

碧海书道
BOOK HOUSE

高等学校数学
学习辅导丛书

10年金版

INSTRUCTION TEXTBOOK SERIES
FOR MATHEMATICS

高等数学

同步辅导

丛书主编 / 北京航空航天大学 徐兵

编著 王丽燕 柳 扬

配同济五版



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

碧海书道
BOOK HOUSE

高等学校数学
学习辅导丛书

10年金版

INSTRUCTION TEXTBOOK SERIES
FOR MATHEMATICS

高等数学 同步辅导

丛书主编 / 北京航空航天大学 徐兵

编著 王丽燕 柳扬

配同济五版



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

© 大连理工大学出版社 2006

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步辅导(配同济五版)/王丽燕,柳扬编著. —大连:大连理工大学出版社,2006.7

高等学校数学学习辅导丛书

ISBN 7-5611-3247-6

I. 高… II. ①王… ②柳… III. 高等数学—高等学校—教学参考资料
IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 072198 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023

发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466

E-mail: dutp@dutp.cn URL: <http://www.dutp.cn>

大连业发印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:147mm×210mm
2006 年 7 月第 1 版

印张:17.5 字数:713 千字
2006 年 7 月第 1 次印刷

责任编辑:梁 锋 于建辉

责任校对:碧 海

封面设计:熔 点

定 价:21.80 元

丛书特色

名校名师亲自编写 作者教学经验丰富，深受学生欢迎，作者亲力亲为。

立体化多层次设计 精心设计四大系列丛书：

- ◆**习题全解（全析）系列** “不是好学生的作业本，而是优秀教师习题课的教案”。
- ◆**同步辅导系列** 帮助学生适应从中学到大学学习方式的转变。
- ◆**全程学习指导系列** 培养学生基本解题能力，同时兼顾考研基本题型的介绍，使课程学习与考研准备相衔接。
- ◆**典型题精讲系列** 在更高层次上引导学生掌握数学算理与数学思想。

全新理念，全新组合 帮助读者培养用数学思想进行逻辑思考的能力，用数学力增强读者的竞争力。

编读互动

免费下载学习资源 设有专用网站，读者可以免费下载自测试题，拜读相关知名人士的教学、人生心得。

自选名师亲自答疑 读者可以将问题发到指定邮箱，并可指定编委会的任一老师给予解答。

挑错有礼 真诚欢迎读者指正书中的编写及印刷错误并提出合理化建议，一经核实并采纳，我们将对最早提出的读者赠送相关图书。

联系方式

网 址：<http://www.bhsd.dutp.cn>

E-mail：bihaishudao@dutp.cn

电 话：0411-84708947 84707962

通讯地址：大连市软件园路80号理工科技园B座
大连理工大学出版社

科技教育出版中心“碧海书道”收

邮政编码：116023

团购热线：0411-84708898

**我们坚决反对假借知名高校名义
并编造作者的行为！**

我们坚决抵制让学生代笔的行为！

我们致力于打造“零差错”图书！

碧海扬帆书做伴 长空翱翔道为先
碧海书道 强势推出

高等学校数学学习辅导丛书

习题全解(全析)系列

高等数学学习题全解全析(配同济五版)
线性代数学习题全解全析(配同济四版)
概率论与数理统计习题全解全析(配浙大三版)
微积分习题全解(配人大修订版)
线性代数习题全解(配人大三版)
概率论与数理统计习题全解(配人大修订版)
数学分析习题全解全析(配华东师大三版)
高等代数习题全解全析(配高教四版)
近世代数习题全解全析

同步辅导系列

高等数学同步辅导(配同济五版)
线性代数同步辅导(配同济四版)
概率论与数理统计同步辅导(配浙大三版)

全程学习指导系列

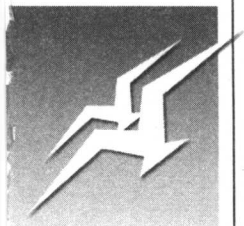
高等数学全程学习指导(配同济五版)
线性代数全程学习指导(配同济四版)
概率论与数理统计全程学习指导(配浙大三版)
微积分全程学习指导(配人大修订版)
线性代数全程学习指导(配人大三版)
概率论与数理统计全程学习指导(配人大修订版)

典型题精讲系列

高等数学典型题精讲
线性代数典型题精讲

封面设计:  熔点创意
MELTING POINT

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

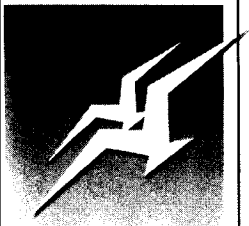


高等学校数学学习辅导丛书

编写委员会

主 任	北京航空航天大学	徐 兵	教授
副主任	清华大学	韩云瑞	教授
委 员	大连理工大学	姜乃斌	教授
	浙江大学	秦禹春	教授
	大连大学	王丽燕	教授
	大连海事大学	王志平	教授
	南开大学	周概容	教授

INSTRUCTION
TEXTBOOK SERIES
FOR MATHEMATICS



总序

大学数学是高等学校各门类、专业学生必修的基础课,对理工类、经管类学生都非常重要。21 世纪是知识经济时代,数学的重要性更显突出,人们甚至把“数学力”看作是“竞争力、成功力、管理力、领导力”。对于准备报考研究生的同学来说,其重要性更是不言而喻。

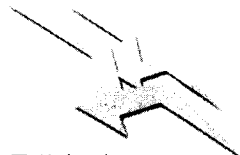
作为一名从事大学数学教学和科研工作 40 余年的教师,我一直密切关注着大学数学的教育状况。我很早就注意到大连理工大学出版社一直在为学生提供高质量的教学辅导书而努力着。10 多年来,该社先后出版了 50 余种相关的大学数学辅导图书,我经常在课堂上、自习课上、考研辅导班上看到学生们在使用。我也多次仔细阅读他们的辅导书,对于图书的内在质量和选题设计,我非常认可,因此经常向学生推荐。在目前浮躁的图书市场上,大连理工大学出版社的这种真正为学生考虑的做法是非常值得弘扬的。

在出版社推出《高等学校数学系列辅导丛书》10 周年之际,我受出版社之托,担任该系列丛书编委会主任,深感责任重大。一方面,需要延续出版社一直追求的高质量的图书内在品质;另一方面,需要在对现有图书进行规划和整合的基础上,结合目前学生的需求、高校课程教学的基本要求与教学状况以及最新《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》有所创新。为此,本次修订主要围绕以下几个方面展开:

第一,坚持聘请名校名师亲自编写的原则。本套丛书编委会的成员全部来自知名高校,并且都是知名教师。例如,韩云瑞教授在清华大学“学生心目中的好老师”评选活动中,2005、2006 连续两年全校排名第一;大连大学的王丽燕教授一直是“学生最喜爱的老师”;南开大学的周概容教授连续 17 年担任考研《概率论与数理统计》命题组组长。这些优秀教师多年积累的教学经验一定会给学生带来意想不到的收获。

第二,对于全部习题进行重新演算,以保证解题过程的正确,而

**INSTRUCTION
TEXTBOOK SERIES
FOR MATHEMATICS**



且在编委会成员之间相互切磋。对于典型习题,努力寻求最优解法,对于重点例题、习题给出多种解法,以帮助学生打开解题思路。我们希望通过编委会的共同努力,可以让读者真正掌握大学数学的思想和算理。

第三,针对学生不同的学习阶段,设计了不同层次的系列图书,力图为学生提供学习数学的立体空间,引导学生全方位、多角度逐步认识并掌握大学数学,从而使得每本书都成为学生天天见面的辅导老师。大一新生刚进大学校门,要尽快适应大学的学习环境,注重夯实大学数学的基础,为学习专业课打下基础;高年级阶段,很多学生准备进一步学习深造,报考研究生,对大学数学需要进行全面复习及提高。针对这些特点,本套丛书设计了四大系列。

习题全解(全析)系列 为读者解答教材中的习题,像习题课一样,与学生们一起通过对习题的分析、讨论、求解、总结,扎实掌握基础知识,领悟数学的真谛。本系列图书“不是好学生的作业本,而是优秀教师习题课的教案”。读者也可以将该系列丛书作为工具书与教材配套使用。

同步辅导系列 按节同步,讲解细致,其主要特点是“基础、同步”,帮助读者重点掌握大学数学中的“基本概念、基本理论、基本方法”。本书可以帮助学生逐步适应从中学时代“以老师讲解为主”到大学时代“以学生自学为主”学习方式的转变。

全程学习指导系列 指导学生准确理解大学数学中的概念、原理,熟练掌握解题的基本思路、方法,提高分析问题、解决问题的能力,同时,让学生熟悉研究生考试的各类题型,在大学低年级阶段就为将来报考研究生打下坚实的基础并提前做好准备。

典型题精讲系列 以习题讲解为主,在注重基本解题能力培养的同时,增加了一些题目难度较大、但颇具特色的习题,在更高层次上引导学生掌握数学的算理与数学思想。

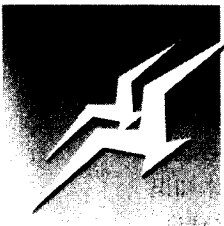
我们欢迎读者通过各种方式与我们联系,提出建议与意见,以利于本套丛书千锤百炼,惠及更多学子。

祝大家学习进步,前程似锦!

徐 兵

2006年6月

于北京航空航天大学



编者的话

致读者的一封信公开信

亲爱的读者朋友：

您好！

当您打开本书时，我已在默默地感谢您了，感谢您对我的信任与支持！在这里我想对信任与支持我的读者朋友们说点心里话。

我从事高等数学教学已有二十多个年头，从这个意义上说，我已是个“老”教师了。从我自身的学习体会及教学经验，我认为，学好高等数学的关键不是做了多少道难题，而是要真正掌握其基础知识，这是你的内力！如果你缺乏这种内力，就永远发不出功来，学好高等数学只能成为你的一种奢望和梦想。教学大纲和考研大纲都要求“基本概念、基本理论、基本方法”，就是这个原因。我曾与浙江大学秦禹春教授合编了我的第一本高等数学辅导书——《高等数学全程学习指导》。此书出版后得到了广大读者的普遍喜爱。许多同行都告诉我，他们那里的学生几乎人手一册，成为许多高校“指定”的必备书。经数次修订，发行总量已超过十万册。

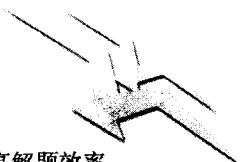
目前书店里关于高等数学方面的辅导书很多，但真正重视“基础”的并不多。我曾遇到一位学生，手里拿着一大摞考研辅导书，整天钻研，但连续三年考研都名落孙山。经过交谈，我很快发现，他的问题就出在“基础”太差。我让他扔掉所有的辅导书，跟我听课，从“基础”入手，结果在后来的考研中取到了令他自己都意想不到的高分，并顺利地考上了一所很好的大学的研究生。

本书的落脚点就在“基础、同步”上。你读完这本书，必将感到再难的数学题也都是基础知识的有机堆积，期末考试将不在话下，考研题也不再可怕，甚至可以轻松作答！

本书的每一章都分为宏观分析和微观精讲两大部分。

宏观分析部分包括“导读”、“本章知识脉络图”和“应记应背”三个版块。“导读”介绍本章的主要内容及其相互联系、重点难点等；“本章知识脉络图”则将本章的知识以及相互联系用图的形式直观展现，一目了然；“应记应背”则将一些

INSTRUCTION
TEXTBOOK SERIES
FOR MATHEMATICS



常用的、应该牢记的公式集中列出,理解并记住这些公式将大大提高解题效率。

这些内容将指导大家如何总结、精炼与提高,是学习中“由多到少”的过程。

微观精讲部分则细致到每一章,每一节,包括“同步精讲精练”、“教材习题同步解析”和“单元测试”三个版块。“同步精讲精练”除指出应该掌握的基本知识外,还告诉大家应该注意之处,让大家更透彻、深入地理解基本概念、基本理论,这是对课堂的补充,是“弦外之音”。本版块还明确指出了大家普遍容易出错之处、出错原因以及怎样才能避免出错。同时,我们对典型例题进行了剖析,以指导大家分析问题和解决问题。每一节配备了少量的自我测试题,是为大家进一步巩固提高而设的,大家还可以通过每一章后的“单元测试”,检验一下自己掌握本章内容的程度,少量的“*”题是献给挑战者们的。每一章都构成了完备的知识体系和几乎全部的题型。高等数学一般都是几个小班的合堂课,任课教师除了上几门课外还要进行一定的科研工作,他们大多没有精力对学生作业进行全批全改,为了方便读者对照和分析自己完成作业的情况,“教材习题同步解析”给出了《高等数学》(同济五版)书后习题的解答。

本部分是一个“由少到多”的过程。

为了能将平日的学习与考研有机联系,书中有针对性地选用了大量考研真题,并采用“年代/类别/分值”的标注方式,如“060106”说明此题是2006年数学一的考题,分值6分。

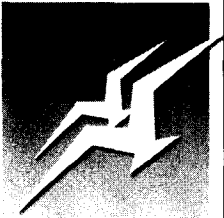
本书虽然按《高等数学》(同济五版)章节顺序编写,但自成体系,无论你学的是何种版本的教材,本书都可以给你有力的指导。本书内容是我教学二十余年经验的积累,在考研第一轮辅导班上也讲过,反响很好,学员们觉得自己进步很大,成绩提高很快。

如果本书对你确有帮助,希望你能告诉你的同学和学弟学妹们,让他们也尽快摆脱困境,与你共同进步。如果你发现了本书的错误或不足之处,希望你能通过出版社转告我,我将十分感谢你,正是因为你而使我不断提高!

限于编者的水平,本书观点必存不成熟之处,诚恳期望同行和读者不吝批评指正,共同进步!最后祝愿各位读者朋友学习进步,学业有成!

王丽燕

2006年7月



目 录

第一章 函数与极限 / 1

导 读 / 1

应记应背 / 3

教材习题同步解析 / 21

本章知识脉络图 / 2

同步精讲精练 / 3

单元测试 / 43

第二章 导数与微分 / 46

导 读 / 46

应记应背 / 47

教材习题同步解析 / 60

本章知识脉络图 / 47

同步精讲精练 / 49

单元测试 / 80

第三章 微分中值定理与导数的应用 / 82

导 读 / 82

应记应背 / 83

教材习题同步解析 / 104

本章知识脉络图 / 83

同步精讲精练 / 84

单元测试 / 130

第四章 不定积分 / 133

导 读 / 133

应记应背 / 134

教材习题同步解析 / 149

本章知识脉络图 / 134

同步精讲精练 / 135

单元测试 / 173

第五章 定积分 / 175

导 读 / 175

应记应背 / 176

教材习题同步解析 / 193

本章知识脉络图 / 176

同步精讲精练 / 177

单元测试 / 211

INSTRUCTION
TEXTBOOK SERIES
FOR MATHEMATICS

第六章 定积分的应用 / 213

导 读 / 213

本章知识脉络图 / 214

应记应背 / 214

同步精讲精练 / 216

教材习题同步解析 / 229

单元测试 / 243

第七章 空间解析几何与向量代数 / 245

导 读 / 245

本章知识脉络图 / 246

应记应背 / 246

同步精讲精练 / 249

教材习题同步解析 / 267

单元测试 / 284

第八章 多元函数微分法及其应用 / 286

导 读 / 286

本章知识脉络图 / 287

应记应背 / 287

同步精讲精练 / 288

教材习题同步解析 / 307

单元测试 / 328

第九章 重积分 / 330

导 读 / 330

本章知识脉络图 / 331

应记应背 / 331

同步精讲精练 / 332

教材习题同步解析 / 350

单元测试 / 374

第十章 曲线积分与曲面积分 / 375

导 读 / 375

本章知识脉络图 / 376

应记应背 / 376

同步精讲精练 / 378

教材习题同步解析 / 404

单元测试 / 428

第十一章 无穷级数 / 430

导 读 / 430

本章知识脉络图 / 431

应记应背 / 431

同步精讲精练 / 433

教材习题同步解析 / 452

单元测试 / 477

第十二章 微分方程 / 480

导 读 / 480

本章知识脉络图 / 481

应记应背 / 481

同步精讲精练 / 482

教材习题同步解析 / 502

单元测试 / 549

**INSTRUCTION
TEXTBOOK SERIES
FOR MATHEMATICS**

第一章 函数与极限

导 读

高等数学的研究对象是变量,研究变量的一种基本方法是极限方法,要学好高等数学,理解极限的概念是十分必要的。

第一章主要包括函数与极限两部分内容。

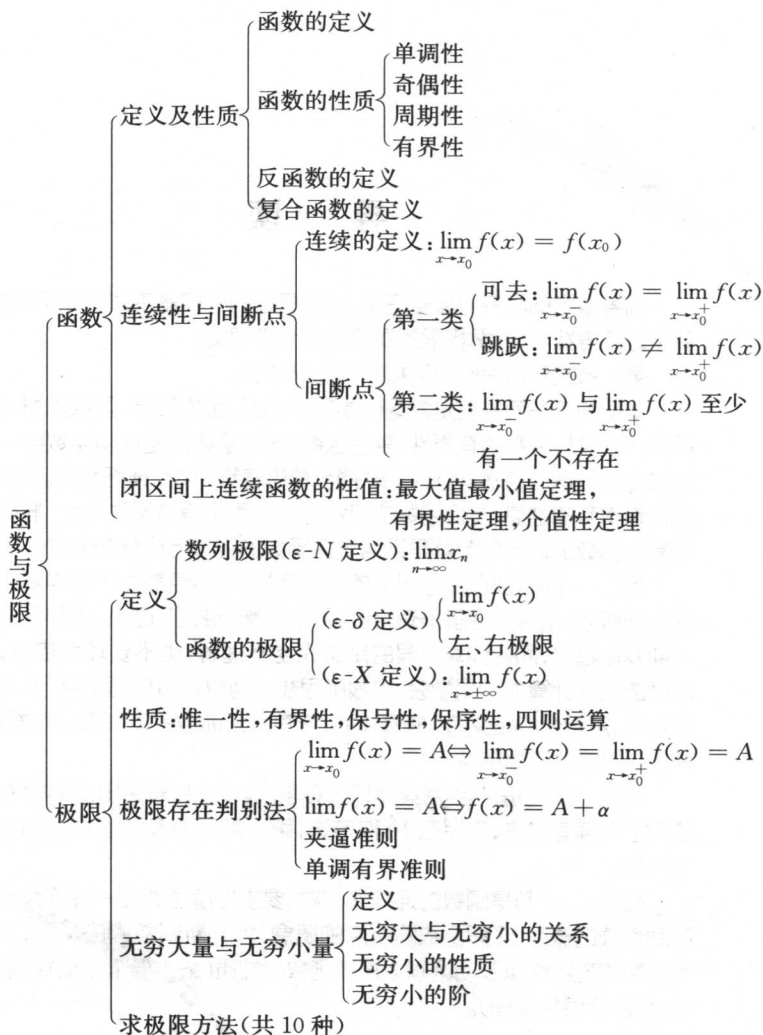
本章的第一节主要是复习中学数学知识,比如集合、函数的概念及性质等。但邻域、函数的有界性、复合函数、初等函数等是在中学数学中不曾有过的新知识点,我们将在本章“同步精讲精练”中作详细介绍。函数的有界性是本节的难点,复合函数的复合与分解既是重点又是难点,准确地进行复合函数的复合与分解是学习复合函数的导数与积分的前提。

第二~四节都在介绍极限的概念与性质。尽管教学大纲中要求理解极限的概念,但真正理解确有难度,希望你能“硬挺”过去。极限是函数的一种变化趋势,即使你对极限的定义完全不理解,也不要轻言放弃,因为后面的基本计算很容易学会,极限的思想也可以通过以后的学习(如导数的定义、定积分的定义等)慢慢体会,总有一天你也会体会到“ ε - δ 语言”有种古诗般意犹未尽的美。

第五~七节重在如何具体地计算极限。本章共总结出10种计算极限的方法供读者参考,掌握这10种方法,第一章所涉及的求极限问题可迎刃而解。

第八~十节是函数的连续性问题。要求理解函数在一点连续和在一区间连续的概念,了解函数间断点的概念,会判断间断点的类型,了解初等函数的连续性以及闭区间上连续函数的性质(最大值最小值定理、有界性定理、介值性定理)。

本章知识脉络图



应记应背

① 初等函数恒等式

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$$

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$$

$$f^{-1}[f(x)] = x \quad (f[f^{-1}(x)] = x)$$

② 常用极限公式

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \quad (a > 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty \quad (a > 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccot} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \quad (a > 1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad (|q| < 1)$$

③ 常用的等价无穷小

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $\arctan x \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $(1+x)^a - 1 \sim ax$, $a^x - 1 \sim x \ln a$.

同步精讲精练

一、映射与函数

助 学

函数与反函数的概念,以及函数的单调性、奇偶性、周期性等在中学数学中就已经很熟悉了,这里不再赘述,我们重点讲函数的有界性。

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X \subset D$, 如果存在数 k , 对于所有的 $x \in X$, 恒有

$$f(x) \leq k \quad (f(x) \geq k)$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界(下界);如果 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界,则称它在 X 上有界,否则称它在 X 上无界。

假设 $f(x)$ 在 X 上有上界 k_1 , 下界 k_2 , 即 $k_2 \leq f(x) \leq k_1$, 取 $M = \max\{|k_1|, |k_2|\}$, 则必有 $|f(x)| \leq M$ 。反之, 若存在 $M > 0$, 使 $|f(x)| \leq M$, 即 $-M \leq f(x) \leq M$, 这说明 $f(x)$ 有上界 M 和下界 $-M$ 。由此可得函数 $f(x)$ 在 X 上有界的一个充要条件是: 存在一个正数 M , 使得对于所有的 $x \in X$, 总有

$$|f(x)| \leq M$$

函数有界性的几何意义: 假设 $X = [a, b]$, $f(x)$ 在 X 上有界是指一定存在两条直线 $y = k_1$ 和 $y = k_2$, 使曲线 $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ 夹在直线 $y = k_1$ 和 $y = k_2$ 之间(参见图 1-1), 否则就是无界。

例如 $y = \sin x$ 。

由于 $|\sin x| \leq 1$ (参见图 1-2), 所以函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界。

又如 $y = \frac{1}{x}$ 。

由于 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 内, 有 $0 < \frac{1}{x} < 1$, 所以 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 内有界。但在 $(0, 1]$ 内却是无界的(参见图 1-3)。因为对于任意的 $M > 0$ (无论它多么大), 总存在 $x_0 = \frac{1}{2M} \in (0, 1]$, 使得 $y(x_0) = 2M > M$, 即不存在直线 $y = k_1$, 使曲线 $\{(x, \frac{1}{x}) \mid x \in (0, 1]\}$ 在直线 $y = k_1$ 和 $y = 1$ 之间。

由于 $\frac{1}{x} \geq 1 (x \in (0, 1])$, 所以 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1]$ 上是有下界的, 无界的原因是没有上界。

同样 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, -1)$ 上有界, 在 $[-1, 0)$ 上有上界但无下界, 是无界的。

【例 1-1】 确定函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性。

剖析 确定一个函数的奇偶性, 关键是确定 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系。这样的问题通常分两步解决。第一步是求出 $f(-x)$, 第二步是确定 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad f(-x) &= \ln(-x + \sqrt{1+(-x)^2}) \\ &= \ln(\sqrt{1+x^2} - x) \end{aligned}$$

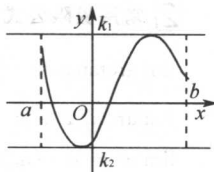


图 1-1

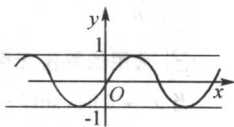


图 1-2

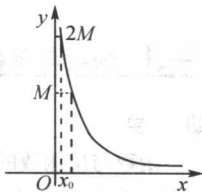


图 1-3

$$\begin{aligned}
 &= \ln \frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x} \\
 &= \ln \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} \\
 &= -\ln(\sqrt{1+x^2}+x) = -f(x)
 \end{aligned}$$

所以函数 $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2}+x)$ 是奇函数。

2. 基本初等函数

下列函数称为基本初等函数:

- (1) 幂函数 $y = x^a$ (a 为常数)
- (2) 指数函数 $y = a^x$ (a 为常数, $a > 0$ 且 $a \neq 1$)
- (3) 对数函数 $y = \log_a x$ (a 为常数, $a > 0$ 且 $a \neq 1$)
- (4) 三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$
- (5) 反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$

3. 复合函数

若函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_1 , 函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域为 D_2 , 值域为 $W_2 = \{u \mid u = \varphi(x), x \in D_2\}$ 且 $W_2 \cap D_1 \neq \emptyset$, 则 $y = f[\varphi(x)]$ 确定了一个函数, 称为由 $y = f(u), u \in D_1$ 和 $u = \varphi(x), x \in D_2$ 复合而成的复合函数. f 又称为外函数, φ 称为内函数, x 为自变量, y 为因变量, u 为中间变量。

如 $y = \tan \frac{x}{2}$ 可以看做由 $y = \tan u$ 和 $u = \frac{x}{2}$ 复合而成的。又如 $y = \sqrt{x^2} = |x|$, 可看做由 $y = \sqrt{u}, u = x^2$ 复合而成的。 $y = \sqrt{\tan \frac{x}{2}}$ 可以看做由 $y = \sqrt{u}, u = \tan v, v = \frac{x}{2}$ 复合而成的, 这里 u, v 都是中间变量。

但是, 并不是任意两个函数都能复合成一个复合函数, 如 $y = \sqrt{u}$ 和 $u = -(x^2 + 1)$, 由于 $y = \sqrt{u}$ 的定义域 $D_1 = [0, +\infty)$, $u = -(x^2 + 1)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $W_2 = (-\infty, -1)$, $D_1 \cap W_2 = \emptyset$, 即对于 $u = -(x^2 + 1)$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内任何 x 值所对应的 u 值 ($u \leq -1$), 都不能使 $y = \sqrt{u}$ 有意义。

思考 $y = \arccos u$ 和 $u = 2 + x^2$ 也不能复合成一个复合函数, 为什么?

【例 1-2】 (复合函数的分解) 下列函数可以看成由哪些简单函数复合而成?

- (1) $y = \sqrt{3x-1}$
- (2) $y = (1 + \ln x)^5$
- (3) $y = \sqrt{\ln \sqrt{x}}$
- (4) $y = a^{\sqrt[3]{1+x}}$
- (5) $y = e^{-x}$
- (6) $y = \ln^2 \arccos x^3$

解 (1) $y = \sqrt{3x-1}$ 是由 $y = \sqrt{u}, u = 3x-1$ 复合而成的复合函数;

(2) $y = (1 + \ln x)^5$ 是由 $y = u^5, u = 1 + \ln x$ 复合而成的复合函数;