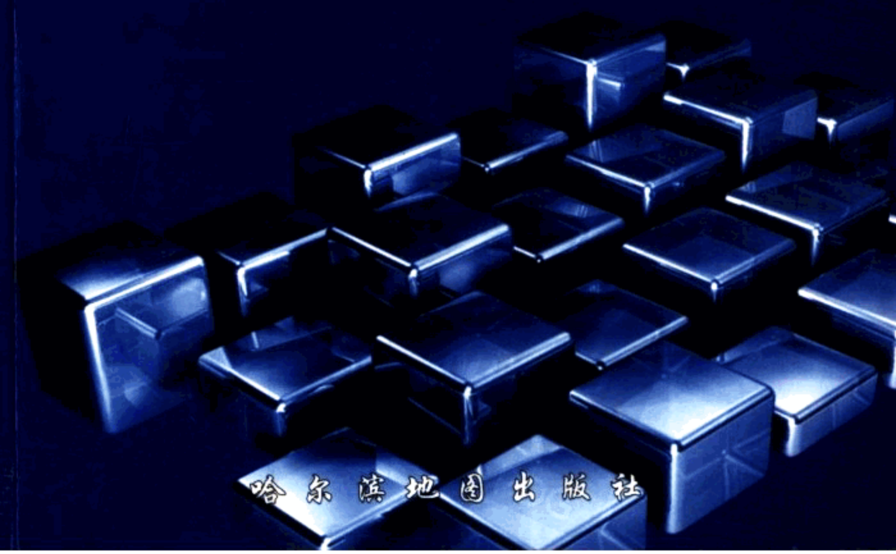
初等数学研究

（上册）

HUDENGSHUXUEYANJIU

陆诗荣　刘　莉　张丽娟　主编



哈尔滨地图出版社

前　言

初等数学研究是高等师范院校数学专业必修的专业基础课程。本书是根据教育部颁发的高等师范院校数学专业《初等数学研究教学大纲》编写的教材。本书在理论上系统地研究了初等数学的基本内容,包括数系理论、解析式、初等函数、方程和方程组、不等式。叙述概念清晰,推理严谨,并配有适当难度的例题与习题。内容注重系统性、逻辑性,侧重于初等数学的基本思想、基本理论、基本方法。

本书在编写过程中,一方面力求切合目前高等师范院校学生的实际,作到通俗易懂,难易适中,在充分注意科学性与严谨性的前提下,深入浅出,详尽透彻,易教易学。另一方面也考虑到当前教育教学改革的实际,对初等数学研究的内容进行了适当的调整,着眼于现实,使高等师范院校的学生们能尽快走上课堂,顶岗顶位。本书不仅可供师范院校学生学习使用,还可作为中学教师进修学校的教材或中学数学教师的教学参考书。

本书在编写过程中得到了许多老师的帮助与支持,尤其是白城师范学院数学系张丽娟老师也参与了本书的编写工作;其中第一章由副主编周慧波编写,在此,特向这些老师表示衷心的感谢。

由于我们水平和经验有限,书中定有不妥之处,恳请广大读者批评指正。

编　者
2006 年 1 月

目　录

绪　言

一、关于代数学发展的几个历史观点

“代数”这一名词起源于公元9世纪阿拉伯数学家、天文学家阿里·花剌子模（约780～约850）的著作《kitab al jabrω’al mugabalah》，意思是“整理和对比”。整理——al Jabrω——就是把负项移到方程的另一边，对比——al Mugabalah——就是把方程两边的相同项消掉。后来，由阿拉伯文译成拉丁文时，“al jabrω”变成了“algebra”，其余的词逐渐被人们所遗忘。1859年，中国清代数学家李善兰（1811～1882）首次把“algebra”译成代数学。

关于什么是代数以及代数的基本问题是什么，这两个问题的观点随着代数这门科学的发展有过几次改变，逐步形成了三种主要历史观点。16世纪后期，法国数学家韦达（Vieta，Francis，1540～1603）引进了字母表示法。韦达划时代地系统使用符号，不仅用字母表示未知数及其幂，还用字母表示方程的系数和常数。以后，法国数学家笛卡尔（R. Descartes，1596～1650）又对符号作了改进，采用字母表中前面的字母表示已知量，最后的一些字母表示未知量。当时人们把代数学看成是关于字母的运算，由字母表示的公式的变换，以及解代数方程一类的科学。字母运算学的观点，是代数学的第一个观点，也是代数学的原始观点。这种观点的代表性著作，是瑞士数学家欧拉（L. Euler，1707～1783）的《代数学引论》（1770）。这种观点一直被持续到18世纪后期。

18世纪末到19世纪初，代数方程的解法渐渐被人们认为是代数学的中心问题。许多数学家对一元n次方程

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

进行了研究，并提出了与这个问题有关的许多复杂的理论。在这一时期，人们把代数理解为仅是研究方程理论的科学，或简称它是方程

的科学。这是代数学的第二个观点,即以方程为中心的观点。反映这种观点的典型著作是1870年法国数学家若尔当(C. Jordan,1838~1922)的《置换和代数方程专论》,对代数方程作了专题总结。

19世纪后半期,代数在物理学以及数学本身找到了越来越多的研究对象,例如向量、矩阵、张量、旋量等,自然地要考虑到它们的运算,而这些运算又各有特点。这样,研究更为一般的运算及其规律就成为近代代数的主要任务。与此相适应,代数又从以研究方程为中心转变为以研究各种代数结构的性质为中心。这一时期,人们把代数理解为研究各种代数结构的科学,也就是近代数学中所谓公理化的或抽象化的代数,这是代数学的第三个观点,即近代观点。20世纪30年代,德国数学家范·德·瓦尔登(B. L. Van der Waerden)的《近世代数学》两卷本深刻地阐明了这一点。

二、作为教学科目的中学代数

作为教学科目的中学代数与作为科学的代数学,从其性质和内容上看,有着显著的区别。

根据中学数学的教学目的,我国现行中学代数教材,以传统内容为主,适当渗透近代数学思想,课程内容具有多样性和广泛性,除固定意义的代数基本内容外,还安排一些其它数学分支的知识。教材的基本内容包括数、式、函数、方程、不等式五个方面。

1. 数的概念及其运算

在算术数的基础上,逐步引进负数、无理数、虚数,把数集从算术数集扩展到有理数集、实数集、复数集,学习在各个数集里的各种代数运算,而不涉及数集自身的结构理论。

2. 解析式的恒等变形

主要讨论代数式与简单超载式的概念、性质和变换。其中解析式的恒等变换是教学重点,它是求解方程、研究函数的基础。

3. 函数

函数在中学代数里占有十分重要的地位,在初中和高中分别进行考察。利用函数的图像讨论函数的性质,或根据函数的性质绘制函数的图像,体现了形、数结合的基本思想。

4. 方程和方程组

主要研究各类方程、方程组的解法。有关方程的同解理论以及对方程的讨论,都是为解方程服务的。

5. 不等式

初中阶段在学习了一元一次方程之后,学习一元一次不等式的解法。在二次函数之后,进一步学习一元一次不等式组和一元二次不等式的解法;高中阶段系统地学习了关于代数不等式的一些重要知识。

除了上面五部分内容外,还包括等差数列、等比数列、数学归纳法、排列与组合、二项式定理及概率统计初步等内容。

中学代数内容十分丰富,前五部分内容相互间密切联系,为了保证学生系统地学好这些内容,以交叉安排为宜;其余内容相对独立,可分列专题研究。

根据师范大学数学专业的培养目标,本书拟联系中学代数教学实际,重点研究前面五个方面的内容。

第一章　数

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的一门科学。数既是数学研究的对象,也是研究数学和其它自然科学的必不可少的工具。因此,了解数的概念的产生和发展,认知数系结构,掌握一定的数的理论,对进一步学习特别是对未来的中学数学老师来说,是非常必要的。

本章主要讨论数的概念的形成与发展,自然数的两个理论——基数理论、序数理论,有理数集、实数集和复数集的理论及其主要性质,对整除性理论和数的近似计算等内容作了一些介绍,最后联系中学代数教学实际,讨论如何进行数的教学。这些知识,对于掌握、驾驭中学代数教材,都是十分必要的。

第一节　数系的扩展

一、数的概念的扩展

1. 数的形成与发展

数的概念是现代数学的基本概念之一,它是人类由于生产和生活的实际需要而逐步形成并加以扩展的。由于计数的需要,人类首先认识了自然数,开始只有很少几个自然数,后来随着生产力的发展和记数方法的改进,逐步认识越来越多的自然数。这个过程大致可以分为三个阶段。在第一阶段,物体集合的性质,是由物体间的直接比较确定的。我国古代传说的结绳记数便属于这一阶段。在第二阶段,出现了数词,如三头牛、五只羊等。这时,还没能把单个的数从具体物体的集合中分离出来。在第三阶段,认识到每一个单个的数,是物体集合的一种性质,把数从具体物体的集合中分离出来,形成了抽象的自然数概念,并有了代表它的符号。

随着生产的发展,人们对量的认识逐渐加深,常常会发生度量不尽的情况,如用一把尺去量一件物体的长,3 尺有余,4 尺不足,那么

如何去表示这个长度呢?这样就必然产生自然数不够用的矛盾。于是,正分数就应运而生。中国比较古老的数学典籍《周髀算经》中出现很多分数乘除的例子。引进正分数,这是数的概念的第一次扩展。

最初人们记数时,没有“零”的概念。后来,在生产实践中,需要记录和计算的东西越来越多,逐渐产生了位置记数法。位置记数法就是每一个数码由于所在位置不同而表示不同的值。若缺位就要用一个特定符号。公元6世纪,印度数学家开始用符号“0”表示零。但零作为数引入数的体系是比较晚的。由于数零的引入,为人们带来很多方便。引进数零,这是数的概念的第二次扩展。

以后,为了表示具有相反意义的量,负数概念就出现了。负数概念的引入是中国数学史上的一个光辉的成就。中国是认识正、负数最早的国家,我国古代数学家在《九章算术》(公元1世纪)中就指出了正负数的不同表示法和正负数的加减法则。印度在公元7世纪才出现负数的概念,在欧洲,直到17世纪才对负数有一个比较正确的认识。引进负数,这是数的概念的第三次扩展。

在公元前585年到公元前400年期间,古希腊毕达哥拉斯(Pythagoras,约公元前580~前500)学派中一个叫希帕斯的人发现了单位正方形的边长与对角线是不可公度的,为了得到不可公度线段的比的精确数值,导致了无理数的产生,当时还只是用几何来形象说明无理数的存在,至于严格的实数理论,直到19世纪70年代才由代德金(1831~1918)、康托尔(1829~1920)、维尔斯特拉斯(1815~1897)建立起来。引进无理数,形成实数集,这是数的概念的第四次扩展。

数的概念的再一次扩展,是为了解决数学本身所提出的问题。16世纪上半叶,意大利数学家塔尔塔利亚发现了三次方程的求根公式,大胆地引用了负数开平方的运算,得到了正确答案。由此,虚数作为一种合乎逻辑的假设得以引进,并在进一步的发展中加以运用,成功地经受了理论和实践的检验,最后于18世纪末至19世纪初确立了虚数在数学中的地位。同期,数学家高斯等人找到了复数的具体解释:复数与平面上的点一一对应。且复数在实际中得到广泛的

应用,至此才确立了虚数在数学中的地位。引进虚数,形成复数集,这是数的概念的第五次扩展。

以上我们简要地回顾了数的发展过程。概括地说,数的概念的产生和发展是由于人类的生产实践——计数与测量的需要,其中也伴随着数学本身对数提出的要求。数的概念的产生,实际上是交错进行的,它走过了漫长而艰辛的历程。

历史上数系的发展过程大致如下:

自然数集$\xrightarrow{\text{添正分数}}$正有理数集$\xrightarrow{\text{添零}}$非负有理数集$\xrightarrow{\text{添负数}}$有理数集$\xrightarrow{\text{添无理数}}$实数集$\xrightarrow{\text{添虚数}}$复数集

2. 数系扩展的方法与扩展原则

数系的扩展一般采用两种形式:

一种是把新元素加到已建立的数系中而扩展,通常称为添加元素法。这种扩展和数系的历史发展很相近,也与中小学数学课程中关于数的扩展过程相当。

中小学数学课程中关于数的扩展过程如下:自然数集$\xrightarrow{\text{添零}}$扩大的自然数集$\xrightarrow{\text{添正分数}}$算术数集$\xrightarrow{\text{添负有理数}}$有理数集$\xrightarrow{\text{添无理数}}$实数集$\xrightarrow{\text{添虚数}}$复数集

另一种数系扩展的方法是构造法,即从理论上构造一个集合,通过定义和等价类来建立新数系,然后指出新数系的某一个子集是和原来的数集是同构的。

作为科学的数系的建立过程一般采用构造法的扩展过程,首先要建立自然数集,然后逐步加以扩展。扩展过程如下:

自然数集(N)→整数集(Z)→有理数集(Q)→实数集(R)→复数集(C)。

无论是用添加元素法还是构造法,由数集 A 扩展到数集 B,都要遵循以下原则:

(1)A 是 B 的真子集,即 $A\subset B$.

(2)在 B 的元素间所定义的一些关系和运算,对于作为 B 的真子集

A 的元素,这样的定义与 A 中原有的关系和运算的定义应当保持一致。

(3)集合 A 中不是总能实施的某种运算,在数集 B 中总能实施。

(4)在同构的观点下,B 应当是 A 的所有具有上述三个性质的扩展中的惟一最小扩展。

数集的每一次扩展,都解决了一定的矛盾,从而扩大了数的应用范围。但是,数集的每一次扩展也会失去某些性质。例如,从自然数集扩展到整数集后,整数集对减法具有封闭性,但失去了自然数集的良序性质,即自然数集中任何非空子集都有最小元素。又如,由实数集扩展到复数集后,复数集是代数闭域,即任何代数方程必有根,但失去了实数集的顺序性,复数集 C 中元素已无大小可言。

二、自然数理论

自然数具有两方面的意义:一是用来计数(有几个),二是用来排序(第几个)。由此,形成了自然数的两种主要理论,即基数理论和序数理论。

1. 自然数的基数理论

基数理论以“集合”作为原始概念,利用集合论的知识来定义自然数及其运算。

在集合论中,若集合 A 和 B 的元素之间,可以建立一一对应关系,就称集合 A 和 B 等价,记作 A ~ B。一切相互等价的非空集合的共同特征的标志,称为这些集合的基数。例如,五只羊的集合、五棵树的集合、五张桌子的集合、$\{a,b,c,d,e\}$,等等,它们都是等价的集合,其基数用符号“5”表示。

定义 1.1 非空有限集的基数叫自然数。

只含有一个元素的集合$\{a\}$是有限集,它的基数记作 1;在$\{a\}$中添加一个元素 b,得$\{a,b\}$也是有限集,它的基数记作 2;在$\{a,b\}$中添加一个元素 c,得$\{a,b,c\}$,它的基数记作 3;…,从而得到自然数 1,2,3,…

一切自然数组成的集合,叫做自然数集,记作 N.

引进自然数以后,就可以利用集合的知识定义自然数集中元素间的顺序关系和加法、乘法运算。

定义 1.2 设非空有限集 A 和 B 的基数分别是 a 和 b,A′和 B′分

别是 A,B 的真子集:

(1)若 $A \sim B$,则称 a 等于 b,记作 $a=b$;

(2)若 $A \supset A' \sim B$,则称 a 大于 b,记作 $a>b$;

(3)若 $A \sim B' \subset B$,则称 a 小于 b,记作 $a<b$.

根据定义 1.1、定义 1.2 与集合等价的性质,可以得到自然数的次序之间的基本顺序律。

定理 1.1　自然数的相等关系具有反身性、对称性与传递性,即

(1)对任何 $a \in N$,有 $a=a$;

(2)对任何 $a,b \in N$,若 $a=b$,则 $b=a$;

(3)对任何 $a,b,c \in N$,若 $a=b,b=c$,则 $a=c$.

定理 1.2　自然数的顺序关系具有对称性、传递性与全序性,即

(1)对任何 $a,b \in N$,当且仅当 $a<b$ 时,$b>a$;

(2)对任何 $a,b,c \in N$,若 $a>b,b>c$,则 $a>c$;

(3)对任何 $a,b \in N$ 在 $a<b,a=b,a>b$ 中有且只有一个成立。

证明　仅证(2),设 a,b,c 分别是非空有限集 A,B,C 的基数。依定义 1.2,由 $a>b,b>c$ 可知,存在非空有限集 A',B',使 $A \supset A' \sim B, B \supset B' \sim C$。从而必存在非空有限集 A'',使 $A' \supset A''$且 $A'' \sim B'$. 于是 $A \supset A' \supset A'' \sim C$,所以 $a>c$.

下面讨论自然数的运算。

定义 1.3　设 $A \cap B=\phi$,如果非空有限集 A,B 的基数分别是 a,b,且 $C=A \cup B$,那么集合 C 的基数 c 叫做 a 与 b 的和,记作 $c=a+b$. a,b 叫做加数,求两数和的运算叫做加法。

对于自然数 a,b,显然 $a+b$ 是惟一确定的自然数。

由于 $A \cup B=B \cup A$ 及 $A \cup (B \cup C)=(A \cup B) \cup C$,所以有:

定理 1.3　自然数的加法满足交换律和结合律。

定理 1.3 对加法不必区分被加数与加数,而统称为加数。加法可以拓广到任何有限个加数的情形。加法在所有加数都相等时被规定为自然数的另一种运算。

定义 1.4　若 b 个等价的有限集 $A_1,A_2,\cdots,A_b$ 彼此之间没有公

共元素，它们的基数都是 a，且 $C=\bigcup_{i=1}^{b}A_i$，那么集合 C 的基数 c 叫做 a 与 b 的积，记作 $c=a\times b$（或 $c=a\cdot b=ab$），a 叫做被乘数，b 叫做乘数，求两个数积的运算叫做乘法。

由定义 1.4 可知，ab 是 b 个 a 之和。

关于乘法有如下的运算律：

定理 1.4 （乘法交换律）对任何 $a,b\in N$，恒有 $a\cdot b=b\cdot a$

证 $A_1=\{x_{11},x_{12},\cdots,x_{1a}\}$,

$A_2=\{x_{21},x_{22},\cdots,x_{2a}\}$,

$\cdots\ \cdots$

$A_b=\{x_{b1},x_{b2},\cdots,x_{ba}\}$

且这 b 个集合彼此之间没有公共元素，则

$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_b=\{x_{11},x_{12},\cdots x_{1a},x_{21},x_{22},\cdots x_{2a},\cdots x_{b1},x_{b2}\cdots x_{ba}\}$

据定义 4，有 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_b$ 的基数为 ab。 (1)

再令 $B_1=\{x_{11},x_{21},\cdots,x_{b1}\}$,

$B_2=\{x_{12},x_{22}.\cdots,x_{b2}\}$,

$\cdots\ \cdots$

$B_a=\{x_{1a},x_{2a},\cdots,x_{ba}\}$,

则这 a 个集合彼此之间也没有公共元素，每一个集合的基数都是 b，而且

$B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_a$ 的基数为 ba. (2)

因为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_b=B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_a$,

故由(1)，(2)，得 $ab=ba$。

定理 1.5 （乘法对加法的分配律）对任何 $a,b,c\in N$，总有

$$a(b+c)=ab+ac;\qquad (b+c)a=ba+ca.$$

证 这里只证明第一个等式

$$a(b+c)=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{(b+c)\text{个}}$$

$$=\underbrace{(a+a+\cdots+a)}_{b\text{个}}+\underbrace{(a+a+\cdots+a)}_{c\text{个}}$$

$$= ab + ac$$

推论 若 $a, b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 都是自然数，则 $a(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = ab_1 + ab_2 + \cdots + ab_n$.

定理 1.6 （乘法结合律）对任何 $a, b, c \in \mathrm{N}$，恒有 $a(bc) = (ab)c$

证
$$a(bc) = a\underbrace{(b + b + \cdots + b)}_{c\text{个}}$$
$$= \underbrace{(ab + ab + \cdots + ab)}_{c\text{个}}$$
$$= (ab)c$$

把自然数的加法与乘法各与自然数的顺序联系起来，则有：

定理 1.7 设 $a, b, c \in \mathrm{N}$，且 $a \leqslant b$，则

(1) $a + c \leqslant b + c$（加法单调律）。

(2) $ac \leqslant bc$（乘法单调律）。

类似地，我们还可以用集合的知识，按照自然数的减法是加法的逆运算，除法是乘法的逆运算来给出自然数的减法和除法的定义。

定义 1.5 设 a, b 是两个自然数，如果存在一个自然数 c，使得 $b + c = a$，那么 c 叫做 a 与 b 的差，记作 $c = a - b$，a 叫做被减数，b 叫做减数，求两个数差的运算叫做减法。

定义 1.6 设 a, b 是两个自然数，如果存在一个自然数 c，使得 $b \cdot c = a$，那么 c 叫做 a 除以 b 的商，记作 $c = a \div b$（或 $c = \frac{a}{b}$），a 叫做被除数，b 叫做除数，求两数商的运算叫做除法。

在自然数集 N 里，加法运算和乘法运算是封闭的，和与积惟一存在；减法运算和除法运算不是封闭的，若差与商存在，则是惟一的。

以上我们规定了自然数的定义，自然数的顺序和自然数的四则运算，并逻辑地推导出了自然数的基本顺序律和基本运算律。因此，可以说自然数的基数理论已经建立起来了。

2. 自然数的序数理论

序数理论是完全采用公理化的方法，由两个原始的概念“集合”、

“后继”与四条公理为基础，并且还使用“对应”的概念而建立起来的。

定义 1.7 任何一个非空集合 N 的元素叫做自然数，如果在这个集合里的某些元素之间有一基本关系“后继”(用符号“ + ”或“′”表示)，满足下面的公理：

(1) N 中存在一个元素 1，它不后继于 N 中任何元素(即 $1 \in N$，对于任意一元素 $a, a^{+} \neq 1$)。

(2) 对于 N 中任意一元素 a，必有且仅有 N 中某一元素 a^{+} 后继于它(即 $a, b \in N$，若 $a = b$，则必有 $a^{+} = b^{+}$)。

(3) 除 1 外，N 中任何元素必后继于且仅后继于 N 中某一元素(即由 $a^{+} = b^{+}$，应有 $a = b$)。

(4)(归纳公理)设 N 的一个子集，具有下列两个性质：

1° $1 \in M$;

2° 若 $a \in M$，则 $a^{+} \in M$.

那么，M 就含有一切自然数，即 $M = N$.

公理(1)说明 1 是自然数，而且是最前边的数。公理(2)，(3)说明 N 中任何数都有惟一的后继数。而且不同数的后继数也不同。公理(4)是第一数学归纳法原理的理论根据。

显然，自然数列满足定义，反之，由(1)，有自然数 1，它是最前面的一个自然数；由(2)和(3)，有惟一的 1^{+}，记为 2，它只后继于 1；同样有惟一的 2^{+}，记为 3，它只后继于 2；这样继续下去，可以得到

$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$

定义 1.8 自然数的加法是指这样的对应，对于每一对自然数 a, b，存在惟一的一个自然数 $a + b$ 与它对应，且具有以下的性质：

(1) 对于任何自然数 a，$a + 1 = a^{+}$;

(2) 对于任何自然数 a, b，$a + b^{+} = (a + b)^{+}$

这里，a, b 叫做加数，$a + b$ 叫做它们的和。

例 1.1 证明 $2 + 3 = 5$

证明 $\because 2 + 1 = 2^{+} = 3$

$2 + 2 = 2 + 1^{+} = (2 + 1)^{+} = 3^{+} = 4$

$$\therefore 2+3=2+2^{+}=(2+2)^{+}=4^{+}=5$$

一般说来,这样的加法是否存在?是否惟一?定义本身没有回答这些问题,但答案是肯定的。

定理 1.8 自然数的加法是存在的,且是惟一的。

证明 1° 至多有一种这样的对应。

取定 a,假设至少有两个对应 f,g,对任何 $b\in\mathrm{N}$,各对应于 $f(b)$,$g(b)\in\mathrm{N}$. 设使 $f(b)=g(b)$ 的所有 b 组成的集合为 M,由定义 8 的(1),得

$$f(1)=a^{+}=g(1),\quad \therefore 1\in M$$

假定 $b\in M$,则 $f(b)=g(b)$,根据定义 1.7 的(2),$[f(b)]^{+}=[g(b)]^{+}$,又由定义 1.8 的(2),得 $f(b^{+})=g(b^{+})$,于是 $b^{+}\in M$.

据定义 1.7 的(4)知 $M=\mathrm{N}$,即对任意 $b\in\mathrm{N}$,$f(b)=g(b)$.

这对给定的 a,1°已被证明。由 a 的任意性,知对任意 $a,b\in\mathrm{N}$,1°也被证明。

2° 存在性。设使加法存在的 a 组成的集合为 M. 当 $a=1$ 时,对任意 $b\in\mathrm{N}$,令 $a+b=b^{+}$. 这就有

$$a+1=1^{+}=a^{+},$$
$$a+b^{+}=(b^{+})^{+}=(a+b)^{+},$$

所以 $1\in M$.

假定 $a\in\mathrm{M}$,即对任意 $b\in\mathrm{N}$,有 $a+b$ 与它对应,而且

$$a+1=a^{+},a+b^{+}=(a+b)^{+}.$$

现在对任何 $b\in N$,令 $a^{+}+b=(a+b)^{+}$. 这就有

$a^{+}+1=(a+1)^{+}=(a^{+})^{+}$,

$a^{+}+b^{+}=(a+b^{+})^{+}=[(a+b)^{+}]^{+}=(a^{+}+b)^{+}$,

所以 $a^{+}\in\mathrm{M}$.

据定义 1.7 的由(4)知 $\mathrm{M}=\mathrm{N}$. 因此,对任何 $a,b\in\mathrm{N}$,这种对应存在。

定理 1.9 (加法结合律)对任何 $a,b,c\in\mathrm{N}$,总有

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

证明 取定 a,b,设 M 是使上面等式成立的所有 c 组成的集合。

由于

$$a+(b+1)=a+b^{+}=(a+b)^{+}=(a+b)+1,$$

所以，$1\in M$.

假定 $c\in M$，则

$$\begin{aligned}a+(b+c^{+})&=a+(b+c)^{+}\\&=[a+(b+c)]^{+}\\&=[(a+b)+c]^{+}\\&=(a+b)+c^{+},\end{aligned}$$

于是 $c^{+}\in M$.

因此 $M=\mathrm{N}$，又由 a,b 的任意性，定理得证。

定理 1.10 自然数的加法满足交换律。

定义 1.9 自然数的乘法是指这样的对应，对于每一对自然数 a,b，存在惟一的一个自然数 $a\cdot b$ 与它对应，且具有以下性质：

(1)对于任何自然数 a， $a\cdot 1=a$;

(2)对于任何自然数 a,b， $a\cdot b^{+}=a\cdot b+a$.

这里，a 叫做被乘数，b 叫做乘数，$a\cdot b$ 叫做它们的积。

例 1.2 证明 $2\cdot 3=6$

证明 $\because 2\cdot 1=2$

$2\cdot 2=2\cdot 1^{+}=2\cdot 1+2=4$

$\therefore 2\cdot 3=2\cdot 2^{+}=2\cdot 2+2=4+2=6$

类似于自然数的加法有：

定理 1.11 自然数的乘法是惟一存在的。

定理 1.12 （右分配律）对任何 $a,b,c\in\mathrm{N}$，总有 $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$.

证明 设使上面等式成立的所有 c 组成的集合为 M.

$\because (a+b)\cdot 1=a+b=a\cdot 1+b\cdot 1$

$\therefore 1\in M$.

假定 $c\in M$，则

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot c^{+}&=(a+b)\cdot c+(a+b)\\&=ac+bc+a+b\end{aligned}$$