华章图书 hzhbooks.com

碧海书道 BOOK HOUSE

高等学校数学学习辅导丛书

高等代数

辅导与习题精解

配高教第四版

滕加俊　主编

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

INSTRUCTION TEXTBOOK SERIES FOR MATHEMATICS

INSTRUCTION TEXTBOOK SERIES FOR MATHEMATICS

hzhbooks.com 華章图书 碧海书道 BOOK HOUSE

高等学校数学学习辅导丛书

高等代数
辅导与习题精解

配高教第四版

滕加俊　主编

宋桂安　滕加俊　滕兴虎　吴　红　编著

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

INSTRUCTION TEXTBOOK SERIES FOR MATHEMATICS

图书在版编目(CIP)数据

高等代数辅导与习题精解(配高教第四版)/滕加俊主编. —大连:大连理工大学出版社,2006. 9
高等学校数学学习辅导丛书
ISBN 7-5611-3352-9

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 滕…　Ⅲ. 高等代数—高等学校—教学参考资料　Ⅳ. O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 105294 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号　邮政编码:116023
发行:0411-84708842　邮购:0411-84703636　传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp. cn　URL:http://www. dutp. cn
大连业发印刷有限公司印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:147mm×210mm　　印张:12. 5　　字数:508 千字
2006 年 9 月第 1 版　　2006 年 9 月第 1 次印刷

责任编辑:邱明霞　　责任校对:碧　海
封面设计:宋　蕾

定　价:15.00 元

前　言

高等代数是数学学科中一门重要的基础课，也是数学专业硕士研究生入学考试必考科目。高等代数具有理论上的抽象性、逻辑推理的严密性和广泛的应用性。大多数学生在学习过程中感到高等代数抽象难懂，对基本概念以及定理结论在理解上感到困难，具体解题时缺乏思路，难以下手。为了帮助读者掌握高等代数的基本理论和基本方法，掌握并综合运用各种解题技巧和方法，提高分析问题和解决问题的能力，我们根据张禾瑞、郝钢新编写的《高等代数》第四版（高等教育出版社出版）编写了本辅导教材。

本辅导教材由以下几部分组成：

导读　列出相应各章应掌握的知识点以及重点、难点内容。

知识点考点精要　列出相应各章的基本概念、重要定理和重要公式，突出必须掌握和理解的核心内容以及考点的核心知识。

习题全解　教材中课后习题数量大、层次多，基础性问题可从多个角度帮助同学们理解基本概念和基本理论，层次较高的问题则有助于广大读者进一步的提高和应用，不少问题具有独特的解题思路和方法。因此，对教材课后全部习题给出了详细解答。由于高等代数解题方法千变万化，大多习题我们只给出了一种参考解答，其他方法留给读者自己去思考。

考研模拟试题　我们精选历年相关各院校研究生入学考试试题组成了五套模拟试题，这些试题涉及内容广，题型多，技巧性强。我们对所有试题给出了详细的参考解答，可以使同学们举一反三，触类旁通，开拓解题思路。

本书由宋桂安、滕加俊、滕兴虎、吴红等编写，全书由滕加俊教授统稿。由于作者的水平有限，加之时间仓促，书中不足之处敬请广大同行和读者批评指正。

编　者

2006 年 9 月 5 日

目　录

第一章　基本概念

导读

1. 本章大部分内容中学均学过，但中学未系统化。注意本章的许多证明都是从定义出发的。

2. 集合是作为不定义的概念来处理的，确定一个集合 A，就是要确定哪些是集合的元素，哪些不是集合的元素。说明一个集合包含哪些元素时，常用“列举法”、“描述法”。

3. 中学代数大部分的内容是计算，因此一开始遇到证明题时，往往不知从何入手，此时需要严密的推理能力。证明“集合相等”是加强这方面的训练之一。

4. 映射是近代数学中的一个基本概念。为使这部分内容更加系统化，可作必要的调整及层次化，按映射的概念(包括相等)及例子、映射的合成、几种特殊的映射来处理。

5. 本章概念多且成系列，注意弄清概念的实质(包括概念的转述、注释，否定概念的描述，以及新概念与已有概念的联系，如映射的合成是函数与函数的合成的概念的推广)，注意训练从定义验证有关问题(判断给定的法则是否为映射，分辨一个映射是不是单射、满射、可逆映射)的方法，语言要准确、清楚、有条理。同时初步领会怎样举例——包括正例和反例。

6. 数学归纳法是数学证明中的一种非常重要的方法，对于该内容学生不感陌生，因在中学曾学过。难点在于数学归纳法自身的理论证明，为此需要一个原理——(自然数集的)最小数原理。

7. 最小数原理是数学归纳法的基础。但更重要的是归纳法的解释——从特殊认识一般的思想方法，及数学归纳法应用中的关键(第二步)的突破。

8. 整数的性质是大家所熟知的，课本主要从整除的定义、性质、带余除法，最大公因数及性质，互素三方面作了介绍。新的问题是有些概念较之中学学过的概念有所区别，理论证明中运用最小数原理还不适应。

9. 注意整数的性质在多项式部分有与之平行的内容，我们要加以类比。

10. 数环、数域是本章引入的两个新概念，其是鉴于很多数学问题不仅与所讨论的范围(数集)有关，而且与数集所满足的运算有关。也就是说需论及所具有的运算。为体现这个问题，引入了数环、数域的概念。

11. 数环、数域简而言之是分别关于加、减、乘和加、减、乘、除封闭的非空数集，这可知它们的联系与区别，且由于对于不同的运算的封闭性，可讨论它们各自具有的简单性质。

12. 数环、数域的内容简单，不难理解，需要注意的是：

(1)"任意数域都包含有理数域"的证法——归谬法；

(2)给定一个数集验证是否是数环、数域；

(3)关于数环、数域的深入的问题——因数环、数域都是数集，而集合有所谓的运算：交、并，那么问题是数环、数域的交、并是否仍是数环、数域？从中体会"从定义出发加以验证"以及举例证明的方法。

知识点考点精要

一、集合

简称集，在此是一个不定义的原始概念，通常可给出如下描述性的解释，即所谓集合，是指由某些确定的事物(或具有某种性质的事物)组成的集体。其中每个事物称为这个集合的元素。常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素。若 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记做 $a\in A$，或者说 A 包含 a。若 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记做 $a\notin A$，或者说 A 不包含 a。

确定一个集合 A，就是要确定哪些是集合的元素，哪些不是集合的元素。说明一个集合包含哪些元素，常采用两种方法：

(1)列举法：列出集合的所有元素(包括利用一定的规律列出无限集)。如 $A=\{1,2,3,\cdots\}$。

(2)描述法：给出集合所具有的特征性质。如 $B=\{x\mid x^2+3x-4=0\}$ 表示方程 $x^2+3x-4=0$ 的解集。

二、集合的分类

按所含元素的个数分类。

有限集：只含有有限多个元素的集合；

无限集：由无限多个元素组成的集合；

空集：不含任何元素的集合，用 $\varnothing$ 表示。

约定：$\varnothing$ 是任何集合的子集。

三、集合间的关系

设 A、B 是两个集合。

(1)子集：若 A 的每个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的子集(即若“$\forall x\in A\Rightarrow x\in B$”)。记做 $A\subseteq B$(读做 A 包含于 B)，或者 $B\supseteq A$(读做 B 包含 A)。

(2)集合相等：若集合 A 和 B 是由完全相同的元素组成的，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$。“$A=B$”$\Leftrightarrow$“$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$”$\Leftrightarrow$“$\forall x\in A\Leftrightarrow x\in B$”。

(3)性质：

①$A\subseteq A$　(反身性)

②若 $A\subseteq B, B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$　(传递性)

③$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A\Rightarrow A=B$　(反对称性)

四、几个常用的数集

Z：全体整数的集合。

Q：全体有理数的集合。

R：全体实数的集合。

C：全体复数的集合。

N*：全体自然数的集合。

N：全体非负整数的集合。

五、集合的运算

设 A、B 是两个集合。

(1)并：由 A 的一切元素和 B 的一切元素组成的集合叫做 A 与 B 的并集，简称并。记做 $A\cup B$。

即 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或者 $x\in B\}$。

并具有性质：$A\subseteq A\cup B, B\subseteq A\cup B$；$x\in A\cup B\Rightarrow x\in A$ 或 $x\in B$；$x\notin A\cup B\Rightarrow x\notin A$ 且 $x\notin B$。

(2)交：由集合 A 与 B 的公共元素组成的集合，叫做 A 与 B 的交集，简称交。记做 $A\cap B$。

即 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$。

交具有性质：$A\cap B\subseteq A, A\cap B\subseteq B$。

另外，集合的交、并可推广至有限个集合上去。

集合的交、并还适合以下算律：

①$A\cap B=B\cap A, A\cup B=B\cup A$　(交换律)

②$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

③$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$　(结合律)

④$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

⑤$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$　(分配律)

⑥$A\cap(A\cup B)=A, A\cup(A\cap B)=A$

⑦$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cup\varnothing=A$。(0-1)律

这些算律中，等式两端所表示的集合其意义并不相同。

(3)余(差、补)：由一切属于A而不属于B的元素组成的集合，叫做B在A中的余(补)集，或称为A与B的差集，记做$A-B$。即$A-B=\{x|x\in A,x\notin B\}$。

在$A-B$定义中，不要求A与B有包含关系，特别不要求B是A的子集。

(4)积(卡氏积)：由一切元素对(a,b)所成的集合称为A与B的笛卡儿积(简称为积)。其中第一个位置的元素取自A，第二个位置的元素取自B。记为$(A\times B)$。即$A\times B=\{(a,b)|a\in A,b\in B\}$。

六、映射

设A、B是两个非空集合，A到B的一个映射指的是一个对应法则，通过这个法则，对于任何$x\in A$，存在惟一的$y\in B$与它对应。

(1)常用字母$f,g,\cdots$表示映射。$f:A\to B$表示f是A到B的一个映射。若通过映射$f:A\to B$，与$x\in A$对应的元素是$y\in B$，那么就记做：$f:x\longmapsto y$(读做x对应于y)。此时y叫做元素x在f之下的象，记做$y=f(x)$，x叫做元素y在f之下的一个原象。

(2)由定义，若对$\forall x\in A$，$f(x)$都已给出，则映射f就完全确定了(因而不能仅注意“f”，即对应法则的具体形式；常见的“形式”有表格、图象、解析式等)。

映射的要点：

(1)是一个法则(对应关系)；

(2)此法则要求对$\forall x\in A$，都有惟一确定的象y；

(3)且象$y\in B$。

七、映射的合成

设$f:A\to B$，$g:B\to C$是两个映射，对$\forall x\in A$，有$f(x)\in B$，从而$g(f(x))\in C$，这样，对$\forall x\in A$，就有C中惟一的$g(f(x))$与之对应，就得到A到C的一个映射，这个映射是由$f:A\to B$和$g:B\to C$所决定的，称为f与g的合成。记做$g\circ f$。

由定义可得：

(1)映射的合成是复合函数概念的推广；

(2)合成映射是由两个映射得到的新映射；

(3)但不是任意两个映射都能合成，条件是必须是“接上”的，即$f(x)\in B$，而g是B到C的映射，亦即：$\{f$的象$\}\subseteq\{g$的原象$\}$。

两个映射的合成是有次序的，$g\circ f$与$f\circ g$意义不同(说法不同，合成作用次序不同)，且一般不相等(一个有意义，另一个不一定有意义，即使有意义也不一定相等)。

尽管如此，映射的合成还是满足结合律：

设$f:A\to B$，$g:B\to C$，$h:C\to D$，则由合成映射的定义可得$A\to D$的两个映射：

$h\circ(g\circ f)$，$(h\circ g)\circ f$，则 $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$。

八、几类特殊映射

设 $f:A\to B$，对 $\forall x\in A$，有 $f(x)\in B$，则所有这样的象所组成 B 的子集，用 $f(A)$ 表示，即 $f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$，叫做 A 在 f 下的象，或叫做映射 f 的象。

(1)满射

设 $f:A\to B$ 是一映射，若 $f(A)=B$，则称 f 是 A 到 B 上的一个映射，也称 f 是一个满射。

①满射是加了条件的映射，即首先是映射，其次 $f(A)=B$；

②验证时常用下述等价命题：

$f:A\to B$ 是满射$\Leftrightarrow$对 $\forall y\in B$，$\exists x\in A$，使 $f(x)=y$(即 B 中任一元在 f 下有原象(不一定惟一))。

(2)单射

设 $f:A\to B$ 是一个映射，若对 $\forall x_1,x_2\in A$，只要 $x_1\neq x_2$，就有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 是 A 到 B 的一个单射，简称单射。

①单射首先是映射，其次不同的元的象也不同；

②等价叙述：$f:A\to B$ 是一个映射，我们有

“f 是单射”$\Leftrightarrow$“若 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1=x_2$”

③非单射的定义及验证方法：存在不同的元其象相同。

(3)双射(1－1 对应)

若 $f:A\to B$ 既是单射又是满射，即：

①若 $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$，$\forall x_1,x_2\in A$；

②$f(A)=B$。

则称 f 是 A 到 B 的一个双射。

特别地，若 f 是 A 到 A 上的一个 1－1 对应，就称 f 为 A 的一个一一变换；有限集 A 到自身的双射称为 A 的一个置换。

令 $f:A\to B$ 是一个映射，则：

①下述两条等价：

a. f 是双射；

b. 存在 $g:B\to A$ 使得 $g\circ f=j_A$，$f\circ g=j_B$。

其中 j_A，j_B 是 A 到 A，B 到 B 的恒等映射。

②b 成立时，其中的 g 由 f 惟一决定。

(4)可逆映射及其逆映射

设 $f:A\to B$，若存在 $g:B\to A$，使得 $g\circ f=j_A$，$f\circ g=j_B$，则称 f 是可逆映射，且称 g 为 f 的逆映射。

①$f:A\to B$ 是双射$\Leftrightarrow f$ 可逆。

②$f:A\to B$ 可逆，由(3)中的等价条件知 f 的逆映射是由 f 惟一决定的，以后记 f 的逆映射为 f^{-1}，且有 $f^{-1}:B\to A, y\longmapsto x(f(x)=y)$，即 x 为 y 在 f 下的原象。

③若 $f:A\to B$ 可逆，则 $f:A\to B$ 与 $f^{-1}:B\to A$ 互为逆映射。

④只有可逆映射才有逆映射(这是两个不同的概念，但相互联系着，同时存在，同时消失)，不可不考虑是否可逆就去求逆。讨论可逆及求逆有二法：

一由定义，即找 $g:B\to A$ 使得 $g\circ f=j_A, f\circ g=j_B$，如果对具体的 $f:A\to B$ 能找到的话，不仅说明了 f 可逆，且亦求出了其逆。

二由定理，即 $f:A\to B$ 可逆$\Leftrightarrow f$ 是双射，而验证双射有具体方法，所以可先证 f 可逆(双射)，再求其逆。而由(3)中的等价条件证知 f 可逆时其逆惟一，为 $g:B\to A$, $y\longmapsto x$(若 $f(x)=y$)(即对 $y\in B$，找在 f 下的原象)。

九、代数运算

设 A 是一个非空集合，我们把 $A\times A\to A$ 的一个映射叫做集合 A 的一个代数运算。若集合 A 有代数运算 σ，也说 A 对 σ 封闭。

最小数原理：自然数集 $\mathbf{N}^*$ 的任一非空子集 S 必含有一个最小数，即 $\exists a\in S$，对 $\forall c\in S$，都有 $a\leqslant c$。

十、第一数学归纳法

设有一个与自然数 n 有关的命题 $P(n)$，若满足下列两条：

(1)当 $n=1$ 时 $P(n)$ 成立；

(2)假设 $n=k$ 时成立，则当 $n=k+1$ 时也成立。

则命题 $P(n)$ 对于一切自然数 n 都成立。

十一、第二数学归纳法原理

设有一个与自然数 n 有关的命题 $P(n)$，若满足下列两条：

(1)当 $n=1$ 时 $P(n)$ 成立；

(2)假设命题对于一切小于 k 的自然数都成立时，命题对于 k 也成立。

则命题 $P(n)$ 对于一切自然数 n 都成立。

十二、整除

设 $a,b\in\mathbf{Z}$，若 $\exists d\in\mathbf{Z}$ 使得 $b=ad$，则称 a 整除 b(或 b 被 a 整除)。用符号 $a|b$ 表示。这时 a 叫做 b 的一个因数，而 b 叫做 a 的一个倍数。若 a 不整除 b(即对 $\forall d\in\mathbf{Z}$, $ad\neq b$)，记做 $a\nmid b$。

(1)我们知道整数的加、减、乘仍是整数，而整数的商(除数不为0)不一定是整数，因而整数的整除性不是整数的运算，而是整数间的一种关系(任二整数可能有或没有这种关系)。

(2)“$a|b$”表示 a 整除 b(“$a\nmid b$”表示 a 不整除 b)，不要把符号写做“a/b”，这种写法易与分式$\frac{a}{b}$混淆，且它们的含义完全不同。

(3)“a 整除 b”与“a 是除数，$\frac{b}{a}$是整数”或“b 除以 a，b/a 是整数”的含义不同。事实上：“a 是除数”或“b 除以 a”都排除了 $a=0$，而“b/a 是整数”表示的是 a 除 b 得到的商是整数。但整除定义中“a 整除 b”并不要求 $a\neq0$，因为 $0=0\cdot d$ 对 $\forall d\in\mathbf{Z}$ 成立，由定义说明 $0|0$，即“0 整除 0”。(又若 $0|a$，即 $\exists d\in\mathbf{Z}$ 使 $a=0\cdot d\Rightarrow a=0$，即“0 只能整除 0”，而因 $\forall a\in\mathbf{Z}, 0=a\cdot0$，即 0 能被任意整数整除。)

十三、整除的性质

(1)$a|b, b|c\Rightarrow a|c$　(传递性)

(2)$a|b, a|c\Rightarrow a|(b+c)$

(3)$a|b, \forall c\in\mathbf{Z}\Rightarrow a|bc$

(4)$a|b_i, \forall c_i\in\mathbf{Z}(i=1,2,\cdots,n)\Rightarrow a|\sum b_ic_i$

(5)$\pm1|a, a|0, \pm a|a(\forall a\in\mathbf{Z})$，由此任意整数 a 有因数 $\pm1, \pm a$，它们称为 a 的平凡因数

(6)若 $a|b\Rightarrow\pm a|\pm b$

(7)$a|b$ 且 $b|a\Rightarrow a=b$ 或 $a=-b$　(对称性)

十四、带余除法

“整除”是整数间的一种关系，任意两个整数可能有这种关系，也可能没有这种关系，一般地有：

设 $a,b\in\mathbf{Z}$，且 $a\neq0$，那么 $\exists q,r\in\mathbf{Z}$ 使得 $b=aq+r$ 且 $0\leqslant r\leqslant|a|$。满足上述条件的 q,r 是惟一的。

我们称上述的惟一确定的 q,r 分别为 a 除 b 所得的商与余数。

十五、最大公因数

设 $a,b\in\mathbf{Z}, d\in\mathbf{Z}$，若 d 满足：①$d|a$ 且 $d|b$(即 d 是 a 与 b 的一个公因数)；②若 $c\in\mathbf{Z}$ 且 $c|a, c|b\Rightarrow c|d$(即 d 能被 a 与 b 的任一个公因数整除)。则称 d 为 a 与 b 的一个最大公因数。

(1)“最大公因数”中“最大”的含义非“公因数中最大者”，而是能被任一公因数整除的公因数。由此及整除的性质知“最大公因数”可能不惟一，也可为负。

(2)特别讨论下述特殊情况：若 $a=0, b\neq0$，则 $\pm b$ 是 a 与 b 的最大公因数。若 $a=0, b=0$，则 0 是 a 与 b 的最大公因数。$a\neq0, b\neq0, d$ 为 a 与 b 的最大公因数时，则 $d\neq0$ 且 $-d$ 也是 a 与 b 的最大公因数。

(3)最大公因数的概念可推广至有限个整数。

①最大公因数的存在性(及求法):任意 $n(n\geqslant 2)$ 个整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都有最大公因数;若 d 为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一个最大公因数,则 $-d$ 也是;$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的两个最大公因数至多相差一个符号。

②定理:设 d 为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一个最大公因数,那么 $\exists t_1,t_2,\cdots,t_n\in\mathbf{Z}$ 使得 $d=t_1a_1+t_2a_2+\cdots+t_na_n$。

a. 注意定理讲的是最大公因数的性质——可表示为 n 个整数的组合的形式,并且由最大公因数的求法可得 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 的求法($k-1$ 个等式逐步代回整理,示例略)。

b. 定理之逆不成立。即若 $d=t_1a_1+t_2a_2+\cdots+t_na_n$,则 d 不一定为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一个最大公因数。问题在于 $d=t_1a_1+t_2a_2+\cdots+t_na_n$ 能保证 d 能被 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的任一公因数整除,若再有 d 是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一个公因数即可。

十六、互素

设 $a,b\in\mathbf{Z}$,若 $(a,b)=1$,则称 a,b 互素;一般地,设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{Z}$,若 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)=1$,则称 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互素。

(1)互素是两个整数之间的一种关系,是用最大公因数来定义的,因而有具体的讨论方法。那么从定义再深入看一下互素的实质:a,b 互素$\Leftrightarrow(a,b)=1$,即 a 与 b 的最大公因数为 ±1,则由最大公因数的定义,a 与 b 仅有公因数为 ±1(由此也可得出互素的另一种定义方法)。

(2)n 个整数互素与两两互素不同,两两互素必互素,反之不真(示例略)。

n 个整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互素$\Leftrightarrow\exists t_1,t_2,\cdots,t_n\in\mathbf{Z}$ 使得 $t_1a_1+t_2a_2+\cdots+t_na_n=1$。

十七、素数及其性质

一个正整数 $p>1$ 叫做一个素数,若除 $\pm1,\pm p$ 外没有其他因数。

素数(否则叫合数)$p>1$,约定 1 既不是素数也不是合数。

性质:

(1)若 p 是一个素数,则对 $\forall a\in\mathbf{Z}$ 有 $(a,p)=p$ 或 $(a,p)=1$。

(2)$\forall a\in\mathbf{Z}$ 且 $a\neq0,\pm1$,则 a 可被某一素数整除。

(3)设 p 是一个素数,$a,b\in\mathbf{Z}$,若 $p|ab$,则 $p|a$ 或 $p|b$。

十八、数环与数域

设 $S\subseteq\mathbf{C}$ 且 $S\neq\varnothing$,若对 $\forall a,b\in S$ 都有 $a+b,a-b,ab\in S$,则称 S 是一个数环。

设 F 是一个数环,若①F 含有一个非 0 数;②若 $a,b\in F$ 且 $b\neq0$,则 $\frac{a}{b}\in F$,则称 F 是一个数域。

(1)简而言之:数环是关于加、减、乘封闭的非空数集;数域是关于加、减、乘、除封

闭的非空数集。

(2)数环一定含有数 0，且$\{0\}$可构成数环，那么教材中定义 2 要求 $F\neq\{0\}$，为使除数不为 0。

(3)由定义知数环和数域的关系为：数域必为数环，反之不真(如整数环)。

十九、数环与数域的性质

(1)设 S 是一个数环，则 $0\in S$。

(2)设 F 是一个数域，则 $0,1\in F$。

(3)有理数域是最小的数域(在集合包含意义下)，即任何数域都包含有理数域 $\mathbf{Q}$。

习题全解

§1.1　集合(P6)

1. 设 $\mathbf{Z}$ 是一切整数的集合，X 是一切不等于零的有理数的集合。$\mathbf{Z}$ 是不是 X 的子集？

解　$\mathbf{Z}$ 不是 X 的子集，由于 $0\in\mathbf{Z}$，但 $0\notin X$。

2. 设 a 是集 A 的一个元素。记号$\{a\}$表示什么？写法$\{a\}\in A$ 对不对？

解　记号$\{a\}$表示一个集合，该集合中仅有一个元素 a。$\{a\}\in A$ 写法不对，由于$\{a\}$与 A 是两个集合，集合与集合之间不能用属于关系或不属于关系来表示，只能用包含或不包含来表示，即应写成$\{a\}\subset A$。

3. 设

$$A=\{x\mid x\in\mathbf{R},-1\leqslant x\leqslant 1\}$$
$$B=\{x\mid x\in\mathbf{R},x>0\}$$
$$C=\{x\mid x\in\mathbf{R},-1<x<2\}$$

写出 $A\cap(B\cup C)$和 $A\cup(B\cup C)$。

解　注意到 A,B,C 是实数集上的三个区间，读者可以直接画图求得。

$$A\cap(B\cup C)=A\cap\{x\mid x\in\mathbf{R},x>-1\}=\{x\mid x\in\mathbf{R},-1<x\leqslant 1\}$$
$$A\cup(B\cup C)=A\cup\{x\mid x\in\mathbf{R},x>-1\}=\{x\mid x\in\mathbf{R},x\geqslant -1\}$$

4. 写出含有四个元素的集合$\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$的一切子集。

解　对于某一子集 B 及任一元素 $a_i(i=1,2,3,4)$，我们有 $a_i\in B$ 或 $a_i\notin B$，即含有四个元素的集合 A 的一切子集个数为 16，它们分别为$\varnothing$，$\{a_1\}$，$\{a_2\}$，$\{a_3\}$，$\{a_4\}$，$\{a_1,a_2\}$，$\{a_1,a_3\}$，$\{a_1,a_4\}$，$\{a_2,a_3\}$，$\{a_2,a_4\}$，$\{a_3,a_4\}$，$\{a_2,a_3,a_4\}$，$\{a_1,a_3,a_4\}$，$\{a_1,a_2,a_4\}$，$\{a_1,a_2,a_3\}$，$\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$。

5. 设 A 是含有 n 个元素的集合。A 中含有 k 个元素的子集共有多少个？

解　集合中的元素是确定的、互异的、无序的，即 A 中含有 k 个元素的子集数应是 n

个元素的k组合数，即C_n^k。

6. 下列论断哪些是对的，哪些是错的？对于错的论断举出反例，并且把错误的论断改正过来。

(1)$x\in A\cup B$，且$x\notin A\Rightarrow x\in B$。

(2)$x\in A$或$x\in B\Rightarrow x\in A\cap B$。

(3)$x\notin A\cap B\Rightarrow x\notin A$且$x\notin B$。

(4)$x\notin A\cup B\Rightarrow x\notin A$且$x\notin B$。

解 本题是要读者弄清“且”与“或”之间的异同及集合间的交并的定义。

(1)该论断正确。

(2)该论断错误。如$A=\{1,2\}$，$B=\{3,4\}$，$x=1$，则$x\in A$，从而$x\in A$或$x\in B$，但$x\notin A\cap B$，由于$A\cap B=\varnothing$。正确的说法为：

①$x\in A$或$x\in B\Rightarrow x\in A\cup B$，或者

②$x\in A$且$x\in B\Rightarrow x\in A\cap B$。

(3)该论断错误。如$A=\{1\}$，$B=\{2\}$，$x=1$，由于$A\cap B=\varnothing$，故$x\notin A\cap B$，但我们有$x\in A$。正确的论断为：

①$x\notin A\cap B\Rightarrow x\notin A$或$x\notin B$，或者

②$x\notin A\cup B\Rightarrow x\notin A$且$x\notin B$。

(4)该论断正确。

7. 证明下列等式：

(1)$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$。

(2)$A\cap(A\cup B)=A$。

(3)$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

证明 证明两个集合相等，主要的方法是看两集合的元素是否相同，或者运用算律。

(1)一方面，若$x\in(A\cup B)\cup C$，则x是$A\cup B$或C中的至少一个集合的元素。若$x\in C$则$x\in(B\cup C)$，从而$x\in A\cup(B\cup C)$。若$x\notin C$，则必有$x\in A\cup B$，则$x\in A$或$x\in B$。若$x\in A$，则$x\in A\cup(B\cup C)$。若$x\notin A$，则$x\in B$，$x\in B\cup C$，从而$x\in A\cup(B\cup C)$。综上，我们有若$x\in(A\cup B)\cup C$，则$x\in A\cup(B\cup C)$，即

$$(A\cup B)\cup C\subset A\cup(B\cup C)$$

另一方面，同理可得，若$x\in A\cup(B\cup C)$，则$x\in(A\cup B)\cup C$，即

$$A\cup(B\cup C)\subset(A\cup B)\cup C$$

从而有
$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

(2)一方面，若$x\in A\cap(A\cup B)$，则$x\in A$且$x\in A\cup B$，从而有$x\in A$，即

$$A\cap(A\cup B)\subset A$$

另一方面，若$x\in A$，则$x\in A\cup B$，从而有$x\in A$且$x\in A\cup B$，即$x\in A\cap(A\cup B)$，从而有

$$A\subset A\cap(A\cup B)$$

综上，可得 $$A\cap(A\cup B)=A$$

(3)一方面，若 $x\in A\cup(B\cap C)$，则 $x\in A$ 或 $x\in B\cap C$。若 $x\in A$，则必有 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$，从而 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$。若 $x\notin A$，则必有 $x\in B\cap C$，即 $x\in B$ 且 $x\in C$，从而有 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$，即 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

综上，我们有 $$A\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

另一方面，若 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，则 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$。若 $x\in A$，则我们有 $x\in A\cup(B\cap C)$。若 $x\notin A$，由于 $x\in A\cup B$，故 $x\in B$。同理由于 $x\in A\cup C$，则 $x\in C$，从而 $x\in B\cap C$，$x\in A\cup(B\cap C)$。综上，我们有

$$(A\cup B)\cap(A\cup C)\subset A\cup(B\cap C)$$

从而有 $$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

§1.2 映射(P14)

1. 设 A 是前 100 个正整数所组成的集。找一个 A 到自身的映射，但不是满射。

解 这样的映射很多，例如，$f:A\to A;x\longmapsto 1$。

2. 找一个全体实数集到全体正实数集的双射。

解 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+;x\longmapsto e^x$。容易验证这是一个双射。

3. $f:x\longmapsto\dfrac{1}{x}$是不是全体实数集到自身的映射？

解 不是，因为 $f(0)=\dfrac{1}{0}$不是实数。

4. 设 f 定义如下：

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{若 } x<0\\ 1, & \text{若 } 0\leqslant x<1\\ 2x-1, & \text{若 } x\geqslant 1\end{cases}$$

则 f 是不是 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射？是不是单射？是不是满射？

解 由 f 的定义知，对任一实数 $x\in\mathbf{R}$，均有惟一实数 $f(x)$通过法则 f 与 x 对应，故 f 是 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射。f 不是单射，因为 $f(0)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$。$f$ 不是满射，因为$\dfrac{1}{2}$没有原象。

5. 令 $A=\{1,2,3\}$。写出 A 到自身的一切映射。在这些映射中哪些是双射？

解 注意到 A 到 A 的映射值域为 A 的非空子集，因此，所有映射为：

$$f_1(x)=1\quad(x\in A),f_2(x)=2\quad(x\in A),f_3(x)=3\quad(x\in A)$$

$$f_4(x)=\begin{cases}1, & x=1\text{ 或 }2\\ 2, & x=3\end{cases},f_5(x)=\begin{cases}1, & x=3\\ 2, & x=1\text{ 或 }2\end{cases}$$

$$f_6(x)=\begin{cases}1, & x=1\text{ 或 }3\\ 2, & x=2\end{cases},f_7(x)=\begin{cases}1, & x=2\\ 2, & x=1\text{ 或 }3\end{cases}$$

$$f_8(x)=\begin{cases}1, & x=2\text{ 或 }3\\ 2, & x=1\end{cases}, f_9(x)=\begin{cases}1, & x=1\\ 2 & x=2\text{ 或 }3\end{cases}$$

$$f_{10}(x)=\begin{cases}1, & x=1\text{ 或 }2\\ 3, & x=3\end{cases}, f_{11}(x)=\begin{cases}1, & x=3\\ 3, & x=1\text{ 或 }2\end{cases}$$

$$f_{12}(x)=\begin{cases}1, & x=1\text{ 或 }3\\ 3, & x=2\end{cases}, f_{13}(x)=\begin{cases}1, & x=2\\ 3, & x=1\text{ 或 }3\end{cases}$$

$$f_{14}(x)=\begin{cases}1, & x=2\text{ 或 }3\\ 3, & x=1\end{cases}, f_{15}(x)=\begin{cases}1, & x=1\\ 3, & x=2\text{ 或 }3\end{cases}$$

$$f_{16}(x)=\begin{cases}2, & x=1\text{ 或 }2\\ 3, & x=3\end{cases}, f_{17}(x)=\begin{cases}2, & x=3\\ 3, & x=1\text{ 或 }2\end{cases}$$

$$f_{18}(x)=\begin{cases}2, & x=1\text{ 或 }3\\ 3, & x=2\end{cases}, f_{19}(x)=\begin{cases}2, & x=2\\ 3, & x=1\text{ 或 }3\end{cases}$$

$$f_{20}(x)=\begin{cases}2, & x=2\text{ 或 }3\\ 3, & x=1\end{cases}, f_{21}(x)=\begin{cases}2, & x=1\\ 3, & x=2\text{ 或 }3\end{cases}$$

$$f_{22}(x)=\begin{cases}1, & x=1\\ 2, & x=2\\ 3, & x=3\end{cases}, f_{23}(x)=\begin{cases}1, & x=1\\ 2, & x=3\\ 3, & x=2\end{cases}$$

$$f_{24}(x)=\begin{cases}1, & x=2\\ 2, & x=1\\ 3, & x=3\end{cases}, f_{25}(x)=\begin{cases}1, & x=2\\ 2, & x=3\\ 3, & x=1\end{cases}$$

$$f_{26}(x)=\begin{cases}1, & x=3\\ 2, & x=1\\ 3, & x=2\end{cases}, \quad f_{27}(x)=\begin{cases}1, & x=3\\ 2, & x=2\\ 3, & x=1\end{cases}$$

容易看出从 A 到 A 自身的映射个数为 27，且最后六个（即 $f_{22}, f_{23}, f_{24}, f_{25}, f_{26}, f_{27}$）为双射。

6. 设 a,b 是任意两个实数且 $a<b$。试找出$[0,1]$到$[a,b]$的双射。

解 因为线性映射 $f(x)=ax+b$ 都是从其定义域到值域的双射，所以只需找一个线性映射满足 $f(0)=a, f(1)=b$ 即可，从而我们有

$$f(x)=(b-a)x+a, x\in[0,1]$$

容易验证上述映射既是单射，又是满射，因此，$f(x)=(b-a)x+a, x\in[0,1]$是0,1]到$[a,b]$的一个双射。

7. 举例说明，对于一个集合 A 到自身的两个映射 f 和 g 来说，$f\circ g$ 与 $g\circ f$ 一般不相等。

解 取 $A=\{1,2,3\}$，及

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=1\text{ 或 }3\\ 2, & x=2\end{cases}, g(x)=\begin{cases}1, & x=2\text{ 或 }3\\ 3, & x=1\end{cases}$$