鼎尖教研中心最新研究成果

与人教B版普通高中课程标准实验教科书同步

# 课时详解

KESHI XIANGJIE

高中新课标

# 随堂通

SUITANGTONG

数学必修

5

全面记录课堂笔记

及时弥补听课缺陷

一书在手家教可免

人民教育出版社
延边教育出版社

鼎尖教研中心最新研究成果

与人教B版 普通高中课程标准实验教科书同步

# 课时详解

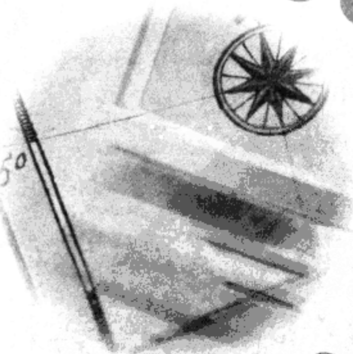
KESHI XIANGJIE

高中新课标

# 随堂通

SUITANGTONG

数学必修 5



全面记录课堂笔记

及时弥补听课缺陷

一书在手家教可免

人民教育出版社

延边教育出版社

□ 策　　划：鼎尖教育研究中心
韩明雄　黄俊葵
□ 执行策划：刘芳芳
□ 丛书主编：周益新
□ 本册主编：徐建明　黄孝银
□ 编　　著：刘双秀　黄孝银　霍燕飞　张得愿　邹文清　汪双连
张国祥　李启友　邹　梅　陈少祥　余红娟　孙秀梅
王伟民　吴细桂　高　敏　杜建国　任明华　王大昌
李启友　刘　超　张　燕　陈旭策　李声强
□ 责任编辑：魏　莹　王连香
□ 法律顾问：北京陈鹰律师事务所（010—64970501）

与人教版普通高中课程标准实验教科书同步（B版）

**《课时详解　随堂通》高中数学必修5**

出版：人民教育出版社　延边教育出版社　　发行：延边教育出版社
地址：吉林省延吉市友谊路363号（133000）
北京市海淀区苏州街18号院长远天地4号楼A1座1003（100080）
电话：0433—2913975　010—82608550　　传真：0433—2913971　010—82608856
排版：北京鼎尖雷射图文设计有限公司　　印刷：北京季蜂印刷有限公司
版次：2005年8月第1版　　印次：2005年8月第1次印刷
书号：ISBN 7-5437-6009-6/G・5485　　网址：http://www.topedu.net.cn
开本：889×1194　32开本　　印张：10.625
字数：395千字　　定价：14.00元

# 前言

“沉浸在题海，学习成绩却提升不快”，什么原因？专家和老师们都指出：听课效率很关键！如何提高45分钟课堂学习效率？万一上课没能抓住老师的讲解点，课后如何弥补？

《课时详解　随堂通》的出现，解决了这些难题，它真正做到从同步教学的角度出发，站在老师和学生的立场上考虑问题。这套丛书具有以下突出特点：

**一、国内首创　填补空白**

丛书是我国第一套与每课时教学内容严格同步的全方位配套的教辅用书，方便学生带进课堂听课、自学思考、回答问题、归纳总结、检查课后作业、自测自评。为满足学生在不同学习阶段的需要，还设计了**拓广习题课、专题综合课、中/高考链接课、综合实践课**等等，填补国内教辅市场长期的空白。

**二、动态课堂　灵活方便**

丛书生动呈现课堂45分钟，解决学习障碍，传授最有效的科学的思维方法和学习方法。丛书方便教师备课和上课，方便学生听课和自学，方便家长督促子女自学并检查子女的学习效果。即使学生因特殊原因未听课，使用此书自学，也可达到**“课课通，题题通，一书在手，家教可免”**的目的。

**三、讲解透彻　适用全面**

丛书全面、详细讲解教材中的重点和疑难点；**习题课**透彻评析各种题型及其同类变式的解题方法、规律和误区；**专题综合课**分析章节内知识的内在联系和内在结构；**中/高考链接课**则从近年来的命题规律、未来可能的命题方向入手，透彻剖析各地方命

# 前言

题和国家教育部考试中心的热点中/高考题型。

丛书兼顾教材知识讲解、配套习题讲解和原创题讲解，充分考虑全国各地各级中学的教学实际，适用对象全面。

**四、名师汇集　世纪品牌**

丛书**新课标**部分集中了国家级实验区骨干教师，最贴近新课标理念下的教学评价模式，内容最新颖；**高中现行教材**汇集了湖北、江苏、湖南及各省高考“状元之乡”的一代名师。**卓有成效的课堂教学经验保证了这套书是我国21世纪最具备引领性、权威性、全面性、科学性、实用性的同步学案详解丛书。**

按课时编写辅导丛书是新时期新的课题，本丛书尽管经过国内著名的教材专家、课程标准研究专家、考试改革研究专家、新课标国家级实验区骨干教师和“状元之乡”特级教师的编写或审定，仍需不断完善，恳请专家和读者指正。

丛书主编：周益新

2005年8月

# 目 录

content

（加“*”的课时为在教学中充分考虑提升不同群体学生成绩增加的课时）

## 第一章 解三角形



## 第二章 数列

# 目录

content

# 第一章　解三角形

## 1.1　正弦定理和余弦定理(4课时)

### 第1课时　正弦定理

**课程导入**

在初中，我们已经能够借助于锐角三角函数解决有关直角三角形的一些测量问题．在实际中我们还会遇到许多其他的测量问题，这些问题仅用锐角三角函数就不够了．为此，我们还要进一步学习任意三角形中边与角关系的有关知识．

如图 1.1-1，在 Rt$\triangle ABC$ 中，已知 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，根据正弦函数的定义，有 $\sin A=\frac{a}{c}$，$\sin B=\frac{b}{c}$，$\sin C=1$，即 $c=\frac{a}{\sin A}$，$c=\frac{b}{\sin B}$，$c=\frac{c}{\sin C}$，$\therefore \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$．那么，在任意三角形中，这一关系式是否仍然成立呢？

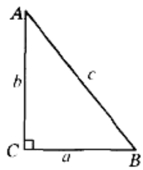



图 1.1-1



**探究新知**

**学点 1　正弦定理及其推导**

(1)正弦定理

在一个三角形中，各边和它所对角的正弦的比相等，即

$$\boxed{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}}$$

(2)正弦定理的推导

由情景导入，我们知道在直角三角形中，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$成立，下面讨论在锐角三角形和钝角三角形中，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$也成立．

当$\triangle ABC$ 为锐角三角形时，如图 1.1-2，设边 $AB$ 上的高是 $CD$，根据三角函数的定义，

$CD=a\sin B$，$CD=b\sin A$，

所以 $a\sin B=b\sin A$，得到

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$．

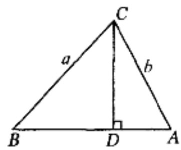



图 1.1-2

同理，在$\triangle ABC$中，$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，即$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

当$\triangle ABC$为钝角三角形时，如图1.1-3，$\angle C$为钝角.

设边$AB$上的高是$CD$，由上面的讨论有$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$.

设边$BC$上的高是$AE$（垂足$E$在$BC$的延长线上），根据三角函数的定义，

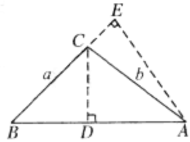


图1.1-3

$AE=c\sin B$，$AE=b\sin\angle ACE$，又$\sin\angle ACE=\sin C$.

$\therefore c\sin B=b\sin C$，得到

$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，即$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

综上可知，对于一般的三角形，有$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，此即为正弦定理.

**问题研讨1**

在前面，我们学习了向量的有关知识，向量作为工具性知识，在解决问题中有很重要的作用. 你能利用向量的知识来推导正弦定理吗？

______________________________

______________________________

______________________________

**学点2　解三角形**

一般地，我们把三角形的三个角$A,B,C$和它们的对边$a,b,c$叫做三角形的元素. 已知三角形的几个元素求其他元素的过程叫做解三角形.

**疑点提示**

**1. 利用正弦定理，可以解决以下两类有关三角形问题：**

**(1)已知三角形的两角和任意一边，求三角形其他两边与角；**

**(2)已知三角形的两边和其中一边的对角，求三角形其他边与角.**

**2. 在$\triangle ABC$中，以下的三角关系式，在解答有关的三角形问题时，经常用到，要记准、记熟，灵活地加以运用.**

(1)$A+B+C=\pi$；

(2)$\sin(A+B)=\sin C$，$\cos(A+B)=-\cos C$；

(3)$\sin\dfrac{A+B}{2}=\cos\dfrac{C}{2}$，$\cos\dfrac{A+B}{2}=\sin\dfrac{C}{2}$；

(4)$S_\triangle=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ac\sin B$.

**例 1** 已知在$\triangle ABC$中，$c=10$，$A=45^\circ$，$C=30^\circ$，求$a$、$b$和$B$.

**思维点拨** 本题是解三角形第一类问题（即已知两角和一边，求另两边和一角），利用正弦定理去解决.

**解答** $\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，$\therefore a=\dfrac{c\sin A}{\sin C}=\dfrac{10\times\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}=10\sqrt{2}$.

$B=180^\circ-(A+C)=180^\circ-(45^\circ+30^\circ)=105^\circ$，

$\because \dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，$\therefore b=\dfrac{c\cdot\sin B}{\sin C}=\dfrac{10\times\sin 105^\circ}{\sin 30^\circ}=20\sin 75^\circ=20\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=5(\sqrt{6}+\sqrt{2})=5\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+1)$.

**方法规律**

如果已知两角和其中一角的对边，则直接运用正弦定理求解；如果已知两角和另一角的对边，这时先利用$A+B+C=\pi$求出另一角，再运用正弦定理求解.

**例 2** 在$\triangle ABC$中，已知$a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{2}$，$B=45^\circ$，求$A$、$C$和$c$.



**思维点拨** 本题是解三角形第二类问题（已知两边和其中一边的对角，求三角形其他边与角），可用正弦定理求解.

**解答** 由正弦定理，得

$\sin A=\dfrac{a\sin B}{b}=\dfrac{\sqrt{3}\sin 45^\circ}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore A=60^\circ$或$120^\circ$.

(1)当$A=60^\circ$时，$C=180^\circ-(A+B)=75^\circ$，

$c=\dfrac{b\sin C}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{2}\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

(2)当$A=120^\circ$时，$C=180^\circ-(A+B)=15^\circ$，

$c=\dfrac{b\sin C}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{2}\sin 15^\circ}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

故$A=60^\circ$，$C=75^\circ$，$c=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$或$A=120^\circ$，$C=15^\circ$，$c=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

**易忽视点提示**

本题易忽视$A=120^\circ$的情况. 事实上，$\because B=45^\circ<90^\circ$，$a\sin B<b<a$. $\therefore \triangle ABC$有两解，即$A$有锐角和钝角的两个值.

### 学点 3 三角形解的讨论

已知两边和其中一边的对角，不能惟一确定三角形，解这类三角形问题可能出现一解、两解或无解的情况，这时应结合“三角形中，大边对大角”的定理及几何作图帮助理解.

图 1.1-4 和图 1.1-5 说明了在$\triangle ABC$中，已知$a$、$b$和$A$时，解三角形的各种情况.

(1)当$A$为锐角时，

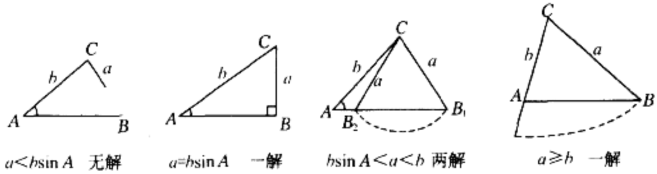



图 1.1-4

(2)当 $A$ 为直角或钝角时，


图 1.1-5

**问题研讨 2**

在$\triangle ABC$中，已知 $a=x$，$b=2$，$B=45^\circ$，如果利用正弦定理解三角形时有两解，求 $x$ 的范围.

有甲生、乙生分别给出两种解答，你认为它们的解答正确吗？为什么？

甲生：$\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，即$\dfrac{x}{\sin A}=\dfrac{2}{\sin 45^\circ}$ $\therefore \sin A=\dfrac{x}{2\sqrt{2}}$

由 $\sin A\leqslant 1$ 得 $x\leqslant 2\sqrt{2}$，又 $x>0$，故 $x$ 的范围是$(0,2\sqrt{2}]$.

乙生：$\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，即$\dfrac{x}{\sin A}=\dfrac{2}{\sin 45^\circ}$，$\therefore \sin A=\dfrac{x}{2\sqrt{2}}$，在三角形中，大边对大角，假若 $a\leqslant b$，则 $0<A\leqslant 45^\circ$，方程 $\sin A=\dfrac{x}{2\sqrt{2}}$ 只有一解，与已知两解矛盾.

故应 $a>b$，即 $x>2$；又 $\sin A\leqslant 1$，$\therefore x\leqslant 2\sqrt{2}$

从而 $x$ 的范围是$(2,2\sqrt{2}]$.



**例 3** 根据下列条件，判断解三角形时是否有解？若有解，有几个解？

(1)$b=10$，$A=45^\circ$，$C=70^\circ$；　　(2)$a=60$，$b=48$，$B=60^\circ$；

(3)$a=7$，$b=5$，$A=80^\circ$；　　(4)$a=14$，$b=16$，$A=45^\circ$.

**思维点拨** 根据已知条件，如何判断三角形是否有解，可以从两个方面看，一是从几何作图看：能否作出符合条件的三角形，能作，可作几个；二是从上面对解三角形讨论的结论进行判断.

**解答** (1)因为知道$\triangle ABC$的两角$A=45°$,$C=70°$及夹边$b=10$,由全等三角形的判定知此三角形是惟一的,即只有一解.

(2)$\because\ a\sin B=60\times\frac{\sqrt{3}}{2}=30\sqrt{3}$,$b=48$,

$\therefore\ b<a\sin B$,无解.

即不存在这样的三角形.

(3)$\because\ a=7$,$b=5$,$A=80°$,

$\therefore\ a>b$,有一解.

即这样的三角形是惟一的.

(4)$\because\ b\sin A=16\times\frac{\sqrt{2}}{2}=8\sqrt{2}$,$a=14$,

$\therefore\ b\sin A<a<b$,有两解.

即符合条件的三角形有两个.



## 拓广延伸

**正弦定理传统推导方法及运用**

1. 任意三角形面积的公式

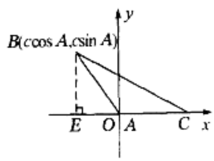


图 1.1 - 6

如图 1.1 - 6,以$\triangle ABC$的顶点$A$为原点,边$AC$所在射线为$x$轴的正半轴建立直角坐标系,则顶点$B$的坐标是$(c\cos A, c\sin A)$,容易知道,$AC$边上的高$BE$就是$B$点的纵坐标$c\sin A$,于是$\triangle ABC$的面积

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}\times AC\times BE=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

同样可得 $S_{\triangle}=\frac{1}{2}ca\sin B$,$S_{\triangle}=\frac{1}{2}ab\sin C$.

由此,我们得到关于任意三角形面积的公式:

$$\boxed{S_{\triangle}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C}$$

也就是说,三角形的面积等于任意两边与它们夹角的正弦的积的一半.

2. 正弦定理的传统推导

将等式$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$

各除以$\frac{1}{2}abc$,可得$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$.

由此,我们得到关于任意三角形边和角间的关系的另一个重要定理:

正弦定理 在一个三角形中,各边和它所对角的正弦的比相等.

$$\boxed{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}}$$

**例 4** 已知△ABC中，$a=3+\sqrt{3}$，$c=3-\sqrt{3}$，$C=15°$，求$S_{\triangle ABC}$.

**思维点拨** 欲求$S_{\triangle ABC}$，需求$B$. 利用正弦定理可求出$B$角.

**解答** 由正弦定理，得$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$.

$\therefore \sin A=\frac{a\sin C}{c}\approx 0.963$.

$\therefore A=74.4°$.

$\therefore B=180°-15°-74.4°=90.6°$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})\cdot\sin 90.6°\approx 3.00$.

**方法规律**

由于三角形面积公式有三种形式，因此根据已知条件选择适当形式是很重要的. 如本例已知边$a$，$c$，因此选择$S_{\triangle}=\frac{1}{2}ca\sin B$，往下只需求出$B$角即可.

**变式题** 在△ABC中，$ab=60\sqrt{3}$，$\sin B=\sin C$，面积为$15\sqrt{3}$，求$b$的值.

**思维点拨** 由已知条件$ab=60\sqrt{3}$，因此我们选择用$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$去求解.

**解答** $\because \sin B=\sin C$，由正弦定理$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$得$b=c$，$\therefore B=C$.

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=15\sqrt{3}$，$ab=60\sqrt{3}$.

$\therefore \sin C=\frac{1}{2}$，$C=B=30°$（$C=120°$舍去），$\therefore A=120°$.



又由正弦定理$\frac{a}{\sin 120°}=\frac{b}{\sin 30°}$得$a=\sqrt{3}b$，代入$ab=60\sqrt{3}$，$\therefore b=2\sqrt{15}$.

**易错点提示**

由$\sin B=\sin C$得$B=C$或$B+C=\pi$是错误的. 事实上$A+B+C=\pi$，因此不可能有$B+C=\pi$，所以这种情况要舍去.

## 课时作业

**一、教材习题**

教材第6页 练习A，练习B 1，2

教材第10页 习题1—1A 1

**二、补充习题**

1. 在△ABC中，若$\sqrt{3}a=2b\sin A$，则$B$为 （ ）

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$

2. 在$\triangle ABC$中，$a=20$，$b=10$，$B=29^\circ$，则此三角形解的情况是　　(　　)

A. 无解　　B. 有一解　　C. 有两解　　D. 有无数个解

3. 在$\triangle ABC$中，若$\frac{\sin A}{a}=\frac{\cos B}{b}$，则$B$的值为　　(　　)

A. $30^\circ$　　B. $45^\circ$　　C. $60^\circ$　　D. $90^\circ$

4. 在$\triangle ABC$中，若此三角形有一解，则$a$、$b$、$A$满足的条件为________.

5. 在$\triangle ABC$中，$a=2$，$A=30^\circ$，$C=45^\circ$，则$\triangle ABC$的面积$S_{\triangle ABC}$等于________.

6. 在$\triangle ABC$中，已知$A=30^\circ$，$B=120^\circ$，$b=5$，求$C$及$a$与$c$的值.



7. 在$\triangle ABC$中，$C=45^\circ$，$A=60^\circ$，$b=2$，求此三角形最小边的长及$a$与$B$的值.

8. 在$\triangle ABC$中，$c=\sqrt{8}$，$a>b$，$\tan A+\tan B=5$，$\tan A\cdot\tan B=6$，求$a$、$b$.

# *第2课时　拓广习题课

## 温故知新

**一、$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$（$R$为$\triangle ABC$外接圆的半径）的应用**

设$\triangle ABC$的外接圆的圆心为$O$，半径为$R$，如图 1.1-7.

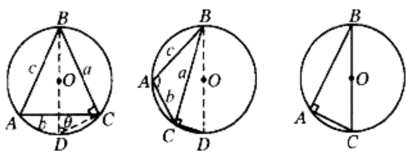



图 1.1-7

由图 1.1-7(1)知，当$\angle A$为锐角时，$\angle A=\angle D$.

由图 1.1-7(2)知，当$\angle A$为钝角时，$\angle A=180^\circ-\angle D$.

$\therefore \sin A=\sin D=\frac{a}{BD}=\frac{a}{2R}$，$\therefore \frac{a}{\sin A}=2R$.

当$\angle A=90°$时，如图1.1-7(3)，$\frac{a}{\sin A}=a=BC=2R$.

$\therefore$ 对于任意三角形都有$\frac{a}{\sin A}=2R$.

同理可证：$\frac{b}{\sin B}=2R$，$\frac{c}{\sin C}=2R$.

从而可得：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

**特别提示**

(1)以上推导过程实际上又提供了一种证明正弦定理的方法，同时还揭示了三角形边角与其外接圆半径之间的关系.

(2)正弦定理还有如下变形，它们在解题中有广泛的应用：

①$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$；

②$a\sin B=b\sin A$，$c\sin B=b\sin C$，$c\sin A=a\sin C$；

③$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$；

④$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$；

⑤$\sin A=\frac{a}{2R}$，$\sin B=\frac{b}{2R}$，$\sin C=\frac{c}{2R}$等(其中$R$为三角形外接圆半径).

**例1** 在$\triangle ABC$中，若$\sin A:\sin B:\sin C=m:n:l$，则$a+b+c=S$，求$a$.

**思维点拨** 利用$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$将角的关系转化为边的关系是解题的关键.

**解答** 由$\sin A=\frac{a}{2R}$，$\sin B=\frac{b}{2R}$，$\sin C=\frac{c}{2R}$知



$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$，

即$a:b:c=m:n:l$.

令$a=mk$，则$b=nk$，$c=lk$，由$a+b+c=S$得$k=\frac{S}{m+n+l}$，

$\therefore a=km=\frac{mS}{m+n+l}$.

**方法技巧**

(1)根据解题的需要，由正弦定理可以实施边角的相互转换，即$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$.

(2)对于"连比式"$a:b:c=m:n:l$，为了将$a,b,c$分离出来，可设$a=mk$，$b=nk$，$c=lk$. 要注意体会这种方法技巧的运用.

**例2** 在$\triangle ABC$中，角$A$、$B$、$C$所对的边分别为$a$、$b$、$c$，且$c=10$，又知$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}$

$=\frac{4}{3}$，求 $a$、$b$ 及 $\triangle ABC$ 的内切圆的半径.

**思维点拨** 将已知条件“$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$”中两边的比转化为角的比，从而判断出三角形的形状.

**解答** 由 $\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}$，$\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{b}{a}$，可得 $\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{\sin B}{\sin A}$

变形为 $\sin A\cos A=\sin B\cos B$，

$\therefore \sin 2A=\sin 2B$，又 $\because a\neq b$.

$\therefore 2A=\pi-2B$，$\therefore A+B=\frac{\pi}{2}$.

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

由 $\begin{cases} a^2+b^2=10^2, \\ \frac{b}{a}=\frac{4}{3}. \end{cases}$ 解得 $a=6$，$b=8$.

所以内切圆的半径为 $r=\frac{1}{2}(a+b-c)=\frac{6+8-10}{2}=2$.

**特别提示**

在 $Rt\triangle ABC$ 中，$C=90^\circ$，$A$、$B$、$C$ 的对边分别为 $a$、$b$、$c$，内切圆半径为 $r$，外接圆半径为 $R$，面积为 $S_\triangle$，则有以下结论：

(1)$R=\frac{c}{2}$；(2)$r=\frac{1}{2}(a+b-c)$；(3)$S_\triangle=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}r(a+b+c)$.

**例 3** 已知在 $\triangle ABC$ 中，$A+C=2B$，且 $\tan A$ 和 $\tan B$ 是方程 $x^2-2(1+k)x+3+2k=0$ 的两根，若三角形的面积为 $2(3-\sqrt{3})$，求这个三角形的三内角及三边.

**思维点拨** 本题由韦达定理求出 $A$、$B$、$C$ 之值，再逆用面积公式，应用正弦定理求出 $a$、$b$、$c$ 之值.

**解答** 设 $A=B-d$，$C=B+d$，则

$(B-d)+B+(B+d)=180^\circ$，$\therefore B=60^\circ$.

依题意，由韦达定理，得

$\begin{cases} \tan A+\tan 60^\circ=2(1+k), \\ \tan A\cdot\tan 60^\circ=3+2k. \end{cases}$

解得 $\tan A=2+\sqrt{3}$，$\therefore A=75^\circ$，$B=60^\circ$，$C=45^\circ$.

由 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=2R^2\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$

$=2R^2\sin 75^\circ\cdot\sin 60^\circ\cdot\sin 45^\circ$

$=2(3-\sqrt{3})$，

$\therefore R=2(\sqrt{3}-1)$.

再由正弦定理，得

$a=2R\sin A=2\cdot 2(\sqrt{3}-1)\sin 75^\circ$

$=4(\sqrt{3}-1)\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$=2\sqrt{2}.$

$b=2R\sin B=2\cdot 2(\sqrt{3}-1)\cdot\sin 60^\circ$

$=4(\sqrt{3}-1)\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6-2\sqrt{3}.$

$c=2R\sin C=2\cdot 2(\sqrt{3}-1)\cdot\sin 45^\circ$

$=4(\sqrt{3}-1)\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=2\sqrt{6}-2\sqrt{2}.$

**方法技巧**

本例是利用 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$ 将三角形面积公式 $S_{\triangle}=\frac{1}{2}ab\sin C$ 转化为 $S_{\triangle}=2R^2\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$，从而求出其外接圆半径 $R$，进而求出三角形三边.

## 二、利用正弦定理判断三角形的形状

判断三角形形状是一类重要题型.一般而言，利用正弦定理可将边角关系转化为“纯”角、“纯”边的关系，或者求出具体的边、角的值，再进行判断.

**例4** 在△$ABC$中，如果 $\lg a-\lg c=\lg\sin B=-\lg\sqrt{2}$，并且 $B$ 为锐角，试判断此三角形的形状特征.

**思维点拨** 从条件出发，利用正弦定理，进行代换、转化、化简、运算，找出边与边、角与角的关系，或求出角的大小.



**解答** 由 $\lg a-\lg c=\lg\sin B=-\lg\sqrt{2}$，

得：$\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow B=45^\circ$（$\because 0^\circ<B<90^\circ$）

$\dfrac{a}{c}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\dfrac{\sin A}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ①

将 $A=135^\circ-C$ 代入①，得 $\sqrt{2}\sin C=2\sin(135^\circ-C)$.

$\therefore\ \sin C=\sin C+\cos C$，$\therefore\ \cos C=0$，

得 $C=90^\circ$，$\because\ A=45^\circ$，

$\therefore$ △$ABC$ 是等腰直角三角形.

**方法技巧**

欲判断三角形的形状特征，必须研究边与边的关系：是否两边相等？是否三边相等？还要研究角与角的关系：是否两角相等？三个角相等？有无直角？有无钝角？