广东省教育厅教育科学“十五”规划课题

数学教育的

理论•问题•策略

SHUXUE JIAOYU DE
LILUN WENTI CELUE

刘朝晖 著

广东高等教育出版社

广东省教育厅教育科学“十五”规划课题

数学教育的
理论·问题·策略

刘朝晖 著

广东高等教育出版社
·广州·

图书在版编目（CIP）数据

数学教育的理论·问题·策略/刘朝晖著. —广州：广东高等教育出版社，2005.11
ISBN 7-5361-3269-7

Ⅰ.数...　Ⅱ.刘...　Ⅲ.数学课-教学研究-中小学
Ⅳ.G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 133775 号

出版发行	广东高等教育出版社出版发行
	地址：广州市天河区林和西横路
	邮政编码：510500　电话：(020)87557232
印　　刷	佛山市浩文彩色印刷有限公司
开　　本	890 毫米×1 240 毫米　1/32
印　　张	11.375 印张
字　　数	305 千字
版　　次	2005 年 11 月第 1 版
印　　次	2005 年 11 月第 1 次印刷
定　　价	18.00 元

前　　言

《数学教育的理论·问题·策略》是作者承担的广东省教育厅教育科学"十五"规划项目——"数学素质教育的一般理想理论与实践"的课题成果之一。

20世纪90年代以来，不论是数学观，还是数学教育观都已经发生了重大变革。前者表现为数学哲学的兴起，尤其是以英国学者欧内斯特为代表的把数学看作是社会建构的哲学观点；后者表现为数学教育改革运动的持续和深入，尤其是我国国家数学课程标准的研制和颁布。沿着这些研究及其思想，几年来，作者在如何认识数学，特别是从教育的角度如何认识数学的文化价值，如何把数学看作是一种学生的主动建构，数学教育到底要追求什么，数学教育怎样一改死板、机械和令人生畏的面孔等等方面做了一系列的研究和实践，并深深认识到有必要做一总结和提升，一是就教于志士同仁，二是愿意在把新的数学观和国家数学课程标准所追求的理念引进基础数学教育研究和实践方面做一尝试，以期能有一定的丰富数学教育理论和指导数学教育的实践。

本书密切关注教育思想、教育理论和数学教育的新发展、新取向和新趋势，及其对中小学数学教育的具体指导，并从广阔的视角——数学哲学、数学文化学、文化学、社会学等方面来审视数学教育，力图跳出就教育论教育的狭隘框架。

任何一门学科的研究和教学，都必须重视和包括对学科本质的认识。但长期以来，和其他学科教育一样，数学教育研究主要集中于如何教学和具体操作方面，却忽视了对数学本质的研究，即数学到底是什么。因而在数学教育中也就基本上不考虑数学观

的教育及培养。所以，虽然当今对数学的认识已经发生了根本性的变化，但在许多数学教师及学生眼中，数学是狭隘的，不是计算，就是解题，就是公式、定理等等，最多也是套用一句现成语："是关于数量关系和空间形式的一门科学。"这些对数学陈旧而片面的认识，限制了数学教育的视野、思维、目的以及教学方式，从而把数学教育变成了工具教育，淡化甚至抹杀了数学的素质教育意义。

基于这样的认识，本书强调数学教育理论及其数学教育必须建立在现代数学观之上。所以第一章就开门见山地提出了什么是数学的问题，并从三个维度——数学的发展、数学与文化的关系、数学在人类生活中的意义，展示和论述了数学的本质，揭示出数学的本质在于：

（1）数学是一门纯粹科学；

（2）数学是一门应用科学；

（3）数学是决策与行动的工具，是描述世界的语言；

（4）数学是一门艺术；

（5）数学是人类的一种创造性活动，是一种可误的社会建构；

（6）数学是一种很好的教育。

在此基础上，本书重新审视了数学与人的素质发展的关系。不论是从数学本身来看，还是从课程的本质来看，我们不仅要重视数学的科学教育价值，还应当重视数学的文化教育价值，看到数学及其数学教育在人的发展中独特的教育价值。其独特的教育价值在于：第一，提高人的基本素质，如理性、客观、公正、独创性、追求完美等等；第二，提高人的思维素质，如严谨、富有逻辑、具有一定的思想方法等等。数学教育首先是一种人的教育，其次才是一种工具教育。把数学教育看作是人的教育，就必须首先把数学看作是一种文化体系，用它来培育人的理性、精神

及其价值观，和其他学科的教育结合起来，培养和谐而理性的人。

在对数学及其数学教育重新认识的基础上，本书从课程建构到教学方式、从学生思维的培养到数学学习的研究等，进行了全力的探索和研究，试图提出一些自己的理论见解和解决问题的对策。在这个过程中，作者得到了广东高等教育出版社领导及其同仁的有力支持，使我能够较为静心地进行写作。但由于自身资历有限，时间有限，致使本书还是错误难免。好在本书的目的是探讨，片面的乃至不当的观点，敬请各位读者批评指正。

本书参考了大量文献，虽然在后面有所罗列，但的确是挂一漏万，在此一并致谢。

作者

2005 年 6 月

目 录

第一章 数学与教育 ………………………………………… (1)
第一节 什么是数学 ………………………………………… (1)
第二节 数学的特性 ………………………………………… (21)
第三节 数学教育与学生素质的发展 ……………………… (28)
第二章 数学教育的发展与改革历程 …………………… (58)
第一节 古代数学教育 ……………………………………… (58)
第二节 近代西方数学教育的革命 ………………………… (70)
第三节 现代数学教育改革运动 …………………………… (77)
第三章 我国当前数学教育的基本理念及其对策 ……… (97)
第一节 实施素质教育 ……………………………………… (97)
第二节 加强课程内容与学生实际的联系 ……………… (104)
第三节 以学生为主体，改变数学学习方式 …………… (108)
第四节 改进数学教学评价 ……………………………… (113)
第四章 数学课程与教学的建构 ……………………… (118)
第一节 数学课程与教学改革应注意的几个问题 ……… (118)
第二节 关于数学课程与教材的思想性建设 …………… (125)
第五章 数学学习中的认知结构 ……………………… (155)
第一节 认知结构论及其主要理论 ……………………… (155)
第二节 知识结构和认知结构 …………………………… (167)
第三节 良好数学认知结构的建立 ……………………… (173)
第六章 数学教学的重要方式：数学活动 …………… (185)
第一节 数学活动及数学活动教学 ……………………… (185)
第二节 数学活动教学的意义 …………………………… (192)

第三节　数学活动教学的心理学依据 …………………… (198)
第七章　数学教学的重要方式：游戏教学 ………………… (214)
第一节　数学游戏与数学游戏教学 ……………………… (214)
第二节　数学游戏教学的意义及目的 …………………… (221)
第三节　进行数学游戏教学的基本原则和方法 ……… (231)
第四节　当前数学游戏教学中存在的问题及其对策
………………………………………………………… (237)
第八章　学生数学思维能力的培养 …………………… (241)
第一节　关于数学思维能力的概述 …………………… (242)
第二节　教学中思维能力的培养和发展 ……………… (257)
第三节　数学学习中的常见思维策略 ………………… (265)
第九章　数学概念教学 …………………………………… (272)
第一节　数学概念及数学概念教学 …………………… (272)
第二节　数学概念之间的关系 ………………………… (277)
第三节　数学概念教学的问题及策略 ………………… (280)
第四节　数学概念的学习方式 ………………………… (293)
第十章　数与计算教学 …………………………………… (300)
第一节　数与计算的涵义 ……………………………… (300)
第二节　数与计算教学的改革 ………………………… (307)
第三节　数与计算教学的内容 ………………………… (313)
第四节　计算教学的问题与策略 ……………………… (317)
第十一章　应用题的教学 ………………………………… (330)
第一节　应用题教学概述 ……………………………… (330)
第二节　当前影响应用题教学的原因及对策 ………… (333)
第三节　解题步骤的教学 ……………………………… (346)

第一章 数学与教育

在我们的学科教育的研究中，关于学科观的问题可以说是研究意识最薄弱的环节之一。比如什么是语文，什么是数学，什么是政治等等方面的研究简直是凤毛麟角。正因为如此，我们学了几年乃至十几年，甚至教了十几年、几十年的书，我们可能还不知道什么是数学，什么是语文。当被问到时，大部分人都会发怔，才意识到这是一个问题。而他们的最终回答也是根据自己所学的知识的一种最感性，也是最片面的概括。所以，我们有必要开篇即涉及什么是数学、数学的教育意义到底何在这类问题。

第一节 什么是数学

一、从教育的角度认识数学的意义

提起数学，人们可能很快就会想到：噢，很高深、很抽象的一门学问啊，没有绝顶的聪明，别想拿它当职业。或是想，数学就是一大堆计算、符号、公式、定理等等嘛，对一般的人来说，只要能学到应付日常生活的知识就足够了，如果想升学，数学当然要学好一点，因为，它是必考科目嘛。或是说，数学，我看学了也没什么用，我不知道学数学有什么意义。问文科大学生“数学是什么”，比较普遍的回答有如下几种：

“数学就是数字、公式、定理的集合”；

“数学是研究一切与数有关的学科”；

"数学是人类了解世界的途径之一";

"数学是关于数字及数字的各种组合规律，并试图用数字去解释世界的一门学科";

"数学是研究数量与空间形式关系的一门学科"。

这些想法在我们身边是普遍存在，也是不足为怪的。因为很长一段时间以来，我们对数学的认识、对数学教育的认识，的确是停留在数学是一种工具，是升学的必考科目上的。对数学所谓的科学定义也只是：数学是"研究现实世界的空间形式和数量关系的科学……数学的理论往往具有非常抽象的形式，但它同时也是现实世界空间形式和数量关系的深刻反映，因此可以广泛地应用到自然科学和技术的各个部门，对人类认识自然和改造自然，起着重要的作用"①。可见如何认识数学与对数学意义的理解是直接联系在一起的，而这两者又直接关系到数学教育的导向。

数学在学校教育中是一门非常重要的学科，特别是在基础教育阶段是最重要的学科之一。如果我们片面理解数学，就不能全面准确地理解数学的意义，由此我们的数学教育也就可能是残缺的。因此，我们有必要再次认识数学和数学的意义。

如何认识数学，如何看待数学，它直接影响到人们数学观的建立，而数学观又直接地影响到数学教育观。例如，如果人们认为数学是关于空间形式和数量关系的科学，是对真实现象的准确描述，那么就会形成一种数学是科学的本质的绝对主义数学观，以为数学只有为科学服务时才是有用的。持这样一种数学观，即认为数学是不可误的客观知识，它不必承担任何社会责任，那么就会使一部分学生不喜欢数学，消极参与和疏远数学文化。如果人们认为人类事务的关系，比如社会和政治价值的沟通、数学在

① 《辞海缩印本》，1 473 页，上海，上海辞书出版社，1980。

财富和权利分配方面的作用等，都与数学本体无关，那么在数学教育中，老师就会忽视价值观、科学观、伦理观、态度、习惯等的教育。而且，就会让学生死记硬背概念、公式、定理、法则，因为他们认为这是可靠的、确定的、不容置疑的。

如果人们认为数学是一种文化体系，就会形成一种可误主义数学观，即数学是一种可误的社会建构，它是可纠正的、可修正的、可更改的。① 这种数学观认为，数学是一个探究和认识的过程，是人类不断创造和发明的广阔领域，是不会终结的产物。持如此动态的数学观，对教育的影响举足轻重：数学教育的目的不再仅仅是教学命定的数学知识和培养应用的能力，还应该包括使学生获得自我创造数学知识的能力，包括对数学的潜在价值，如科学价值、文化价值做出深入分析。数学教育还应该和学生的生活、文化、经验等结合起来。因此，正如荷西（Hersh，1979）所说："问题并不在于数学的最好方式是什么，而在于数学到底是什么……如果不正视数学的本质问题，便解决不了关于教学上的争议。"桑姆普森（Thompson，1975）的研究结果表明："教师专业数学思想的形成与他们表达数学内容的典型方式存在着一致性，这有力地说明了教师的数学观、数学信仰和爱好的确影响着他们的教学活动。"

二、多方面理解数学

什么是数学？为了全面地理解它，把握它的丰富的本质，我们可以从三个方面来认识它：第一，数学的发展；第二，数学与文化的关系；第三，数学的意义和作用。

① 张维忠：《数学、文化和数学课程》，上海，上海教育出版社，1999。

（一）数学的发展

为了既说明问题，又能节省篇幅，我们在这里只用数学的三次危机来认识数学的面目。

1. *第一次数学危机——无理数的发现*

无理数，顾名思义，与有理数相对，那就是不能表示为整数或两整数之比的实数，比如$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{7}$，π 等等。如果不作数学计算，在实际生活中，我们是不会碰到这些数的，无论是度量长度、重量，还是计时。第一个被发现的无理数是$\sqrt{2}$。当时，毕达哥拉斯学派的一个名叫希帕索斯的学生，在研究 1 和 2 的比例中项时（若 $1:x=x:2$，那么 x 叫 1 和 2 的比例中项），怎么也想不出这个比例中项的值。后来，他画一边长为 1 的正方形，设对角线为 x，于是 $X^2=1^2+1^2=2$。他想，x 代表对角线长，而 $X^2=2$，那么 x 必定是确定的数。但它是整数还是分数呢？显然，2 是 1^2 和 2^2 之间的数，因而 X 应是 1 和 2 之间的数，因而不是整数。那么 x 会不会是分数呢？毕达哥拉斯学派用归谬法证明了这个数不是有理数，它就是无理数$\sqrt{2}$。无理数的发现，对以整数为基础的毕达哥拉斯哲学，是一次致命的打击，以至于有一段时间，他们费了很大的精力，将此事保密，不准外传，并且将希帕索斯本人也扔到大海中淹死了。但是，人们很快发现了$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{7}$等更多的无理数，随着时间的推移，无理数的存在已成为人所共知的事实。

无理数的发现导致了毕达哥拉斯悖论，这一悖论直接触犯了该学派的根本信条，导致了当时认识上的“危机”，从而产生了第一次数学危机。

这次数学危机对古希腊的数学观点有极大冲击。这表明，几何学的某些真理与算术无关，几何量不能完全由整数及其比来表示，反之整数却可以用几何量表示出来，整数的权威地位开始动

摇，而几何学的身份升高了。危机也表明，直觉和经验不一定靠得住，推理证明才是可靠的。从此希腊人开始重视演绎推理，并由此建立了几何公理体系，这不能不说是数学思想上的一次巨大革命。

2. *第二次数学危机——无穷小是零吗?*

18 世纪，微积分思想的建立，使得常量数学（代数、几何、三角、数论）等在内容上得到了极大的丰富，在思想方法上发生了深刻的变化。微积分的产生，为用数学描述物质世界的运动和变化过程提供了强有力的工具。微分法和积分法在生产和实践上都有了广泛而成功的应用，如物理学、工程学、天文学、航海学等都充分地运用到它们。大部分数学家对这一理论的可靠性是毫不怀疑的。

1734 年，英国哲学家、大主教贝克莱（Bekeley，1685—1753）发表《分析学家，或者向一个不信正教数学家的进言》，将矛头指向微积分的基础——无穷小的问题，提出了所谓贝克莱悖论。他指出：说无穷小量不是零，然后又让它等于零，违背了矛盾律。无穷小量究竟是不是零？无穷小及其分析是否合理？由此而引起了数学界甚至哲学界长达一个半世纪的争论，导致了数学史上的第二次数学危机。

18 世纪的数学思想的确是不严密的，直观地强调形式的计算而不管基础的可靠。其中特别是：没有清楚的无穷小概念，从而导数、微分、积分等概念也不清楚，无穷大概念不清楚，发散级数求和的任意性，符号的不严格使用，不考虑连续就进行微分，不考虑导数及积分的存在性以及函数可否展成幂级数等等。

直到 19 世纪 20 年代，一些数学家才比较关注于微积分的严格基础。从波尔查诺、阿贝尔、柯西、狄里赫利等人的工作开始，到威尔斯特拉斯、戴德金和康托的工作结束，中间经历了半个多世纪，基本上解决了矛盾，为数学分析奠定了严格的基础。

3. 第三次数学危机——悖论的产生

数学史上的第三次危机，是由1897年的突然冲击而出现的，到现在，从整体来看，还没有解决到令人满意的程度。这次危机是由于在康托的一般集合理论的边缘发现悖论造成的。由于集合概念已经渗透到众多的数学分支，并且实际上集合论成了数学的基础，因此集合论中悖论的发现自然地引起了对数学的整个基本结构的有效性的怀疑。

1897年，福尔蒂揭示了集合论中的第一个悖论。两年后，康托发现了很相似的悖论。1902年，罗素又发现了一个悖论，它除了涉及集合概念本身外不涉及别的概念。罗素悖论曾被以多种形式通俗化。其中最著名的是罗素于1919年提出的，它涉及某村理发师的困境。理发师宣布了这样一条原则：他给所有不给自己刮脸的人刮脸，并且，只给村里这样的人刮脸。当人们试图回答下列疑问时，就认识到了这种情况的悖论性质："理发师是否自己给自己刮脸?"如果他不给自己刮脸，那么他按原则就该为自己刮脸；如果他给自己刮脸，那么他就不符合他的原则。

罗素悖论使整个数学大厦动摇了。无怪乎弗雷格在收到罗素的信之后，在他刚要出版的《算术的基本法则》第2卷末尾写道："一位科学家不会碰到比这更难堪的事情了，即在工作完成之时，它的基础垮掉了，当这本书等待印出的时候，罗素先生的一封信把我置于这种境地。"于是终结了近12年的刻苦钻研。

承认无穷集合，承认无穷基数，就好像一切灾难都出来了，这就是第三次数学危机的实质。尽管悖论可以消除，矛盾可以解决，然而数学的确定性却在一步一步地丧失。现代公理集合论的大堆公理，简直难说孰真孰假，可是又不能把它们都消除掉，它们跟整个数学是血肉相连的。所以，第三次危机表面上解决了，实质上却更深刻地以其他形式延续着。

从数学三次危机的发展可见，人们对数学本质特征的认识在

不断变化和深化。的确，19 世纪以前，人们普遍认为数学是一门自然科学、经验科学，因为那时的数学与现实之间的联系非常密切。随着数学研究的不断深入，从 19 世纪中叶以后，数学是一门演绎科学的观点逐渐占据主导地位。这种观点在布尔巴基学派的研究中得到发展，他们认为数学是研究结构的科学，一切数学都建立在代数结构、序结构和拓扑结构这三种母结构之上。与这种观点相对应，从古希腊的柏拉图开始，许多人认为数学是研究模式的学问，数学家怀特海（A. N. Whitehead，1861—1947）在《数学与善》中说，"数学的本质特征就是：在从模式化的个体作抽象的过程中对模式进行研究，数学对于理解模式和分析模式之间的关系，是最强有力的技术。" 1931 年，歌德尔（K. Godel，1906—1978）不完全性定理的证明，宣告了公理化逻辑演绎系统中存在的缺憾，这样，人们又想到了数学是经验科学的观点，著名数学家冯·诺伊曼就认为，数学兼有演绎科学和经验科学两种特性。他们都从一个侧面反映了数学的本质特征，为我们全面认识数学的性质提供了一个视角。

（二）数学与文化的关系

对数学的认识，仅仅限于对数学本身或数学史的研究是不全面的，有些问题也无法解释，如为什么数学在某些历史时期异常的繁荣，数学思想如群星层出不穷，一片光辉灿烂？为什么在某些历史时期却处于停滞、萧条的状态，犹如秋天的树林落寞、寂寥？推动数学发展的动力是什么？数学发展的规律是什么？为什么在人类历史上存在有多种不同的数学传统，如以古代中国为代表的东方数学是算法体系，以古代希腊为代表的西方数学是演绎体系？为什么说在现代社会，"一个国家的科技发展水平完全可以用它所消耗的数学来度量"？数学家都是数学天才吗？数学及数学教育在 20 世纪 80 年代以前，基本上是在数学内容和逻辑体系的发展方面做深入研究。随着数学本身的深入发展和数学教育

在经历了20世纪60年代的新数学运动、70年代的回到基础的运动、80年代的问题解决等运动后，人们回过头来开始追问："什么是数学?""为什么要进行数学教育?""什么是数学学习活动的本质?"等等。要回答这些问题，就必须从社会历史、文化传统以及数学的意义和作用等方面来探究。只有这样，我们对数学的认识才能做到不仅"知其然"，还"知其所以然"，以达到对数学的真知。如果说数学教育哲学代表了更为深刻的理论思考，那么关于数学及数学家的社会—文化研究就可以说是为我们深入认识数学、理解数学的本质和深入开展数学教育的研究提供了一个新的、更为广阔的文化视角：不能把数学等同于数学知识的简单汇集和堆砌，而应把数学看成是人类的一种创造性的社会活动。从而，除事实性结论外，我们也就应当把"问题"、"语言"、"方法"、"传统"等同样看成是数学的重要组成部分。同样，数学教育也是人类活动的有机组成部分，是教育不可或缺的重要部分。所以，我们要从社会—文化的宏观角度去对数学作出新的分析，重建数学教育观。

下面我们拟从数学与文学、数学与语言、数学与艺术等方面来考察数学与文化的关系。

1. 数学和文学

(1) 数学和文学的思考方法往往是相通的。举例来说，数学课程里有"对称"，文学中则有"对仗"。对称是一种变换，变过去了却有些性质保持不变。轴对称，即是依对称轴对折，图形的形状和大小都保持不变。那么对仗是什么？无非是上联变成下联，但是字、词、句的某些特性不变。王维诗云："明月松间照，清泉石上流。"这里，"明月"对"清泉"，都是自然景物，没有变。形容词"明"对"清"，名词"月"对"泉"，词性不变。其余各词均如此。变化中的不变性质，在文化中、文学中、数学中，都广泛存在着。数学中的对偶理论、拓扑学的变与不

变，都是这种思想的体现。文学意境也有和数学观念相通的地方。徐利治先生早就指出：“孤帆远影碧空尽”，正是极限概念的意境。

我国古代诗词和对联是华夏文明的重要组成部分，是文学的瑰宝。在文学这个百花园中，有些诗和对联同数学时有联姻，把数字嵌入诗、联之中。如：

一去二三里，烟村四五家，

亭台六七座，八九十枝花。

这是宋代邵雍描写一路景物的诗，共20个字，把10个数字全用上了。这首诗用数字反映远近、村落、亭台和花，通俗自然，脍炙人口。

一片二片三四片，五片六片七八片。

九片十片无数片，飞入梅中都不见。

这是明代林和靖写的一首雪梅诗，全诗用表示雪花片数的数量词写成。读后就好像身临雪境，飞下的雪片由少到多，飞入梅林，就难分是雪花还是梅花了。

西汉时，司马相如告别妻子卓文君，离开成都去长安求取功名，时隔五年，不写家书，心有休妻之念。后来，他写了一封难为卓文君的信，送往成都。卓文君接到信后，拆开一看，只见写着“一二三四五六七八九十百千万”十三个数学。才思敏捷的她按司马相如指定的数目字，立即回写了一首如诉如泣的抒情诗：

一别之后，二地悬念。只说是三四月，又谁知五六年。七弦琴无心弹，八行书无可传。九连环从中折断。十里长亭眼望穿，百思想，千思念，万般无奈把郎怨。万语千言说不完，百无聊赖十倚栏。重九登高看孤雁，八月中秋月不圆。七月半烧香秉烛问苍天，六月天人人摇扇我心寒。五月石榴如火，偏遇阵阵冷雨浇花端。四月枇杷还未黄，我欲对镜心意儿乱。急匆匆，三月桃花