

中等职业学校文化课教学用书

数学教学参考书

(基础版)

第二册

主编 丘维声



高等教育出版社

中等职业学校文化课教学用书

数学教学参考书

(基础版)

第二册

主编 丘维声

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是为中等职业教育国家规划教材《数学(基础版)第二册》编写的教学参考书。内容包括每章的教学要求;每章中每节的教材分析、教学建议和练习的答案;每章复习题的解答。

本书可供中等职业学校和普通高中的数学教师作为教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学教学参考书.第2册:基础版/丘维声主编. —北京:
高等教育出版社,2002.12 (2003 重印)

ISBN 7-04-011106-3

I. 数... II. 丘... III. 数学课—专业学校—教学
参考资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 096744 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网 址	http://www.hep.edu.cn
传 真	010-64014048		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
排 版	高等教育出版社照排中心		
印 刷	北京市联华印刷厂		
开 本	850×1168 1/32	版 次	2002 年 12 月第 1 版
印 张	11.125	印 次	2003 年 4 月第 2 次印刷
字 数	270 000	定 价	14.20 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

前 言

国家规划教材《数学(基础版)第二册》(丘维声主编,高等教育出版社2002年7月出版)对中等职业学校和普通高中的数学教学目标和内容体系以及教学方法作了力度较大的改革,为了帮助教师把握和用好新教材,我们现在对这些改革作扼要介绍,在各章的教材分析中进一步作了详细阐述.

把向量列为中等学校(包括中等职业学校和普通高中,以后同此约定)的数学教学内容,已经有好几年了.如何正确地、通俗易懂地讲授向量的知识?我们在教材中是这么做的:从力、速度、位移等现实世界的量抽象出既有大小又有方向的量,称它为向量.从路标抽象出用带有箭头的线段(即,有向线段)表示向量.从轮船位移的总效果引出向量的加法;从旅客拉行李箱所用的力引出向量的数量乘法.为了简捷地利用数来进行向量的加(减)法和数乘运算,引进了向量的坐标表示,而这需要平面向量分解定理.有了向量的加(减)法和数乘运算就可以解决中点坐标,定比分点坐标公式和平移公式等问题,但是不能解决有关度量(即长度,距离,角度,垂直等)问题.为此需要引进向量的内积的概念.这就是我们讲授向量知识的内容体系,教师理解了这一内容体系,教学效果就会好.

我们用向量的工具改革平面解析几何的内容体系.

长期以来,平面解析几何的直线部分以斜率为中心,但是有的直线却没有斜率,这不能不是一个遗憾.我们在教材中改成以直线的方向向量为中心,这就使所有的直线都有点向式方程,从而任何两条直线平行或垂直的条件都可用方向向量来表述.我们用点向式给出所有直线的方程,而不用点法式,理由有两点:第一,确定一条直线的最自然的一个方式是知道直线上一个点和直线的方向向量(从已知点出发沿着方向向量的方向往前走,或者往后走就可得到一条直线).如果用点法式,这就要求一个人走路始终与一个方向保持垂直,显然这是难以做到的.第二,空间直线的方程就是点向式方程,如果用点法式,那么得到的不是空间直线,而是平面(因为以一个定点为起点,并且与一个向量垂直的所有向量的终点组成一个平面).在推导所有直线都有点向式方程时,有一种情况:当方向向量 $\mathbf{v}(v_1, v_2)$ 的第二个分量 $v_2 = 0$ 时,得到直线 l 的方程为 $y - y_0 = 0$,为了把此式统一到 $v_2 \neq 0$ 时的直线 l 的方程

$$\frac{y - y_0}{v_2} = \frac{x - x_0}{v_1}, \quad (1)$$

需要约定:当(1)式中某一个分式的分母为零时就表示分子也为零.这种约定可能会使学生感到困惑,因为他们从小学就知道分母不能为零.其实只要把分母不能为零的道理讲清楚就可明白上述约定是有道理的.例如, $3 \times 7 = 21$, 则 $\frac{21}{3} = 7$, $\frac{21}{7} = 3$. 由于对于任意实数 a , 都有 $a \times 0 = 0$, 因此 $\frac{21}{0}$ 是不存在的(因为任何数乘以 0 都不会等于 21);

II

而 $\frac{0}{0} = a$, 其中 a 是任意实数. 这表明, 用 0 做分母时, 或者分数不存在, 或者该分数值不确定 (可以是任意实数), 因此 0 不能做分母. 而在建立直线的点向式方程时, 我们恰恰需要利用 $\frac{0}{0}$ 可以为任意实数值, 得出当 $v_2 = 0$ 时, 约定分子 $y - y_0 = 0$, 从而 (1) 式左端为 $\frac{0}{0}$. 于是 (1) 式右端可取任意实数, 因此 x 可取任意实数, 从而 $y - y_0 = 0$ 是直线 l 的方程, 即纵坐标为 y_0 的所有点 (不管它的横坐标 x 是多少) 恰好组成直线 l .

我们还恰到好处地用向量工具改革立体几何的讲授体系. 在证明立体几何的定理, 或者习题中, 只要是综合法比较简单, 我们就用综合法; 如果用综合法比较繁, 而用向量法比较简单, 我们就用向量法. 这样既培养了学生的空间想像能力和逻辑推理能力, 又使学生能较简洁地解决立体几何问题. 用向量法解决立体几何问题有通法: 根据具体问题选择一个合适的基 e_1, e_2, e_3 (最好是它们两两垂直, 且都是单位向量), 然后把问题中的有关向量都表示成 e_1, e_2, e_3 的线性组合, 进而讨论和解决问题. 我们在教材中, 以及在这本教学参考书的练习题或复习题的解答中, 许多地方都用向量法解决问题, 请读者仔细阅读. 这是阐述用向量法解决立体几何问题的内容比较丰富的著作 (包括教材和这本教学参考书).

我们把排列与组合这一章的内容鲜明地提出这是计数问题, 并且把计数的加法原理改称为分类计数原理, 把计数的乘法原理改称为分步计数原理. 这使学生在遇到

计数问题时,首先分析这个问题是分类计数,还是分步计数,然后决定用加法还是乘法.这样就把本来纷繁复杂的计数问题理出了一个头绪.我们对排列问题与组合问题给出了明确的区分,这使学生遇到计数问题时先分析一下这个问题属于排列问题,还是属于组合问题,然后采用相应的计数公式(排列数公式或者组合数公式)去计算.值得指出的是,当今信息时代离散数学的重要性日益突出,而计数是离散数学的一个重要组成部分.

我们对概率论的讲授体系所作的重要改进在于:认为随机现象中,出现的每一个结果的可能性大小是客观存在的,它可以用一个不超过1的非负实数来刻画,这个数就叫做出现这个结果的概率.随机试验中可能出现的每一个结果叫做一个样本点.如果随机试验的样本点只有有限多个,那么随机事件 A 的概率规定为 A 中各个样本点的概率之和.在整个概率与统计初步这一章中,我们始终抓住了随机事件的概念.可以说对随机事件作了两次抽象:第一次是把离散样本空间 Ω 中的随机事件等同于 Ω 的子集;第二次是引进了随机变量的概念,从而把握了有关问题的所有随机事件.

除了内容体系的改革外,我们认为数学教学目标不仅是传授数学的基础知识和基本方法,还要培养数学的思维方式.数学的思维方式是科学的思维方式,它对于学生的持续发展起着比单纯知识更为重要的作用.一个人如果具有科学的思维方式,那么他不论从事何种工作都能把该工作做好.什么是数学的思维方式?观察客观现象,从中抓住主要特征,抽象出概念或者建立模型;运用

直觉判断或者归纳、类比、联想进行探索,作出猜测;然后进行深入分析和逻辑推理,揭示事物的内在规律,从而使纷繁复杂的现象变得井然有序;运用所得结论到实际问题中,解决实际问题,并且检验和发展理论.这样一种思维方式不仅对于学习数学,进行数学的科学研究工作至关重要,而且对于从事任何一种工作都有益处,从而可以使学生终身受益.

我们在教材中很注意通俗易懂地讲道理.我们认为学习数学必须把道理弄明白才能学好.死记硬背,套题型做题,是学不好数学的.我们还认为讲道理对于提高人的素质起着重要作用.有些数学内容的道理对于中等学校的学生可能不太容易懂,我们在教材中只用一句话“可以证明……”或“可以说明……”,让学生知道这里是需要讲道理的.有些道理在教材中没有写出,我们把它们写在这本教学参考书上,供教师们阅读.

《数学教学参考书(基础版)第二册》由丘维声任主编,全书由丘维声编写.丘维敦参加了第11章概率与统计初步的练习和复习题解答的编写工作.

作者感谢高等教育出版社的张华、邵勇、郭思旭、高尚华等同志为本书的编辑出版付出的辛勤劳动.

欢迎广大读者提出宝贵意见.

丘维声

于北京大学数学科学学院

2002年11月

目 录

第7章 向量	1
I 教学要求	1
II 教材分析、教学建议和练习的答案	1
7.1 向量的概念和向量的几何表示	4
7.2 向量的加法与减法	6
7.3 数乘向量	11
7.4 与一个非零向量共线的向量	17
7.5 平面向量分解定理	20
7.6 平面向量的直角坐标·用坐标作向量的运算	22
7.7 平面向量的坐标与点的坐标的关系	26
7.8 线段的中点坐标公式和定比分点坐标公式	28
7.9 平移公式	31
7.10 向量的内积的定义和基本性质	36
7.11 用直角坐标计算向量的内积	40
III 复习题七的解答	43
第8章 平面解析几何	53
I 教学要求	53
II 教材分析、教学建议和练习的答案	54
8.1 直线的点向式方程	57
8.2 直线的斜率	62
8.3 直线方程的点斜式和斜截式	65
8.4 直线方程的一般式	66
8.5 平面上两条直线的位置关系	71
8.6 平面上两条直线垂直的条件	76
8.7 平面上两条直线的夹角	78
8.8 点到直线的距离	83

8.9	二元一次不等式表示的平面区域	85
8.10	圆的方程	89
8.11	圆与直线的位置关系	95
8.12	椭圆的标准方程	100
8.13	椭圆的性质	104
8.14	双曲线的标准方程	112
8.15	双曲线的性质	114
8.16	抛物线的标准方程	126
8.17	抛物线的性质	129
* 8.18	极坐标、直线和二次曲线的极坐标方程	136
III	复习题八的解答	145
第9章	立体几何	170
I	教学要求	170
II	教材分析、教学建议和练习的答案	171
9.1	平面的性质与确定	176
9.2	空间向量及其运算	179
9.3	两条直线的位置关系	182
9.4	直线和平面的位置关系	184
9.5	两个平面的位置关系	186
9.6	空间向量分解定理	189
9.7	空间向量的内积、两条直线所成的角	192
9.8	直线与平面垂直、点到平面的距离	202
9.9	三垂线定理、直线和平面所成的角	208
9.10	二面角、平面与平面垂直	212
* 9.11	两条异面直线的距离	218
* 9.12	多面体	221
* 9.13	棱柱	223
* 9.14	棱锥	226
* 9.15	圆柱、圆锥与圆台	229
* 9.16	球	230
III	复习题九的解答	232
第10章	排列与组合	246

I 教学要求	246
II 教材分析、教学建议和练习的答案	246
10.1 分类计数原理与分步计数原理	247
10.2 排列	249
10.3 组合	250
10.4 组合数的两个性质	252
10.5 较复杂的计数问题举例	254
10.6 二项式定理	255
III 复习题十的解答	260
第 11 章 概率与统计初步	264
I 教学要求	264
II 教材分析、教学建议和练习的答案	265
11.1 随机事件及其概率	271
11.2 古典概率模型	276
11.3 每次试验只有两个可能结果的 n 次独立重复试验模型	280
11.4 离散型随机变量和它的概率分布	287
* 11.5 离散型随机变量的期望值和方差	291
* 11.6 正态分布	296
* 11.7 统计估计	299
* 11.8 线性回归	304
III 复习题十一的解答	308
* 第 12 章 复数	313
I 教学要求	313
II 教材分析、教学建议和练习的答案	313
* 12.1 复数的概念	314
* 12.2 复数的运算	316
* 12.3 判别式小于 0 的实系数一元二次方程的根	322
* 12.4 复平面	324
* 12.5 复数的向量表示	325
* 12.6 复数的三角形形式	328
* 12.7 复数三角形形式的乘法与除法	332
* 12.8 复数的指数形式	335

* 12.9 n 次单位根	337
III 复习题十二的解答	338

第7章 向 量

I 教学要求

1. 理解向量的概念.理解向量组共线,不共线的概念,掌握向量的加法、减法与数乘向量的运算.

2. 理解与一个非零向量共线的向量的条件.了解轴上向量的坐标的概念.

3. 理解平面向量分解定理.了解平面的基的概念和向量在这个基下的坐标的概念.理解平面向量的直角坐标的概念.掌握用坐标进行向量的加法、减法与数乘运算.掌握向量的坐标与点的坐标之间的关系.

4. 掌握线段的中点坐标公式.了解线段的定比分点公式.掌握平移公式.

5. 理解向量的内积的概念及其基本性质.掌握用直角坐标计算向量的内积的公式.会利用向量的内积计算向量的长度,两个非零向量的夹角,判断两个向量是否垂直.掌握两点间的距离公式.

II 教材分析、教学建议和练习的答案

向量是中学数学里新增加的内容.为什么在中学数学里要学习向量?首先,客观世界中存在既有大小又有方向的量,例如,速度,加速度,力,位移等.因此需要有研究这种量的统一的数学模型——向量.其次,由于向量兼有直观性强,又易于计算这两方面的优点,因此在许多数学分支中都利用向量这一模型,或者借助向量的语

言.例如,平移是平面上(或空间里)每一个点都按照同一个方向移动相同的距离,这完全可以由一个向量 a 来决定: a 的方向表示移动方向, a 的大小表示移动的距离.又如,一条直线可以看成是由一个点和一个方向决定的,向量正好可以用来描述直线的方向,从而可以利用向量的工具来研究解析几何里有关直线和平面的问题.再如,研究线性方程组的解的情况和解的结构时,借助向量的语言,把一个 n 元有序数组 (a_1, a_2, \dots, a_n) 称为 n 维向量,这样就可以把研究线性方程组的解的情况和解的结构问题,归纳为研究 n 维向量空间的子空间的结构问题,使本来是代数的问题“几何化”,使之直观、易懂.

本章主要讲向量的概念,向量的表示,向量的运算以及向量的内积.

向量是既有大小又有方向的量.

向量有两种表示方式:(1)几何表示.用有向线段 \overrightarrow{AB} 表示一个向量 a ,长度相等并且方向相同的有向线段表示相等的向量.(2)坐标表示.在讲了向量的加法与数乘运算后,可以得到平面向量分解定理.进而引进向量的坐标的概念.向量的这两种表示使得向量兼有直观性强,又易于计算两方面的优点,从而使向量非常有用.例如,求线段的中点,求直线的方程以及两条直线平行的条件(后者在第8章将介绍)等.

向量有加法、减法以及数乘运算,它们统称为向量的线性运算.有两种方式进行向量的线性运算.(1)用有向线段进行运算.向量的加法有三角形法则,对于不共线的两个向量的加法还有平行四边形法则.向量的减法通过加法来定义: $a - b \stackrel{\text{def}}{=} a + (-b)$.数乘向量分别对其长度,方向作出规定.(2)用坐标进行运算.两个向量的和(差)的坐标等于它们的坐标的和(差).实数 k 与向量 a 的乘积的坐标等于 k 乘以 a 的坐标.向量的加法与数乘运算满足8条运算法则.这8条运算法则使得在向量的线性运算中可以使用实数运算的去括号,合并同类项,移项等法则.

向量的内积使得可以利用向量统一地研究有关长度、角度、垂直等度量问题. 向量的内积的定义是

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle.$$

向量的内积有 4 条基本性质: 对称性, 两条线性性, 正定性. 向量的内积不是向量集合上的代数运算, 因此不宜把向量内积的 4 条基本性质说成运算律. 利用直角坐标可以很容易计算两个向量 $\mathbf{a}(a_1, a_2), \mathbf{b}(b_1, b_2)$ 的内积:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

利用向量的内积可以计算向量的长度、两点间的距离、两个非零向量的夹角, 判断两个向量是否垂直, 从而可以利用向量的内积研究两条直线垂直的条件、两条直线的夹角、点到直线的距离(这些在第 8 章将介绍)等.

本章的重点是: 向量的几何表示(用有向线段表示向量); 向量的加法、减法、数乘运算; 平面向量的直角坐标; 用坐标作向量的线性运算; 平面向量的坐标与点的坐标的关系; 线段的中点坐标公式; 平移公式; 向量的内积的概念; 向量的内积的 4 条基本性质; 用直角坐标计算向量的内积; 两点间距离公式; 两个向量是否垂直的判定.

本章的难点是: 向量的减法运算; 与一个非零向量共线的向量的条件; 平面向量分解定理; 向量的内积的概念; 向量内积的线性性.

学好本章的关键是: 要从客观世界中的现实问题抽象出概念; 要理解基本概念; 要掌握基本结论. 不要把力气花在用向量重新解决初中平面几何的定理上.

本章教学时间约需 14 课时, 具体分配如下(供参考):

7.1	向量的概念和向量的几何表示	1 课时
7.2	向量的加法与减法	2 课时
7.3	数乘向量	1 课时
7.4	与一个非零向量共线的向量	1 课时

7.5	平面向量分解定理	1 课时
7.6	平面向量的直角坐标·用坐标作向量的运算	1 课时
7.7	平面向量的坐标与点的坐标的关系	1 课时
7.8	线段的中点坐标公式和定比分点坐标公式	1 课时
7.9	平移公式	1 课时
7.10	向量的内积的定义和基本性质	1.5 课时
7.11	用直角坐标计算向量的内积	1.5 课时
	小结和复习	1 课时

7.1 向量的概念和向量的几何表示

1. 向量是既有大小又有方向的量. 有向线段是带有一个箭头的线段, 其中箭头的指向表示了它的方向. 从而我们可以用有向线段来直观地表示向量. 这是向量的几何表示. 今后我们把有向线段 \overrightarrow{AB} 表示的向量就叫做向量 \overrightarrow{AB} .

由于向量只有大小和方向两个要素, 因此很自然地把大小相等且方向相同的向量叫做相等的向量. 从而长度相等并且方向相同的有向线段表示的向量是相等的向量. 例如, 把有向线段 \overrightarrow{AB} 平行移动得到 \overrightarrow{CD} , 由于它们的长度相等且方向相同, 因此向量 \overrightarrow{AB} 与向量 \overrightarrow{CD} 相等. 注意, 作为向量, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. 但是作为有向线段, \overrightarrow{AB} 与 \overrightarrow{CD} 显然是不同的有向线段. 因此本书是注意区分向量与有向线段这两个不同概念的, 不要混为一谈. 每一条有向线段是一个向量 (因为有向线段也是既有大小又有方向的量). 一个向量 a 可以用一条有向线段 \overrightarrow{AB} 来表示, 并且与 \overrightarrow{AB} 长度相等并且方向相同的有向线段都可以表示向量 a . 因此一个向量 a 在几何上对应于由长度相等 (都等于 a 的大小) 且方向相同 (都表示 a 的方向) 的所有有向线段组成的一个集合. 这个集合里的任何一条有向线段都可以作为向量 a 的一个代表.

2. 一组向量如果用同一起点的有向线段表示后, 这些有向线段在同一条直线上. 则称这组向量是共线的. 在大学教材和现代数

学文献中,都使用“共线的向量”这一术语,不用“平行的向量”这一说法.

3. 例2中,与向量 \overrightarrow{AD} 共线的非零向量有:它自身,以及与其方向相同的,或相反的向量.按这样的思路去从平行四边形 $ABCD$ 中寻找.注意不在边上添加新的点.

练习的答案

A 组

1. 不相同

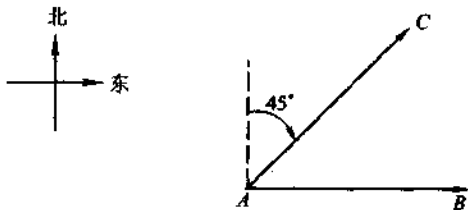


图 7-1

2. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$; $-\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CD}$.

3. 与向量 \overrightarrow{BD} 共线的非零向量有

$$\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}.$$

4. 是. 因为 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, 所以 $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$, 并且 \overrightarrow{AD} 与 \overrightarrow{BC} 的方向相同, 从而 $AD \parallel BC$. 于是四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

B 组

1. $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EO} = \overrightarrow{FA}$,

$$-\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AF}.$$

2. 与向量 \overrightarrow{OB} 共线的非零向量有

$$\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{EO}, \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{BO}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{BE}.$$