小学数学奥林匹克丛书

张君达 主编

五年级
下册

3 + 1 4 5 2 6 −

机械工业出版社

ISBN 7-11[redacted]

ISBN 7-111-02585-7

9 787111 025856 >

定 价: 6.00元

小学数学奥林匹克丛书

五 年 级 下 册

张君达　主编
王进明　徐风梧　编

机 械 工 业 出 版 社

内容简要

本书是数学奥林匹克学校（小学部）教材，主要内容有分数比较大小、数的整除、带余除法、辗转相除法、最大公约数和最小公倍数及分解质因数的应用、裂项法、分数与小数的互化等，各讲都配有一定数量的例题和练习题，有阶段自测题，并附有答案。

本书具有篇幅短小，讲解细致，通俗易懂，深入浅出，适合学生的知识水平和接受能力等特点，有助于学生扩大视野，开拓思路，训练思维，提高分析问题和解决问题的能力。

本书适合于小学五年级学生课外自学、家长辅导，小学数学教师在课堂中开发学生智力参考；也可供各地小学数学课外活动（站）组作辅导教材，以及为国内外各种小学数学竞赛参考。

小学数学奥林匹克丛书
五 年 级 下 册
张君达 主编
王进明 徐凤梧 编
（重排本）

责任编辑 黄瑞芬 责任校对 孙志筠
封面设计 方 芬 版式设计 霍永明
责任印制 路 琳

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）
（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）
济南新华印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行·新华书店经售
*
开本 787×1092 1/32·印张 4·字数 86 千字
1996年11月第1版 第11次印刷
印数 197 721—200 720·定价：6.00元
*
ISBN 7-111-02585-7/G·146

前　言

奥林匹克运动起源于古希腊（公元前776年），这是力量、灵活与美的竞赛。“数学是思维的体操”，解数学难题的竞赛同样被称为数学奥林匹克。

1959年罗马尼亚向东欧七国倡议举办中学生参加的“国际数学竞赛”以后每一年举行一次，参加国逐渐增多，这便是沿袭至今的“国际中学生数学奥林匹克”。

1956年在我国北京、上海等地开始举办省、市级的高中数学竞赛，1978年开始举行全国性高中数学竞赛；1983年开始举行全国性初中数学竞赛；1986年开始举行全国性小学数学竞赛。同时，我国中、小学生还参加了其他国家举办的一些数学竞赛的通讯比赛。1986年我国第一次正式派出国家代表队参加了华沙举行的第27届国际中学生数学竞赛，并取得团体总分第四名的成绩。

多年的数学竞赛实践证明，广泛与深入地开展小学数学课外活动，科学与合理地举办各级数学竞赛是促进数学教育发展，提高青少年数学素质的一个有力措施。

北京数学奥林匹克学校（小学部）自1985年4月成立以来，受到了教育部门与家长的大力支持，赢得了社会舆论的赞赏。学校的学生在“华罗庚金杯”少年数学邀请赛、上海“从小爱数学”邀请赛、北京“迎春杯”小学数学竞赛中，获得了较好的成绩。1988年11月北京数学奥林匹克学校（小学部）组建第一支35人代表队参加了美国长岛小学生数

学通讯赛，并取得引人瞩目的成绩。

面临着高难度的国际中、小学生数学竞赛，为使我国学生能在国际竞赛中跻身于世界数学强国之列，我们尤为突出地感到亟须研究与探讨数学竞赛选手的培训方式、教材以及相应的教育手段。

在《小学数学奥林匹克专题讲座》、《小学数学奥林匹克试题与解答》(张君达主编，北京师院出版社出版）出版后，我们陆续收到许多读者来信。为感谢读者对我们工作的信任与支持，为进一步探讨数学业余学校的教材建设问题，在专题讲座和试题与解答两本书的基础上，我们组织北京数学奥林匹克学校（小学部）的全体教练员编写了这套《小学数学奥林匹克丛书》(共八本：三、四、五、六年级各分上、下册两本)。

我们力图使本丛书的内容源于教材、高于教材，寓知识于趣味之中，同时还注意到适合学生的年龄与课余学习的特点。希望这套丛书能为小学数学业余学校和数学课外活动提供选读教材，能成为青少年数学爱好者的良师益友。

由于我们水平有限，教学实践经验不很充足，这套丛书一定会有许多欠缺之处。希望各省、市数学奥林匹克学校教练员和学生们，以及广大的专家、读者批评指正。

张君达

1989年2月8日

目　录

一、最大的分数是哪一个

小学数学课本中，介绍了三种比较两个分数大小的方法。第一种是如果两个分数分母相同，分子大的分数比较大；第二种是如果两个分数分子相同，分母小的分数比较大；第三种是假分数大于真分数。下面我们就利用这些方法来讨论一些与比较分数大小有关的数学问题。

例1 把下列各分数用"<"连接起来。

$$\frac{10}{17} \quad \frac{12}{19} \quad \frac{15}{23} \quad \frac{20}{33} \quad \frac{60}{37}$$

分析： 用符号"<"把上面五个分数连接起来，就是要比较它们的大小，然后按从小到大的顺序排列起来。这五个分数的分母都不相同，要想把它们变成相同的数比较麻烦。再看它们的分子，这五个数虽然也不相同，但要把它们变成相同的数比变分母方便一些。这是因为60正好是20、15、12、10这四个数的倍数，利用分数的基本性质，可以将上面的五个分数变为分子都是60的分数：

$$\frac{10}{17}=\frac{10\times 6}{17\times 6}=\frac{60}{102}；\frac{12}{19}=\frac{12\times 5}{19\times 5}=\frac{60}{95}$$

$$\frac{15}{23}=\frac{15\times 4}{23\times 4}=\frac{60}{92}；\frac{20}{33}=\frac{20\times 3}{33\times 3}=\frac{60}{99}；\frac{60}{37}$$

这五个分数的分子都是60，而分母从小到大的顺序是$37<92<95<99<102$。根据本节一开始所提到的方法二。便有：

$$\frac{60}{102}<\frac{60}{99}<\frac{60}{95}<\frac{60}{92}<\frac{60}{37}$$也就是：

$$\frac{10}{17}<\frac{20}{33}<\frac{12}{19}<\frac{15}{23}<\frac{60}{37}$$

解： $$\frac{10}{17}<\frac{20}{33}<\frac{12}{19}<\frac{15}{23}<\frac{60}{37}$$

例2　　比较$\frac{22222221}{22222223}$和$\frac{33333331}{33333334}$的大小。

分析： 这两个分数的分子和分母都不相同，而且都是真分数，本节开始提到的三种比较两个分数大小的三种方法直接用都用不上。下面我们看看能否采取和例 1 相同的方法，通过一些转变把它们变成分子或分母相同的形式后，再比较大小。因为：

$$\frac{22222221}{22222223}=\frac{22222221\times33333334}{22222223\times33333334}$$

$$\frac{33333331}{33333334}=\frac{33333331\times22222223}{33333334\times22222223}$$

这两个分数的分母相同（都是33333334×22222223），分子不同。现在来比较这两个分子，我们不采用列竖式直接求积的方法，改用下面的方法。因为$33333334=33333331+3$，$22222223=22222221+2$。所以

$$\begin{aligned}&22222221\times33333334\\&=22222221\times(33333331+3)\\&=22222221\times33333331+22222221\times3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&22222223\times33333331\\&=(22222221+2)\times33333331\\&=22222221\times33333331+33333331\times2\end{aligned}$$

但是22222221×33333331

$= 22222221 \times 33333331$，而

$22222221 \times 3 = 66666663$

$33333331 \times 2 = 66666662$，

$66666663 > 66666662$，也就是：

$22222221 \times 3 > 33333331 \times 2$。再根据如果一个加数相同，另一个加数大的和也大这个规律，便有$22222221 \times 33333334 > 22222223 \times 33333331$。所以

$$\frac{22222221}{22222223} > \frac{33333331}{33333334}$$

细心的同学不难看出：22222221×33333334与22222223×33333331正好都是一个分数的分母与另一个分数分子的乘积，并且如果含有哪个分子的积大，那么这个分子所组成的分数也大。

一般地说，如果有两个分数$\frac{a}{b}$和$\frac{c}{d}$，当：$ad > bc$时，便有$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$。这是因为：

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{cb}{bd} = \frac{ad - bc}{bd}$$

当$ad > bc$时，$ad - bc > 0$，又$bd > 0$，所以$\frac{ad-bc}{bd} > 0$，故有$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

这一来我们又多了一个比较分数大小的方法。这就是在$\frac{a}{b}$与$\frac{c}{d}$中，如果$ad > bc$。那么：$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

其实这个题还有另一种方法。因为

$$1-\frac{22222221}{22222223}=\frac{2}{22222223} \quad 1-\frac{33333331}{33333334}$$

$=\frac{3}{33333334}$ 另外知道$\frac{2}{22222223}=\frac{6}{66666669}$

$\frac{3}{33333334}=\frac{6}{66666668}$. 当然有：

$$\frac{6}{66666668}>\frac{6}{66666669}$$ 所以

$\frac{3}{33333334}>\frac{2}{22222223}$再根据被减数一定，减数越大差越小的道理，便有：

$$\frac{22222221}{22222223}>\frac{33333331}{33333334}$$

解：$\frac{22222221}{22222223}>\frac{33333331}{33333334}$

例 1 和例 2 告诉我们，除了小学数学课本上介绍的三种比较两个分数大小的方法外，还有一种方法，这便是在分数$\frac{a}{b}$与$\frac{c}{d}$中，如果有$ad>bc$，那么$\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$。另外，当我们无法直接采用前三种方法比较分数大小时，可以采用把分子变成相同的，或把分母变成相同的分数后再用前三种方法判断，还可以把分数与某个数相比较，利用差的大小再判断分数的大小。

例3　比较下列各组中两个分数的大小。

（1）　$\frac{123456789}{234567891}$与$\frac{123456789-1989}{234567891-1989}$

（2）　$\frac{987654321}{876543219}$与$\frac{987654321+1989}{876543219+1989}$

（3） $\dfrac{\overbrace{22\cdots\cdots2}^{1988个2}}{\underbrace{33\cdots\cdots3}_{1989个3}}$与$\dfrac{\overbrace{22\cdots\cdots2}^{1988个2}+\overbrace{11\cdots\cdots1}^{1987个1}}{\underbrace{33\cdots\cdots3}_{1989个3}+\underbrace{11\cdots\cdots1}_{1987个1}}$

（4） $\dfrac{\overbrace{77\cdots\cdots7}^{1989个7}}{\underbrace{55\cdots\cdots5}_{1988个5}}$与$\dfrac{\overbrace{77\cdots\cdots7}^{1989个7}-\overbrace{11\cdots\cdots1}^{1987个1}}{\underbrace{55\cdots\cdots5}_{1988个5}-\underbrace{11\cdots\cdots1}_{1987个1}}$

分析： 先看（1）式。利用例2所介绍的方法寻找解答，因为$123456789-1989=123454800$

$234567891-1989=234565902$。现在比较

123456789×234565902与234567891×123454800谁大？谁小？因为123456789×234565902

$=123456789\times(234567891-1989)$

$=123456789\times234567891-123456789\times1989$

234567891×123454800

$=234567891\times(123456789-1989)$

$=234567891\times123456789-234567891\times1989$

在$234567891\times123456789-234567891\times1989$与$123456789\times234567891-123456789\times1989$中，被减数相同，都是$123456789\times234567891$，而减数不同；$123456789\times1989<234567891\times1989$。根据被减数一定，减数大的差反而小这一事实，所以$123456789\times234565902>234567891\times123454800$.这样一来便有$\dfrac{123456789}{234567891}>\dfrac{123456789-1989}{234567891-1989}$。

这种方法虽然可以判断两个分数的大小，但计算麻烦，暂时不用这种方法讨论（2）、（3）、（4），看看是否有更好

一点的方法。为此我们来讨论一般的情况：比较分数$\frac{a}{b}$与$\frac{a-k}{b-k}$的大小（k是小于a、b的自然数）。

因为$a\times(b-k)=a\times b-a\times k$

$b\times(a-k)=b\times a-b\times k$

这里被减数相同，都是$a\times b$，那么差的大小由减数的大小来定。两个减数分别为$a\times k$与$b\times k$。当$a>b$时，$a\times k>b\times k$，差$a\times b-b\times k>a\times b-a\times k$，那便有

$$\frac{a}{b}<\frac{a-k}{b-k}$$

当$a<b$时，$a\times k<b\times k$，差$a\times b-b\times k<a\times b-a\times k$。那便有：

$$\frac{a}{b}>\frac{a-k}{b-k}$$

这就是说，如果一个分数是真分数，那么这个分数的分子与分母同时减去某个比分子小的自然数k，所得的新分数小于原来的真分数。上面有关（1）式的判断也正好说明了这一点。如果一个分数是假分数，那么这个假分数的分子分母同时减去某个比分母小的自然数k，所得的新分数大于原来的假分数。用字母表示如下：

当$a>b$时，$\frac{a}{b}<\frac{a-k}{b-k}$（$k$是小于$b$的自然数）

当$a<b$时，$\frac{a}{b}>\frac{a-k}{b-k}$（$k$是小于$a$的自然数）

采用同样的方法讨论$\frac{a}{b}$与$\frac{a+k}{b+k}$的大小。因为$a\times(b+k)=a\times b+a\times k$，

$b\times(a+k)=b\times a+b\times k$。

上面两个式子等号后面的两个加数中，有一个相同，都是$a\times b$。这一来和的大小由另一个加数来决定。

当$a>b$时，$a\times k>b\times k$，所以有：

$a\times b+a\times k>a\times b+b\times k$

那么便有：$\frac{a}{b}>\frac{a+k}{b+k}$

当$a<b$时，$a\times k<b\times k$，所以有：

$a\times b+a\times k<a\times b+b\times k$

那么便有：$\frac{a}{b}<\frac{a+k}{b+k}$

这么一来，这类分数比较大小的问题，就变为判断一个分数是真分数还是假分数的问题。下面用这些结论来处理（1）、（2）、（3）、（4）。

解：（1）因为$123456789<234567891$

所以有 $$\frac{123456789}{234567891}>\frac{123456789-1989}{234567891-1989}$$

（2）因为$987654321>876543219$

所以有

$$\frac{987654321}{876543219}>\frac{987654321+1989}{876543219+1989}$$

（3） 因为$\underbrace{22\cdots\cdots2}_{1988个2}<\underbrace{33\cdots\cdots3}_{1989个3}$

所以有 $$\frac{\overbrace{22\cdots\cdots2}^{1988个2}}{\underbrace{33\cdots\cdots3}_{1989个3}}<\frac{\overbrace{22\cdots\cdots2}^{1988个2}+\overbrace{11\cdots\cdots1}^{1987个1}}{\underbrace{33\cdots\cdots3}_{1989个3}+\underbrace{11\cdots\cdots1}_{1987个1}}$$

（4）因为$\overbrace{77\cdots\cdots7}^{1989个7}>\overbrace{55\cdots\cdots5}^{1988个5}$

所以有 $$\frac{\overbrace{77\cdots\cdots7}^{1989\text{个}7}}{\underbrace{55\cdots\cdots5}_{1988\text{个}5}} < \frac{\overbrace{77\cdots\cdots7}^{1989\text{个}7}-\overbrace{11\cdots\cdots1}^{1987\text{个}1}}{\underbrace{55\cdots\cdots5}_{1988\text{个}5}-\underbrace{11\cdots\cdots1}_{1987\text{个}1}}$$

例 3 说明，当某些问题计算起来十分麻烦时，我们可以讨论它的一般形式，得出结论，然后用结论去解决这一问题，一定可以收到事半功倍的效果。

练 习 一

1。比较下列各组中两个分数的大小：

（1） $\dfrac{23^{1989}}{23^{1988}}$与$\dfrac{23^{1989}-1988}{23^{1988}-1988}$ ；

（2） $\dfrac{1988^{1989}}{1989^{1988}}$与$\dfrac{1988^{1989}+1988}{1989^{1988}+1988}$ 。

2。分数 $\frac{3}{7}$、$\frac{4}{9}$、$\frac{17}{35}$、$\frac{100}{201}$、$\frac{151}{301}$ 中最大的一个分数是哪一个？

3。用“>”把下列分数连接起来：

$$\frac{13}{24},\ \frac{9}{16},\ \frac{3}{8},\ \frac{7}{9},\ \frac{2}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{12}$$

4。比较$\dfrac{8888887}{8888889}$与$\dfrac{9999991}{9999994}$的大小。

5。下面□中填什么自然数时，不等式成立：

$$\frac{5}{9}<\frac{9}{\square}<1$$

二、巧填数字

数学课上，王老师向同学们提出一道思考题，“在□里填上适当的数字，使26□5□能同时被2、3、5整除”。不一会儿，聪明的洋洋就回答出来了，她说：要使26□5□能被2整除，个位上的数字必须是偶数0、2、4、6、8中的一个，要能被5整除，个位上的数字必须是0或5，所以26□5□要能同时被2和5整除，它的个位数字只能是0，该数要能被3整除，那么它的各数位上数字之和$2+6+\square+5+0=13+\square$必须是3的倍数，因为$13+\boxed{2}=15$，$13+\boxed{5}=18$，$13+\boxed{8}=21$，15、18、21都是3的倍数，所以百位上的□内可以填2、5、8这三个数字中的任何一个，即$26\boxed{2}5\boxed{0}$、$26\boxed{5}5\boxed{0}$、$26\boxed{8}5\boxed{0}$都能同时被2、3、5整除。

从这道填数题目，我们看到掌握一个数被某些数整除的特征，对解决数的整除问题带来很大方便，但同学们只掌握了被2、3、5整除的数的特征，其实还有不少被其它数整除的数的特征，下面通过几个例子再来向大家介绍几种。

例1 判断54684能否被9整除。

分析：这个数能否被9整除，我们当然可以用试除的方法来解决，但这很麻烦，有无简便的判别方法呢？我们将该数进行如下分析：

$$54684=5\times10000+4\times1000+6\times100+8\times10+4=5\times(9999+1)+4\times(999+1)+6\times(99+1)+8\times(9+1)+4$$
$$=(5\times9999+4\times999+6\times99+8\times9)+(5+4+6+8+4)$$

$=9\times(5\times1111+4\times111+6\times11+8\times1)+(5+4+6+8+4)$
这样54684就被写成了两个加数和的形式。显然，式中第一个加数一定能被9整除，于是54684能否被9整除，就取决于第二个加数(5＋4＋6＋8＋4)能否被9整除，因为5＋4＋6＋8＋4＝27是9的倍数，所以第二个加数也能被9整除所以54684能被9整除。

解：因为5＋4＋6＋8＋4＝27，

9能整除27，

所以54684能被9整除。

从此例看到，第二个加数正好是该数的各个数位上的数字之和。这说明判断一个数能否被9整除，只要看该数的各个数位上的数字和能否被9整除就行了。由此得到一个数能被9整除的数的特征是："如果一个数的各个数位上的数字和能被9整除，那么这个数就能被9整除"。

这种判别方法与判别一个数能否被3整除的方法是一致的。因此，我们可以这样来记：**"如果一个数的各个数位上的数字和能被3(或9)整除，那么这个数就能被3(或9)整除"。**

例2 把1988个苹果平均分成4堆（或25堆）。能否正好分完？

分析：这个问题实际上是问1988能否被4（或25）整除的问题，大家都知道，4×25＝100，这说明100是4（或25）的倍数，又1000＝100×10，所以1000也是4（或25）的倍数，当然几个千、几个百也都是4（或25）的倍数。因此我们可以考虑这样分，先拿出1000只苹果平均分成4堆（或25堆），再拿出900只苹果平均分成4堆(或25堆)，最后还剩88只苹果，如果这88只苹果也能平均分成4堆(或25堆)，那么1988只苹果就能正好分完，显然88是4的倍数，但不是25的