

郑隆炘 汤光宋 等编

中
ZHONG

学

XUE

数

SHU

学

XUE

解

JIE

题

TI

教

JIAO

程

CHENG

● 中学数理化教师提高丛书

华中理工大学出版社

中学数理化教师提高丛书

中学数学解题教程

郑隆炘 汤光宋等编

华中理工大学出版社

25

图书在版编目(CIP)数据

中学数学解题教程/郑隆忻 汤光宋 等编
武汉:华中理工大学出版社, 1999年5月
ISBN 7-5609-1946-4

I. 中…

I. ①郑… ②汤…

Ⅱ. 数学-中学-学习参考资料

IV. G633.6

中学数学解题教程

郑隆忻 汤光宋 等编

责任编辑:李立鹏
责任校对:郭有林

封面设计:刘 卉
监 印:张正林

出版发行:华中理工大学出版社

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87542624

经销:新华书店湖北发行所

录排:华中理工大学出版社照排室

印刷:中南三〇九印刷厂

开本:850×1168 1/32

印张:13.625

字数:323 000

版次:1999年6月第1版

印次:2000年1月第2次印刷

印数:5 001—8 000

ISBN 7-5609-1946-4/G·224

定价:15.00元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行科调换)

内 容 提 要

本书是《中学数理化教师提高丛书》之一册,它是主要研究中学数学解题的教与学.主要内容有:中学数学解题的意义、目标和类型;数学思维、数学方法与解题教学的关系;数学解题策略与分析、归纳过程;数学教材中的例题、习题的处理原则;选择题、填空题、解答题、应用题、综合题的教与学以及某些典型问题的研究.全书三十余万字,由浅入深,通俗易懂,对中学数学教师备课与提高有帮助,也有益于学生学好数学,提高解题能力.

《中学数理化教师提高丛书》编委会

主 编 郑隆炘 王心宽
编 委 (以姓氏笔画为序)

王心宽	孙正川	李绍参
陈文生	欧阳仲威	范鸿章
郑隆炘	杨文茂	林六十
汤光宋	梁法驯	张兆华
姚磊明	龚义建	高正兴
高仕汉	裴幼强	樊 恺

总 序

切实加强中学教师队伍特别是青年教师队伍的建设,是教育面向 21 世纪的一项紧迫的战略任务.为了帮助中学数理化教师提高思想与业务素质以及教学能力、教研能力、科研能力,促进中学教育教学质量的提高,我们组织编写了这套《中学数理化教师提高丛书》.

本丛书遵循以下编写原则:充分考虑 21 世纪经济建设与教育发展的需要,认真总结多年来中学教育改革的经验,以及开展中学教师继续教育的研究成果;编著的内容源于中学、又高于中学,努力挖掘中学知识与大学知识之间的联系;对中学有关知识内容,抓住实质深刻阐述、并适度拓广、插漏补缺、重点提高;努力做到应用正确的哲学与方法论和先进的教育理论指导所撰内容,并融为一体,注重科学性、时代性、系统性、实用性与可读性;尽量不与已有中学教师进修书籍重复,做到有创新的见解,有独到的分析,有新颖的内容,有作者的研究成果.丛书由郑隆炘、王心宽等 10 多位教授、专家组成编委会,由在中学数理化教育方面有研究成果与实践经验的教授、专家,以及有研究实力的中青年同志撰稿,其读者对象是各类中等学校数理化教师、教研工作者、大学理工专业学生、高中阶段部分成绩优秀的学生,以及高中以上文化程度的自学者.

我们深信,这套丛书的出版,将对中学师资队伍建设与中学理科教育改革,起到积极的促进作用.

《中学数理化教师提高丛书》编委会

1996 年 4 月于武汉

序 言

这套丛书的出版是一件很有意义的工作。由于笔者工作范围之限,只能对数学方面提出一点看法。如果还多少有一些想法对它学科也有些作用,则甚至有一些喜出望外了。

自文化大革命结束以来,中学教育无论在数量和质量方面都有了飞跃的发展。比之当时百废待兴的局面自然是今非昔比。尽管在未来几十年中改革和发展都还会有极多复杂的情况出现,但是总可以采取比较“正规”的,按教育客观规律办事的方法,临时性的措施应该更少一些了。因此,中学教师的继续教育问题就亟待更有系统地提出与解决了。

当然,可以要求中学教师都有更高的学历;如果满足不了,也可以用某种形式来补一补课,也可以开一些研讨会等等来帮助解决某些问题,但是根本之图是要求中学教师能多读一点书。这样就提出了一个问题,读什么书?怎样读书才能有用?有不少人认为教什么就学什么就行了,不少人(包括高等师范院校相当一批师生在内)已经感到念这么多高等数学是没有用的。有不少人认为这违反了“师范性”反而造成思想不安、队伍不稳,如此等等。也有完全相反的看法,认为只有多念更高深的数学课程,本科完了还有研究生,这样才能从“根本上”提高水平,从“根本上”稳定队伍,从“根本上”解决师范性问题。那么什么是“师范性”呢?为人“师表”,应该有什么样的“规范”呢?作为一个教师,特别是一个中学教师,他的工作对象是“人”,是十来岁思想最活跃,最具可塑性的人,要去塑造一个人,有思想政治的要求,有道德情操的要求,当然还有生活能力、劳动技能等等,而从数量上“作大头”的仍是科学文化方面的要求。对于一个数理化教师,不但要求他以自己的思想情操去感化学

生,更要求他能从自己的专业方面去塑造一个人.当然,例如一个数学教师不应该以为自己的学生将来很多人成为数学家.但是,数学不只是谋生技能,更不能只是进入高一级学校的敲门砖.从这门科学中,我们看到人类是怎样解决他们面临的许多问题,又怎样从具体问题形成了许许多多数学定理、数学理论,……,人们曾经不只是为了某个具体的目的去研究一个个具体的数学问题,而是追求深层次的真理,又怎样由此而造出美好的世界.这就是创造,我们现在常说要培养“能力”.其实,哪里有什么“抽象的能力”,如果不进行创造的实践而侈谈“能力”的培养,犹之乎不下水而谈游泳的道理一样.一个十来岁的孩子解一个简单的数学题,他可能在创造,而范进 60 岁中举,哪怕是中了状元也没有什么创造,也谈不上什么能力.当然,写八股文也算一种“能力”吧!问题不在于是念高等数学还是初等数学,而在于如何对待这孩子能够接受的知识,是一个态度问题.我不相信这里有什么固定的方法,更没有什么诀窍.可以看一看每一个事业有成的人,几乎都受到一两位中学教师的影响,而这位教师的影响,最深刻的不仅在于具体的知识,而在于他的情操,他对待科学的态度等等,即在于他自己的科学素质.

我们常说把大学的知识和中学知识结合起来,其实这是培养高的科学素质的根本之途.有一些历史的经验:19 世纪末到本世纪初的德国大数学家克莱因,写了一部名著《高观点下的初等数学》.应该感谢湖北教育出版社,愿意赔本出这本书,其实这是作者多年利用假期为中学教师讲课的教材,而且实际上把自己的研究的成果都讲给教师们听.直至今日我们再读这本书仍感到富有启发,使人思如泉涌,可以懂得许多自以为再也没有问题的东西,一句话,可以懂得什么叫把大学和中学结合起来.我愿向每一个有志于提高自己数学水平的数学教师推荐这本书,条件是这位教师应该读过相当于大学一、二年级的数学课程.另一个范例是前苏联的经验.其中最宝贵的是,第一流的数学家,甚至是数学大师,也都愿意为中学教师的提高尽心尽力,最近一位同志翻译了前苏联的大

数学家辛钦写的《数学分析八讲》，看一下这位名重一时，贡献卓著的概率论大师，是怎样讲最基本的数学分析知识，从什么是实数，什么是函数开始，而且并不超过大学一年级的内容，看一下他的讲法和我们自己对这门最基本的数学课程的理解，相距何在，就知道为了提高自己的“素质”还要下多少功夫。现在大家都在讲素质教育，如果在科学文化方面也要提出素质问题而不只是谋生技能，更不是进入高一级学校的敲门砖的话，那么最重要的是教师的素质。

这里我们有意不谈对数学有特殊重要性的解题，训练问题，也没有讲到有特殊作用的数学竞赛问题，这是需要专门讨论的。但是，可以说一句，这不会和上面讲的一切矛盾。

十分高兴，现在有一批有志者在本世纪之末开始编写这一套丛书，决心在这个方向上走上踏实的一步。尽管征途漫漫，困难重重，也不能以上面提到的大师们和他们的经典著作来要求于这丛书。方向是正确的，工作是十分有意义的，希望读者会从这丛书中得到启发，得到益处，更希望有更多的有志者投入这个工作。

齐民友

1996年6月1日于珞珈山

前 言

解题是数学的心脏,从事中学数学的教与学,离不开解题.问题在于如何教、如何学,使解题教学成为数学素质教育的一个有机组成部分.

本书作为丛书的一册,就是专门研究中学数学解题的教与学的.一般关于解数学题的书偏重于具体的解法,并进行大量不同类型的解题训练.当然,这对于巩固基础知识的学习、加强基本技能的训练,是必要的.本书与这些书不同之处有三点:第一,本书研究解题的教学目标、解题策略、例题、习题处理的原则与方法,特别是研究数学思维、数学方法论与解题教学的关系,突出了数学思想方法的作用,这对培养学生创新意识与思维能力是非常有好处的;第二,本书对中学数学的选择题、填空题、解答题、应用题、综合题五大类型题的教与学,进行了比较系统与深入地讨论和探索,许多是作者自己的钻研体会,有一定新意,对于中学教师与学生均有益处;第三,对于中学数学解题的重要类型的七个专题,作了深入浅出的介绍,以及有针对性的研究,无论是作为学习提高的重要教材,还是作为课外活动的参考资料,都能发挥重要作用.因此,本书可作为教师的好朋友,学生学会解题的一把钥匙.

本书是作者中学数学解题研究的初步尝试,写作过程中,力求在概念、法则以后有对口的阐述,在例题后有思想方法的挖掘,努力突出数学思想方法以及解题过程中的精华.例题的选取力求典型、精干,剖析得理,举一反三.整个内容力求紧密联系中学当前教育实际,“源于中学,高于中学,以高带低,以高讲低.”注重数学思想方法的指导作用,以及解题思路的探寻方式,以培养学生分析问题、解决问题能力和创新能力.

本书的写作分工是:前言、第2、5、8章由郑隆炘编写;第9章第1节由汤光宋编写;第1章由王兴宇编写;第6章由欧阳仲威编写;第3章、第9章第2、3节由瞿国栋编写;第4章、第10章第2、3节由孙庆光编写;第7章由强士端编写;第10章第1、4节由汤茂林编写.最后由郑隆炘、汤光宋、王兴宇、欧阳仲威统一定稿.

本书在写作过程中参考了不少作者的论著,这里向他们表示衷心地感谢.限于作者的学识与科研水平,本书的疏漏、错误在所难免,敬请读者批评指正,以使本书的质量得到进一步的提高.

作者

1998年10月25日

目 录

第一章 中学数学解题的教学目标、类型与意义	(1)
§ 1.1 中学数学解题的教学目标	(1)
§ 1.2 中学数学解题的教学类型	(12)
§ 1.3 中学数学解题的教学意义	(20)
第二章 数学思维、数学方法论与解题教学	(32)
§ 2.1 波利亚数学解题观	(32)
§ 2.2 数学思维与解题教学	(43)
§ 2.3 数学方法论与解题教学	(53)
第三章 数学解题策略	(67)
§ 3.1 数学解题的过程分析	(67)
§ 3.2 数学解题的策略与技巧	(84)
§ 3.3 数学解题的艺术	(107)
第四章 数学教材例题、习题的处理原则与方法	(113)
§ 4.1 教材例题、习题处理的原则	(113)
§ 4.2 例题、习题的处理方法	(121)
§ 4.3 例题、习题的编制与延申	(140)
第五章 选择题与填空题的教与学	(152)
§ 5.1 选择题的结构、分类与解法教学	(152)
§ 5.2 填空题的结构、分类与解法教学	(165)
§ 5.3 选择题编写的原则与方法	(170)
第六章 解答题的教与学	(175)
§ 6.1 解答题的分类	(175)
§ 6.2 解答题的结构特点	(178)
§ 6.3 解答题的编制	(183)
§ 6.4 解答题的解法探索	(191)
第七章 应用题的教与学	(199)
§ 7.1 应用题的类型	(199)

§ 7.2	应用题的结构分析	(211)
§ 7.3	应用题的编制与解法	(214)
§ 7.4	数学模型问题	(221)
§ 7.5	数学模型问题	(225)
第八章	中学数学综合题的教与学	(234)
§ 8.1	中学数学综合题的分类与特点	(234)
§ 8.2	初中数学综合题的教与学	(239)
§ 8.3	高中数学综合题的教与学	(252)
第九章	中学数学典型问题研究(一)	(276)
§ 9.1	函数与方程	(276)
§ 9.2	代数、几何中的构造法及其应用	(320)
§ 9.3	三角恒等式及其应用	(342)
第十章	中学数学典型问题研究(二)	(359)
§ 10.1	反证法及其应用	(359)
§ 10.2	递推数列及其周期性	(366)
§ 10.3	最值问题	(380)
§ 10.4	关于二次曲线的几个问题	(397)
	人名英汉对照表	(421)
	参考文献	(422)

第一章 中学数学解题的数学目标、 类型与意义

解题教学在中学数学教学中占有极其重要的地位.从某种意义上说,数学的真正组成部分是问题和解,数学是做出来的,因而解题理所当然地是数学教学过程的一个重要环节.不仅如此,解题的基本功在数学研究中也是非常重要的.因此,提高发现问题和解决问题的能力,就成为老师教好数学、学生学好数学的重要一环,也是研究数学、运用数学必不可少的技能.

本章主要内容是中学数学解题教学目标、类型与意义的分析与研讨.

§ 1.1 中学数学解题的教学目标

我国现行的《中学数学教学大纲》明确指出:“练习是数学教学的有机组成部分,对于学生掌握基础知识和基本技能、培养能力是必不可少的.在教学中,要充分发挥练习的作用,加强对解题的指导,并及时进行检查.”这就告诉我们,解题在教学与学习中具有十分重要的意义.因此,对于中学数学解题教学目标的研究势在必行,确有必要.

中学数学解题教学目标是与中学数学教学内容密不可分的,根据我国现行的中学数学教学大纲,我们可将中学数学所涉及的内容分为 51 个基本知识单元,其中,代数 26 个单元,三角 8 个单元,立体几何 9 个单元,平面解析几何 8 个单元.每个基本知识单元的考查要求又分为“了解”、“理解”、“掌握”、“熟练掌握”四个层次,所以,对中学数学解题教学目标的分析与研究也可按上述内容展开.

首先,对中学数学解题教学目标中要求的四个层次,即了解、理解、掌握、熟练掌握划分的原则要清楚、明了.这四个层次根据下述原则划分.

“了解”:指能根据有关概念、定义、定理直接得出结论或只需根据课本上已有的范例,经过机械性运算便可得出结论的.例如,“双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的准线方程是_____.”又如“ $y=\sqrt{x-1}$ 的反函数是_____.”可归入这一类.

“理解”:指能根据有关的概念、定义、定理,经过简单的推理、分析和计算即可得出结论的.例如,1988年全国高考试题第二大题第5小题“已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q>1$,并且 $a_1=b(b\neq 0)$,求 $\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{a_6+a_7+a_8+\cdots+a_n}$ ”就归入这一类.

“掌握”:指不仅要“理解”,还必须有一定的综合分析和熟练运算的能力.如,1990年广东省高考试题第一卷第一大题第22小题“如果实数 x, y 满足等式 $(x-2)^2+y^2=3$,那么 $\frac{y}{x}$ 的最大值是(A) $\frac{1}{2}$; (B) $\sqrt{3}$; (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.”就归入这一类.

“熟练掌握”:指要有较强的分析问题的能力和综合运用知识的能力,需掌握一定的数学思维方法和连贯且分段的逻辑推理能力.例如,1990年全国高考试题第三大题第26小题“设 $f(x)=\lg\frac{1^x+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^x a}{n}$,其中 a 是实数, n 是任意给定的自然数,且 $n\geq 2$. (1)如果 $f(x)$ 当 $x\in(-\infty, 1]$ 时有意义,求 a 的取值范围; (2)如果 $a\in(0, 1]$,证明 $2f(x)<f(2x)$ 当 $x\neq 0$ 时成立.”就归入这一类.

以下就中学数学中的代数、三角、立体几何、平面解析几何等部分的解题教学目标进行分析与探讨.

一、中学数学解题教学目标内容

1. 代数部分

中学数学涉及到的内容所划分的 51 个基本知识单元中,代数部分有 26 个单元,其比例占二分之一强,就其目标要求的四个层次分,统计如下(根据 1985 年至 1990 年普通高校招生数学全国试题、上海试题、广东省试题的测试目标作出的统计.三角、立体几何、平面解析几何部分情形同上.).

(1)“了解”的内容有:

集合的概念与表示,简单集合运算.

反函数概念.

含绝对值的不等式.

(2)“理解”的内容有:

函数的概念、定义域、值域、函数记号.

指数、对数方程.

等差、等比数列概念,通项、中项、前 n 项之和.

无穷递缩等比数列.

数列极限,极限运算法则.

复数的运算.

复数及其运算的几何意义、应用.

排列,组合的意义及其应用.

二项式定理.

充分条件,必要条件,充要条件.

(3)“掌握”的内容有:

函数的基本性质与图象.

对数函数概念、性质、图象.

数列概念、表示法及性质.

数学归纳法.

不等式的性质.

证明绝对值不等式的基本方法.

不等式(组)的解法(包括简单的超越不等式).

(4)“熟练掌握”的内容有:

二次函数的研究.

复数的基本概念,实部、虚部、模、幅角、共轭、线性式、三角函数式.

2. 三角部分

三角部分有 8 个单元,就其目标要求的四个层次分,统计如下.

(1)“了解”的内容有:

三角函数图象.

(2)“理解”的内容有:

任意角三角函数定义.

三角函数单调性,奇偶性,周期性.

三角函数诱导公式,同角三角函数关系.

和、差、倍角、半角,和、积互化,万能置换,恒等变换.

反三角函数概念、性质、恒等式.

三角方程及不等式.

(3)“掌握”的内容有:

三角函数值域,最大、最小值.

3. 立体几何部分

立体几何部分有 9 个单元,就其目标要求的四个层次分,统计如下.

(1)“了解”的内容有:

两直线的平行,相交(垂直),异面关系的判定.

多面体、旋转体表面积和体积.

(2)“理解”的内容有:

直线与平面、平面与平面的平行、垂直,位置关系的判定与性质.