知己，一胜一负；不知彼不知己，每战必殆.”

备考如备战.对正在复习迎考的师生来说，“知彼”就是把握高考的全面要求，甚至了解高考试题的编拟意图和过程.近几年已有多位命题成员在书刊上发表“高考题编拟说明”之类的文章.这是“高考说明”（大纲）的具体化，值得复习迎考师生认真体会.

本文由曾经参加过全国高考命题的中学老师代表，追忆当年的命题经历和试题编拟的具体过程，并根据考生实际得分统计数据，提出复习迎考应注意的事项.

高考命题学科组一般由三方面人员组成：著名大学的教授、资深中学教师和人民教育出版社编审.

高考命题，责任重于泰山.命题组首先学习有关指示，如“两个有利”（选拔和教改），“遵守考纲，取信于民”，“有利稳定、坚持改革”以及“公平、公正”等，对前一年的高考情况也进行了分析.

在集中命题的数十个日夜，全组精诚团结，以极端负责的精神，严肃严密严格的作风，进行创造性的工作.对全卷结构、试题编拟、字句标点，都认真对待.许多重要内容都书写在大黑板上，大家反复推敲斟酌.为使评分公平、公正，我们对各种解法（有的试题提供了四种解法）的得分点细密到1分.

下面介绍某年共26道试题编拟的具体过程，想来会对高三师生的复习应考有所启发.

（一）先难后易，首先花最大心力编定解答题的后三题

高考的首要、直接功能是“选拔”，为把考生拉开档次，让数学素质真正好的学生获得高分，命题组总会在编创若干“压轴题”（一般为新颖综合题）上花最大的心力，使压轴题新而不怪，活而不偏，综合但不繁琐，重在考查能力.

当年，国家考试中心尚未建成“题库”，我们是从已征得的几十道较好的题中，选出三道，再经过精心改编、反复推敲，逐步把第24、25、26题先确定下来.

例如，正式确定下来的理科第24题（文科第25题）为：

设$a \geqslant 0$，在复数集$\mathbf{C}$中解方程$z^2+2|z|=a$.

此题特别简明、柔和、漂亮，对考生既熟悉又陌生，入口很宽而区分度很高."参考解答"中提供的四种解法都不难想到，但不同水平、不同能力的考生的得分会各不相同.要得满分很不容易，不但要有复数与解方程等基础知识和基本技能，更要有较强的综合分析、特别是分类讨论的能力.这道貌不惊人的题，按全国统计(1/1 000 大样本等距离抽样)，难度为理科 0.37，文科 0.19，被认为是"考基础、考能力"的好题.

本题的"原型"是一道常见的成题，即

在复数范围内解方程 $z^2+3|z|+2=0$.

如果不作改动，作为压轴题之一显然不够"资格".我们的第一次变动是把常数项 2 改为实参数 a，于是有"变题"：

设 $a\in\mathbf{R}$，在复数集 $\mathbf{C}$ 中解方程 $z^2+3|z|+a=0$.

出乎意料的是，这一小小的改变(仅变常数 2 为实参数 a)，竟使难度大大增加.动手似乎不难(如先设 $z=x+y\mathrm{i}$)，但以下对 x、y 和 a 讨论起来就不易理清头绪，而且当 $a\geqslant 0$ 和 $a<0$ 时的情况很类同.为了在保证能力要求的前提下，削减机械重复和减轻计算，最后限定 $a\geqslant 0$，并把 $|z|$ 的系数由 3 改为 2(最后拟定如上述理科第 24 题).

当年理科第 25 题(文科第 26 题)的原型是：

设椭圆的中心是坐标原点，长轴在 x 轴上，离心率 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，椭圆过定点 $\left(-\sqrt{3},\ -\dfrac{1}{2}\right)$. 求已知点 $P\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$ 到椭圆上的点的最远距离.

此题流传很广，难度也不大，不宜作为压轴题的第二题.经过商量，命题组按"广义逆命题"的概念，把部分已知条件与结论作适当的调换和变动("改题"的常用手法之一)，得到一个比较理想、既面熟又新颖、能力要求较高的好题，正式作为理科第 25 题(文科第 26 题)：

设椭圆的中心是坐标原点，长轴在 x 轴上，离心率 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，已知点 $P\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$ 到这个椭圆上的点的最远距离是 $\sqrt{7}$. 求这个椭圆的方程，并求椭圆上到点 P 的距离等于 $\sqrt{7}$ 的点的坐标.

此题获得广大教师和专家的较好评价，多种报刊还发表过对问题作深入讨论的文章.按全国统计，此题的难度为理科 0.22，文科 0.12(对文科过难了).

当年命题的主要失误在理科的最后一题(即第 26 题)，其原型是广东省那年的一道高考题(当时，中山大学两位数学教授与全国命题组有分有合，相互通气)：

设 $f(x)=\lg\dfrac{1+2^x+4^x\cdot a}{3}$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1) 如果 $0<a\leqslant 1$，求证：当 $x\neq 0$ 时，有 $2f(x)<f(2x)$；

(2) 如果当 $x\in(-\infty,\ 1]$ 时 $f(x)$ 有意义，求 a 的取值范围.

我们把广东省的试题推向一般化，把特殊值 3 换作任意自然数 n，"数学味"更浓了，要求自然也高了，就出现：

(26) 设 $f(x)=\dfrac{1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^x\cdot a}{n}$，其中 a 是实数，n 是任意给定的自然数且 $n\geqslant 2$.

(1) 如果 $f(x)$ 当 $x\in(-\infty,\ 1]$ 时有意义，求 a 的取值范围；

(2) 如果 $a \in (0, 1]$,证明 $2f(x) < f(2x)$ 当 $x \neq 0$ 时成立.

这样,就不但考查对数函数、指数函数和不等式的知识,要用到数学归纳法或作较复杂的变形,要求考生有综合运用有关知识、方法解决问题的能力. 由于该题难度偏大,加上全卷题量偏多,绝大多数考生未能完成本题,难度达惊人的 0.05,此题形同虚设. 当年某报对此题有"难得残酷"的批评,是值得吸取的教训. 如果把这题用作全国高中联赛二试试题,可能是适当的好题.

(二) 按"重点内容重点考查"的要求,编拟解答题的前三题

在确定"压轴题"之后,按高考大纲规定的重点要求,我们把解答题前三题的内容确定为:

第 21 题,考查数列知识和方程思想;

第 22 题,考查三角知识和运算变形能力;

第 23 题,考查立体几何的空间想象和论证能力.

为了引导学生重视课本(苏步青教授在 1987 年接见作者时曾强调,要让中学生先把课本搞得"烂熟"),并使考生在开始作解答题时有较好的心情,第 21 题(文理相同)就直接选自课本的复习题(为突出主要要求,还把数据作了简化),正式的试题是:

(21) 有四个数,其中前三个成等差数列,后三个成等比数列,并且第一个数与第四个数的和是 16,第二个数与第三个数的和是 12,求这四个数.

应该说这是"源于课本低于课本"、难度中下的试题,但全国的统计表明,此题的难度为理科 0.76(4 人中有 1 人未得分),文科 0.66(3 人中有 1 人未得分). 作者当年巡视某个省级重点中学的考试现场时,还发现能够仅设一个未知数很快得到方程 $x^2 - 13x + 36 = 0$ 的是极少数,多数考生设了二个、三个甚至四个未知数,花了过多的宝贵时间. 这也说明,苏老提出的"烂熟"课本的建议,是很中肯的. 这是既减轻学习负担,又提高数学素质的切实措施之一.

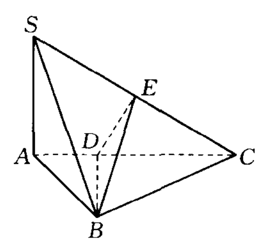
文理科的第 22 题也是同一的,即

(22) 已知 $\sin\alpha + \sin\beta = \dfrac{1}{4}$, $\cos\alpha + \cos\beta = \dfrac{1}{3}$, 求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值.

课本上有类似的题,解题的入口处很宽,"参考解答"提供了三种解法,思路各异,繁简有别,但难度均属中等. 很遗憾,从考试得分所反映的难度为理科 0.63,文科 0.48,这说明"落实"两字仍是复习迎考中十分值得关注的.

按惯例,我们在解答题中安排了一道有中等难度的立体几何题,即

(23) 如图,在三棱锥 $S\text{-}ABC$ 中,$SA \perp$ 底面 ABC, $AB \perp BC$, DE 垂直平分 SC,且分别交 AC、SC 于 D、E,又 $SA = AB$, $SB = BC$. 求以 BD 为棱、以 BDE 与 BDC 为面的二面角的度数.



"先证后算",参考解答提供了两种解法,当然还可有"以算代证"等其他思路,并且都是很基本、很常规的"通法". 可惜考生的实际得分偏低,难度为理科 0.48,文科 0.26(相当于 4 人中仅有 1 人得分),这说明立体几何仍是很薄弱的部分.

(三) 全面考查"三基",选拟精巧的客观题

基础知识、基本技能和基本的思想方法是有机的整体. 当年的考试内容,按课本(乙种本)包括代数(三角)、立体几何和平面解析几何三科,共 13 章,35 大节,合计 120 小节. 我们细致分析了这 120 小节中所包含的"三基",除了已在六道解答题中有所涉及的之外,对尚未覆盖的重要内容尽量在客观题中给予体现.

客观题有独特的训练和考查的功能,在高考试卷中占有"半壁江山"(约一半分数). 解客观题的要求是"准、快、巧",争取多得分,也为求解解答题留下较多的时间. 但从当年几道较为新颖、灵活的客观题的得分看来,有关的训练尚待加强. 例如:

(4) (理科)方程 $\sin 2x=\sin x$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 内的解的个数是(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

数形结合,在 $(0, 2\pi)$ 内作 $y=\sin 2x$ 与 $y=\sin x$ 的图像,易选 C. 但当年得分反映的难度为 0.52,即有一半的考生未能选对.

理科(9)即文科(11)　设全集 $I=\{(x, y)\mid x, y\in\mathbf{R}\}$,集合 $M=\left\{(x, y)\,\middle|\,\dfrac{y-3}{x-2}=1\right\}$, $N=\{(x, y)\mid y\neq x+1\}$,那么 $\overline{M\cup N}$ 等于(　　).

A. $\varnothing$　　B. $\{(2, 3)\}$

C. $(2, 3)$　　D. $\{(x, y)\mid y=x+1\}$

等价转换,注意到 $\overline{M\cup N}=\overline{M}\cap\overline{N}$,并结合方程的图像,不难选 B,但难度为理科 0.64,文科 0.46.

理科(10)　如果实数 x、y 满足 $(x-2)^2+y^2=3$,那么 $\dfrac{y}{x}$ 的最大值是(　　).

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\sqrt{3}$

本题当年曾受到数学教师和专家比较广泛的好评. 设 $\dfrac{y}{x}=k$,则当直线 $y=kx$ 为已知圆的切线时,容易知道 $k_{最大}=\sqrt{3}$,即应选 D,但难度为 0.59.

把上述选择题改为填空题,即为文科第 20 题,难度竟为 0.27.

把立体几何与组合计算相结合,在当年算是新型题:

理科(14)　以一个正方体的顶点为顶点的四面体共有(　　).

A. 70 个　　B. 64 个　　C. 58 个　　D. 52 个

文科(15)　以一个正三棱柱的顶点为顶点的四面体共有(　　).

A. 6 个　　B. 12 个　　C. 18 个　　D. 30 个

正确的答案是理科选 C,文科选 B,难度为理科 0.51,文科 0.47.

很多年过去了,一切都在"与时偕行". 但"历史的经验值得注意",特别是怎样使学生由单纯解题到也能够发现问题、提出问题,怎样做到既减轻过重负担又提高能力和素质,值得我们深入持久地探讨.

二、从“提出问题”到高考题的编拟例说

为什么数学高考就是考解题？怎样才能有效提高解题能力？数学题又是怎样产生的？这些问题一定是复习迎考师生很关切的根本性问题，本文将提供一些资料供读者参考.

（一）什么叫问题？为什么“提出问题”很重要？

《牛津大词典》注释“问题”(problem)为：

“这是指那种并非可以立即求解或较为困难的问题(question)，那种需要探索、思考和讨论的问题，那种需要积极思维活动的问题.”

1988年召开的第六届国际数学教育大会的一份报告同样指出：“一个(数学)问题是一个对人具有智力挑战特征的，没有现成的直接方法、程序或算法的未解决的情境.”

美国数学家哈尔莫斯直言，“问题是数学的心脏”，“数学的真正的组成部分是问题和解”.

国际著名数学教育家波利亚强调，“掌握数学就是意味着善于解题”，“中学数学教学首要的任务就是加强解题训练”.

“解题”必先有“问题”. 因此，善于提出有价值有吸引力的好题，就至关重要. 大数学家希尔伯特在1900年巴黎国际数学家代表大会所作著名演讲《数学问题》中强调：“只要一门科学分支能提出大量的问题，它就充满着生命力；而问题缺乏则预示着独立发展的衰亡或中止. 正如人类的每项事业都追求着确定的目标一样，数学研究也需要自己的问题.”希尔伯特把特别有价值的名题比喻为“能为人类生出金蛋的母鸡”.

大科学家爱因斯坦关于“提出问题”有一句名言：“提出一个问题往往比解决一个问题更重要，因为解决一个问题也许是一个数学上的或实验上的技能而已. 而提出的问题，新的可能性，从新的角度去看旧的问题，却需要有创造性的想象力，而且标志着科学的真正进步.”

（二）“提出问题”的一些方法

戴再平教授在《数学习题理论》中，对数学习题的编制列举了七种方法：

1. 演绎法　从一般的真命题或一组条件出发，通过逻辑推理编制习题.

2. 基本量法 基本量是问题系统中独立取值的量，通过给出基本量可编制习题.

3. 倒推法 先给出题目预期的结果，倒推出所需要的条件.

4. 变换条件法 将成题的条件加以变换，从而得到新题. 这种变换可以是等价的，也可作不等价转换(如弱化、强化或逆向).

5. 类比与推广 类比法是通过两个特殊对象的比较来编题. 推广可以是扩大题目的条件中有关对象的范围，或扩大结论的范围.

6. 演变 从一道基本题出发，将条件中的数量或图形(包括位置及形状)加以改变，使之产生一些具有新质的题目.

7. 模型法 数学模型就是实际问题的数学化. 把实际问题经过分析、综合、概括、抽象之后可提炼出数学习题. 常见的数学模型有自然模型、社会模型、经济模型、物理模型和生活游戏模型.

作为对如何“提出问题”的一个可操作性回答，1990 年布朗与沃尔特在《提出问题的艺术》中，提出了“否定假设法”，其步骤是：

(1) 确定出发点，这可以是已知的命题、问题或概念等；

(2) 对所确定的对象进行分析，列举出它的各个“属性”；

(3) 就所列举的属性进行思考：如果这一属性不是这种的话，那它可能是什么？

(4) 根据上述对于各种可能性的分析，提出新的问题；

(5) 对所提出的新问题进行选择.

德国著名数学奥林匹克教练、命题专家恩格尔教授，曾以简明的语言表述他的解题、命题思想：“设想你遇到一个困难问题，你应当把它变成一个容易的问题，先解这个问题，进而得到那个难题的答案. 命题者则通常遵循着相反的路线：从一个容易的问题开始，把它转化为一个较难的问题，把这个问题交给那些解题能手来做.”

(三) 例说高考题的编拟

高考题既不是从天上掉下来的，也不是从地下冒出来的，它不是无本之木、无源之水. 有的是妙手偶得，更多的则是命题专家们集体锤炼的结果. 了解一些高考题的编拟过程，一定会活跃我们的思维，提高解题的信心和能力.

下面我们综述几位学者(有的显然是高考命题成员)有关编题的说明.

1. 以竞赛题为题源

高考与联赛都坚持“能力立意”，而且联赛一试以高考的“大纲”为准，因此高考命题以竞赛题为题源并不少见.

例 1 (2002 年全国高考理科第 16 题)

已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$，那么 $f(1)+f(2)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f(3)+f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f(4)+f\left(\dfrac{1}{4}\right)=$ ________.

题源(1986 年联赛一试第 3 题)