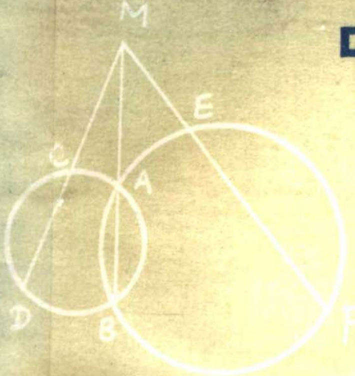


中学几何证题的思考方法

言川

中学生课外阅读丛书

山西人民出版社

中学几何证题的思考方法

盲　川

山 西 人 民 出 版 社

中学几何证题的思考方法

盲　川

•

山西人民出版社出版　（太原并州路七号）

山西省新华书店发行　山西新华印刷厂印刷

•

开本：787×1092　1/32　印张：14$\frac{3}{4}$　字数：312千字

1980年6月第1版　1980年11月太原第1次印刷

印数：1—60,400册

•

书号：7088·883　定价：1.09元

出 版 说 明

为了配合提高中学教学质量，扩大中学生的知识领域，满足广大中学生课外阅读的需要，以适应全党、全国工作重点向社会主义现代化建设转移的新形势，我们特编辑出版这套中学生课外阅读丛书。丛书的范围，包括数、理、化、文、史、地等中学阶段设置的基础学科；丛书的内容，以中学教材为基础，适当增添部分必要的基础知识。这套丛书主要供在校的中学生阅读，也适合具有中等文化程度的其他青年阅读。

山西人民出版社

前　　言

几何学是研究图形性质的一门学科，它的研究方法，从欧几里得起，就是先选择少数几个图形性质作为公理，然后通过演绎推理证明其余所有图形的性质。每一性质都需经过这样的证明，才加以确认。这样，几何的证明就是研究几何学的一个重要的方法了。

但从条件出发推出结论的过程有时是十分曲折的，甚至包含着许多技巧性，从而使得证明的途径并不那么明显，于是就产生了如何去找证明途径的问题，本书就想在这个方面提供一个一般的方法。

本书分三个部分：

第一、二部分是准备性的。其中第一部分对几何命题的构成及其证明作一一般的介绍；第二部分是基本几何定理的一个纲要，对平面几何的基本定理作全面系统的复习，同时也为第三部分的讨论作了较充分的准备。

第三部分是本书的主要部分。

把证明过程中的每一步推理，即按"若…，则…"划作一个证明单位的时候，那么分析一下几何证明过程就可知道，每个证明过程都可分解为一串这样的证明单位。这也就是说，整个证明过程就是由这样的一串证明单位组成的。因此研究如何证明这些证明单位就是基本而且重要的了。

纵观证明过程的各个证明单位，容易看出，在这些证明单位中，结论是证明角相等、角不等、线段相等、线段成比例、线段不等、两直线平行（它的否定就是两直线相交）、两直线垂直（其实这是角相等的特例）、点共圆、点共线、线共点等证明单位是基本而主要的，因此，我们就把这些证明单位作为我们的基本证明单位，分别进行讨论。其它许多证明单位不算是基本的，它们是这些基本证明单位的复合。例如，证明两三角形相似，根据两三角形相似的判定定理可知，它是由证明两组对应角相等，或一组对应角相等且夹边成比例，或三组对应边成比例等基本证明单位组成的。因此，我们就不专门去讨论了，只在习题中作为综合应用。

对于我们称之为基本证明单位的证明，我们主要采用逆求并结合题设条件观察图形的具体位置，通过具体示例进行分析（由于我们的主要目的是研究如何找出证明途径，所以例题的证明就叙述的极为简要），但要确实掌握所介绍的方法，仅阅读示例是不充分的，必须自己动手做一些题才行。因此，在示例之后选配了较多数量的习题供选择练习。考虑到一些读者可能遇到困难，我们给每个习题都附以“证明提要”。这样做，还有一个意图，就是让它起定向作用。因为一个题可能有多解，但我们的习题是为了掌握示例所示范的解题思路而安排的，因此就要求按例题所示思路考虑。不过，我们希望读者不要急于利用这些证明提要，还是自己先通过分析给出证明。这样，我们的证明提要就只起提示与核对作用了。

我们还把一些习题分为（A）、（B）两组，其中（A）组是简单而容易的，也可以说主要是模仿性的，但这对初

步掌握方法是重要的，甚至是必不可少的。因为它不致于一下就把读者置身于错综复杂的情况中，以致使思路不那么清晰，妨碍了基本方法的掌握。（B）组的习题难度稍大一些。

原来把图设计得能对证明途径有较明显的提示作用，但由于印刷条件的限制，就只能割爱了。

由于水平所限，书中一定会有不少缺点与错误，希读者批评指正。

言　川

1978年8月于山西省中小学教材编审室

目　录

一、 定理的构成及其证明

1. 定理的构成

我们研究几何，就是研究几何图形的有关性质。几何图形的有关性质叙述出来，就是一个几何定理。例如：

(1) 若圆内接四边形的两对角线互相垂直，则过其交点所作任一边的垂线必将对边平分；

(2) 对边相等的四边形是平行四边形；

(3) 三角形的内角和等于180°；

(4) 对顶角相等；

尽管定理的具体叙述方式有所不同，但定理的叙述总可以分成两个部分：一部分是条件，说明已知图形具有哪些性质，处于什么状况；另一部分是结论，是说在具有上述性质或处于上述情况时，会有什么结果。因此定理总可以叙述成如下的典型形式：

若…，则…，

或

若A，则B。

上面所举的例子中，(1)就采用了这种典型的叙述形式。这样的叙述形式把已知条件与结论区分得清清楚楚。但定理的叙述却往往采用简略的叙述形式，如上面所举的(2)—(4)就是这样。由于它们的叙述是简略的叙述法，已知条件与结论分得就不象典型形式那样清楚，对初学者来说就有一定困难，

因此需要学会如何把它还原成上面的那种典型形式。也就是要能把定理的条件与结论区分开。这也是我们证明一个几何题时最起码的一个要求，否则，就谈不上进行证明。

例(2)叙述成典型形式是：

若四边形的对边相等，则这个四边形是平行四边形。

这是把四边形所满足的条件，作为结论中四边形的定语而形成的简化形式。

例(4)叙述成典型形式是：

若两个角是对顶角，则这两个角相等。

按(2)那样简化就是：

成对顶角的两个角相等。

这里的情况与(2)的情况不完全相同，例(2)中的条件“对边相等”与“四边形”，两者是不同性质的对象，一是两条“线段”，一是由“线段组成的多边形”；但在(4)中，对顶角是两个角，并且这两个角就是定理叙述中的两个角，即“对顶角”所指的两个角，与定理叙述中的“两个角”指的是同一个对象，所以可以再简化，就成为平常所见的简化形式(4)了。

因为我们所说的定理，指的是图形性质的叙述，这意思自然蕴含了它一定是正确的。而“两圆外切于点A，作外公切线切两圆于点B、C，求证：$AB\perp AC$”中的结论却是需要加以证明的，就是它的正确性还是有待证明的，在未证明之前还不能肯定它一定是正确的，因此它不是一个定理，而是一个命题。一个命题的叙述形式与定理的叙述形式是一样的，也是由条件与结论两部分组成的。不同的是：定理是正确的命题，它是经过了人们证明的；而一般的一个命题，本身并

不要求是正确的，它只是一个判定句，“若…，则…。”它的正确性是有待我们去证明的。为了强调明确结论的待证性，往往把结论前的“则”换成“求证”、“证明”之类的祈使词。

2. 定理的证明

我们知道，定理的正确性是经过人们证明才确认的。这样就提出如何证明定理的正确性的问题。几何学中定理的证明，从欧几里得起，就是采取先选择少数几个图形性质作为论证的依据与出发点，由已知条件通过逻辑推理的方式，得出所证结论的方法。这是因为我们要说明结论正确，就得有一个使它正确的理由，这个理由在几何学中当然还是一个图形性质，这样就又引出了新的问题：当作理由的图形性质是否正确？为了证明前一性质，就得证明后一性质，这样下去是没有完的，从而也是解决不了问题的。所以选择少数几个图形性质作为论证的依据和出发点。至于这些图形性质，就不象其它性质那样加以证明了。这样的一些性质就叫做公理或公设。其实叫做公理或公设的这些性质也不是不加以证明的，它的自明性是承继下来的，就是说它的正确性是经受人们世世代代长期实践所反复验证了的。

对公理的选择也是有要求的，就是选择得要不多不少，彼此不矛盾。不多，就是指作为公理的任一图形性质都不可能由其它公理逻辑地推出，这叫做公理的独立性；不少，是指由它们就足以推出（这个系统的）所有的图形性质，再少，有些性质就推不出来了，这叫做公理的完备性；不矛盾，就是由这些公理推出的图形性质彼此都不矛盾。所以公理的选择

也不是容易的。欧几里得的公理系统就不完全满足这些要求，公理数目太少，因此，证明时往往不得不借助于直观。直到十九世纪末才由德国数学家希尔伯特（Hilbert,1862—1943）在他的“几何基础”（1899）中给出一个完善的几何公理体系——希尔伯特公理体系。

（1） 演绎法与归纳法

之所以能够选择少数图形性质作为公理，而通过逻辑推理推出其它性质来，是由于图形性质之间并不是互不相关的，是有联系的，相互制约的。例如，两直线平行，与两直线被第三条直线所截得的内错角相等，是图形的两个性质。我们已经知道，它们之间是有联系的，相互制约的：两直线平行，则它们被第三条直线所截得的内错角相等；两直线被第三条直线所截得的内错角相等，则这两直线平行。这种情况说明，图形的一些性质会导致另一些性质，因此人们就可以由此及彼，这种由此及彼的过程就是推理过程。看来推理过程包含两个部分，其中作为推理根据的“此”叫做“前提”，推及的“彼”叫做“结论”。

推理过程分两大类，一类是演绎推理，一类是归纳推理。由一般情况下具有的性质推及特殊情况下也具有此性质的推理叫做演绎推理。由于演绎推理中的前提是一般情况下具有的性质，当然已经包含了特殊情况也具有此性质，因此，演绎推理所推得的结论总是正确的，也正因此，数学的证明主要是通过演绎推理完成的。

演绎推理中最简单、最基本的就是三段论。

三段论是由三个判断组成的，如

平行四边形的对角（是）相等（的）；

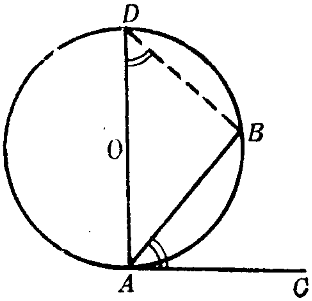
$\angle A$与$\angle C$是平行四边形的对角；

所以，$\angle A$与$\angle C$（是）相等（的）。

这里，第一个判断叫做大前提，第二个判断叫做小前提，大、小前提构成前提；第三个判断是结论。

几何的证明基本是由一系列三段论连接而完成的。

例如，我们是这样证明弦切角定理的：



证明：过A作直径AD，连结BD，

则$\angle B$是直角，

∴ $\angle D$与$\angle BAD$互余。

又 $AD \perp AC$，

∴ $\angle BAC$与$\angle BAD$互余。

∴ $\angle BAC = \angle D$。

这里，可以说每一结论无一不是一个三段论。事实上，“过A作直径AD”与“连结BD”合起来就相当于说：$\angle B$是直径AD所对的圆周角。它构成结论“$\angle B$是直角”的前提，并且它们一起构成一个省略了大前提的三段论：

直径所对的圆周角是直角，

$\angle B$ 是直径 AD 所对的圆周角，

$\therefore$ $\angle B$ 是直角。

结论"$\angle B$是直角"又构成下一结论"$\angle D$与$\angle BAD$互余"的前提．指出 $\angle B$ 是直角，就是指出了$\triangle ABD$ 是直角三角形，也就是指出了："$\angle D$与$\angle BAD$是直角三角形的两个锐角"，因此也是一个省略了大前提的三段论：

直角三角形的两个锐角互余，

$\angle D$ 与 $\angle BAD$ 是直角 $\triangle ABD$ 的两锐角，

$\therefore$ $\angle D$ 与 $\angle BAD$ 互余。

因为"$AD\perp AC$"相当于说"$\angle BAC$ 与$\angle BAD$ 的和为直角"，所以"$AD\perp AC$"与"$\therefore\angle BAC$与$\angle BAD$ 互余"也构成一个省略了大前提的三段论：

和为直角的两角互为余角，

$\angle BAC$与$\angle BAD$的和为直角，

$\therefore$ $\angle BAC$ 与$\angle BAD$ 互为余角。

最后，由上面两结论："$\angle D$与$\angle BAD$互余"与"$\angle BAC$与$\angle BAD$ 互余"构成结论"$\angle BAC=\angle D$"的小前提，并与"$\angle BAC=\angle D$"一起构成一个省略了大前提的三段论：

同角的余角相等，

$\angle D$、$\angle BAC$是$\angle BAD$的余角，

$\therefore$ $\angle BAC=\angle D$.

由此还可知，在证明过程中，人们为了简化证明的叙述，往往把大前提略去，甚至连小前提也略去，只写上结论。

人们对于图形性质的认识，开始一般是从多次观察、比较各个个别图形的特殊情况，通过归纳推理而得到的．例如，对于圆周率 π 的认识，人们发现这棵树的圆周长是其直

径的三倍多一些，那棵树的圆周长也是其直径的三倍多一些，粗的树是这样，细的树也是这样，还看到其他的一些圆形物体也是这样，于是人们就提出：圆的圆周长与其直径的比是确定的。这是一个一般的结论，这个结论所指的对象已不止是这株树与那株树，这个圆形物体、那个圆形物体了，而是所有的一切圆形物体。象这样由若干个别特殊情况而作出一般结论的方法叫做（普通）归纳法。由于这样的一般结论只是通过一些个别情况的验证而得出的，并没有对所有的情况加以考察，因而就不能确保其余没有经过考察的情况一定也是这样。所以这样得出的一般结论并不一定是正确的，其正确性还有待进一步去证明。尽管这样，这种方法对于发现图形的性质还是必不可少的，并且在定理的证明中也往往运用它。

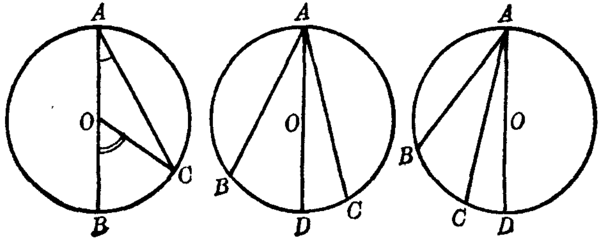
例1 我们在证明圆周角定理时，是分三种情况证明的：

（1）圆心在角的一边上；

（2）圆心在角的内部；

（3）圆心在角的外部。

圆周角定理： 圆周角等于它所对弧的度数的一半。



已知： $\angle BAC$是圆周角。

求证： $\angle BAC \stackrel{m}{=} \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$。

证明： (1) 当圆心 O 在AB上，连结 OC。则

$\angle BOC = \angle BAC + \angle C$。

但 $\angle BAC = \angle C$，

∴ $\angle BOC = 2\angle BAC$。

∴ $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$。

但 $\angle BOC \stackrel{m}{=} \overset{\frown}{BC}$，

∴ $\angle BAC \stackrel{m}{=} \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$。

(2) 当圆心 O 在$\angle BAC$内。过 A 作直径AD,则

$\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC$.

但 $\angle BAD \stackrel{m}{=} \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$. $\angle DAC \stackrel{m}{=} \frac{1}{2}\overset{\frown}{DC}$，

而 $\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{DC} = \overset{\frown}{BC}$，

∴ $\angle BAC \stackrel{m}{=} \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$.

(3) 当圆心 O 在$\angle BAC$外。过 A 作直径AD,则

$\angle BAC = \angle BAD - \angle CAD$。

但 $\angle BAD \stackrel{m}{=} \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$，$\angle CAD \stackrel{m}{=} \frac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$，

而 $\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BC}$，

∴ $\angle BAC \stackrel{m}{=} \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$。