

中等专业学校教材

测量平差

(修訂本)

哈尔滨冶金测量学校控制测量教研组編



中国工业出版社

PDG

中等专业学校教材



測量平差

(修訂本)

哈尔滨冶金測量学校控制測量教研組編

中国工业出版社

本书共十章，主要討論測量平差基本理論和方法、三角測量平差（三、四等三角測量平差為主），各種平差方法在理論上都作了詳細的闡述（公式有詳細推導過程），在實用計算方法和程序上都作了詳細的說明。特別對誤差傳播的理論在實際中的應用及克呂格分組平差在三角測量中的應用作了比較詳細的討論。

內容緊密結合實際，理論闡述淺顯易懂，公式導演詳盡。

本書此次增訂了克呂格分組平差及其應用和間接觀測平差在三角測量上的應用二章，其餘僅作了勘誤訂正。

本書經冶金工業部工業教育司推薦作為中等專業學校試用教材，亦適合中級測量技術人員自修參考用。

測 量 平 差

（修訂本）

哈爾濱冶金測量學校控制測量教研組編

國家測繪總局測繪書刊編輯部編輯（北京三里河國家測繪總局）

中國工業出版社出版（北京修潤閣路丙10號）

北京市書刊出版業營業許可證出字第110號

中國工業出版社第四印刷廠印刷

新華書店北京發行所發行·各地新華書店經售

開本 $850 \times 1168 \frac{1}{32}$ · 印張 $10 \frac{5}{8}$ · 插頁 1 · 字數 277,000

1960年11月原測繪出版社北京第一版

1964年12月北京第二版·1964年12月北京第三次印刷

印數 1,134—4,273 · 定價（科四）1.50元

統一書號：K 15165 · 1397（測繪-19）

序 言

本书作为中等测量专业学校数学用书，及中级测量技术人员自修用书。

全书共分十章，前三章讲述误差理论，这是学习各种平差方法必要的基础知识。第四章、第六章和第七章分别系统地讲述了三种不同的平差方法，这里仅是一般的严格平差方法，对于近似平差法及一些特殊平差法未一一编入。第五章、第八章、第九章和第十章则讲述在专业方面的应用。

本书理论结合实际，在理论方面，着重于概念的阐述和公式的推导，书中所有的平差公式都是根据最小二乘法原理和误差传播定律导来的。着重阐述理论的目的在于使读者学习本书之后，能够将所学过的理论和方法顺利地运用到实际中去，并便于进一步阅读较深的专业书籍。在实际方面，联系专业多，例题多，对公式的规律性和计算方法都有总结或说明。对于复杂公式之推导过程另用小字排印，阅读时如有困难可略去不看，这并不妨碍对公式的运用。

学习本书，除要具有普通测量的知识外，还需要一定的数学基础，一般具有中学的数学知识就行了。如要学得更好，还必须具有一些微分学的知识，因为书中有些地方曾运用极值定理和泰罗定理。

在编写本书时，主要参考希洛夫著“最小二乘法”及陈永龄著“大地测量学”平差部分，例题习题多为假设，以供熟悉方法的参考。由于编者水平有限，本书的缺点和错误在所难免，诚恳地希望读者给予指正和批评。

哈尔滨冶金测量学校
控制测量教研室

目 录

第一章 緒 論

概述	10
§ 1-1. 測量平差的任务及目的	10
§ 1-2. 观测种类	11

第二章 观测誤差及最小二乘法原理

概述	13
§ 2-1. 观测誤差的产生及分类	13
一、錯誤	13
二、系統誤差	14
三、偶然誤差	14
§ 2-2. 偶然誤差的性質	15
§ 2-3. 最小二乘法原理	18
一、算术平均值原理	18
二、最小二乘法原理	20

第三章 观测精度之鑑定

概述	23
§ 3-1. 鑑定观测精度的尺度	23
一、中誤差	23
二、平均誤差	24
三、或是誤差	25
四、相对誤差	26
五、最大誤差	28
§ 3-2. 誤差傳播定律	29
一、观测值的倍数函数	29
二、观测值的和差函数	31
三、观测值的直綫函数	35

四、观测值的任意函数	36
§ 3-3. 偶然误差及系统误差之合併影响	39
§ 3-4. 权	40
一、观测结果的权	40
二、权与中误差的关系	41
三、单位权	43
四、函数的权	45
习题	47

第四章 直接观测平差

概述	49
4-1. 等精度直接观测平差	49
一、最或是值	49
二、最或是值中误差	51
三、观测值中误差	52
四、例题	54
§ 4-2. 不等精度直接观测平差	55
一、最或是值	55
二、最或是值中误差	57
三、单位权中误差	58
四、例题	61
习题	63

第五章 应用问题

概述	65
§ 5-1. 关于水准测量的几个问题	65
一、高差之中误差	65
二、水准路线单位长度的中误差	66
三、环形水准及附合水准的闭合差限度公式之讨论	68
四、水准仪至标尺的距离最大不超过 100 米之理论根据	71
§ 5-2. 关于经纬仪导线测量的几个问题	72
一、角度观测的误差	72

二、鋼尺丈量長度的精度	74
三、閉合多邊形導線及附合導線的角度閉合差限度	75
四、測角及量距的誤差對導線端點位置之影響	77
§ 5-3. 關於三角測量的幾個問題	81
一、三角形閉合差限度的根據	81
二、菲列羅公式的推导	82
三、全圓測回法兩倍照准差變動的範圍	83

第六章 間接觀測平差

概述	84
§ 6-1. 間接觀測平差的意義	85
§ 6-2. 未知量非線性函數化為線性函數	91
§ 6-3. 導入未知量的近似值	94
§ 6-4. 確定未知量之最或是值	96
一、等精度間接觀測	97
二、不等精度間接觀測	99
三、法方程式系數的計算及檢核	101
四、例題	106
§ 6-5. 解法方程式	109
§ 6-6. 改正數平方和的計算	112
§ 6-7. 法方程式約化的檢核計算	116
§ 6-8. 高斯約化計算表格	119
§ 6-9. 高斯——杜力特爾約化計算表格	121
§ 6-10. 未知量最或是值的中誤差	123
§ 6-11. 未知量最或是值之函數的中誤差	129
§ 6-12. 未知量最或是值及其函數之中誤差的計算	132
§ 6-13. 觀測值中誤差。單位權觀測值中誤差	140
§ 6-14. 例題	141
一、等精度觀測舉例	141
二、不等精度觀測舉例	146
習題	153

第七章 条件观测平差

概述	158
§ 7-1. 条件方程式	158
§ 7-2. 化非线性条件方程式为线性方程式	165
§ 7-3. 确定未知量最或是值	166
一、等精度条件观测	166
二、不等精度条件观测	173
§ 7-4. 改正数平方和的计算	178
§ 7-5. 未知量最或是值之函数的中误差	180
§ 7-6. 未知量最或是值及其函数中误差的计算	184
§ 7-7. 观测值中误差。单位权观测值中误差	191
§ 7-8. 例题	191

第八章 条件观测平差在三角测量上的应用

概述	199
§ 8-1. 独立三角网的条件式	200
一、三角形的条件式	200
二、对角线四边形的条件式	201
三、中心点多边形的条件式	205
四、将条件式化为误差方程式	207
五、独立三角网条件数目之计算公式	212
1. 条件总数	212
2. 内角和条件的数目	213
3. 极条件的数目	213
4. 测站条件的数目	215
5. 按方向平差的条件数目	216
§ 8-2. 非独立三角网的条件式	216
一、非独立三角网的条件数目	217
1. 两端都有起算数据的三角网	217
2. 有两条或更多条固定边相连接的三角网	218
3. 被固定边所包围的三角网	218

4. 閉合环三角鎖	220
二、附合条件式及其誤差方程式	220
1. 基綫条件和固定边条件	220
2. 方位角条件和固定角条件	222
3. 縱横坐标条件	223
§ 8-3. 例題	234
习题	238

第九章 克呂格分組平差及其应用

概述	240
§ 9-1. 克呂格分組平差	240
一、克呂格分組平差原理	240
二、精度計算	248
§ 9-2. 克呂格分組平差的特例	251
§ 9-3. 克呂格分組平差的应用	260
一、中点多边形及固定角插点的平差	260
二、独立測区单三角鎖的平差	265
三、棧形三角鎖平差	268
§ 9-4. 克呂格分組平差的推广——三組平差	273
一、基本原理	273
二、改正数計算	273
三、精度計算	275
§ 9-5. 三組平差的应用	276
§ 9-6. 三組平差应用展开系数法	285
一、基本原理	285
二、精度計算	287
§ 9-7. 三組平差应用展开系数法例題	287

第十章 間接觀測平差在三角測量上的应用

概述	298
§ 10-1. 座标平差	299
§ 10-2. 固定四边形内插入一点的座标平差	305
§ 10-3. 座标角平差	310

第一章 緒 論

概 述

本章主要使初学者明确为什么会有测量平差这一門科学，以及这門科学在测量上的用处；此外，介紹几种不同的观测。这些都是我們學習测量平差时应当了解的。

§ 1-1. 测量平差的任务和目的

一切观测結果都不可能避免产生誤差，这已为实践所証明，故我們永远不能测得一量的真值。产生誤差的原因，主要是由于观测者感觉器官不完善，观测仪器不免有缺陷，以及观测时外界自然条件（空气的温度、折光、風等等）的变化等影响所致。

对一量观测一次，其值本可确定，但为了求得更可靠的結果，往往作多次观测，于是就有了多余观测。由于对一量作多次观测，發現其互相間总有差別，这就是誤差产生的表現。所以我們观测仅是在某种程度上找出观测量真值的近似值，但从这些互相矛盾的多次观测結果中，究竟以何值作为可靠的最后成果，这就屬於平差的問題。

测量平差的主要任务，就是研究观测誤差的基本性質及其积累的規律，研究消除观测結果与理論要求間的矛盾。这个矛盾，必須在能求得最靠近真值的值之前提下来消除，以求得最可靠的結果，而不能随便改变观测結果。（高斯所創立的最小二乘法，就是研究在与各观测值之差的平方和为最小的条件下，求取观测量的最后結果。）因此，根据最小二乘法原理导出的一些平差計算的方法，就可由各观测值求得最靠近真值的值。

测量平差要达到的目的有兩個，首先，就是根据各观测值求出未知量最或是值（即最靠近真值的值）；并由各观测值的誤差积累，計算出平差結果的精度，用以鑑定观测質量的好坏。其次，

由于研究了誤差理論及其积累規律，我們又可用一定的計算方法，按照要求而預先規定出觀測結果的允許誤差。这样对指导实际操作和組織測量工作具有重大意义，可作为工作前正确计划和組織的依据，以便适当地選擇作業方法和工具，保證觀測能順利地進行，而其結果又能滿足要求。

§ 1-2. 觀 測 种 类

在測量平差中，將觀測分为以下几种：

一、按觀測量与未知量之間的关系，分为直接觀測和間接觀測。

直接地去确定未知量的觀測，就称为直接觀測。比如，要确定某一角的值，就用經緯仪去直接測定它。

如果确定某未知量，不是直接去觀測它，而是觀測它的函数，这种觀測就称为間接觀測。如图1—1，設欲确定的未知量是 $x(\angle AOB)$ 、 $y(\angle BOC)$ 和 $z(\angle COD)$ ，但觀測的是其函数： $x+y+z(\angle AOD)$ 、 $x+y(\angle AOC)$ 和 $y+z(\angle BOD)$ 。

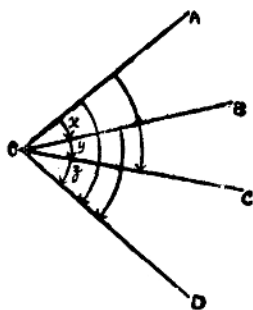


圖 1-1

二、按觀測量之間的关系，分为条件觀測和独立觀測。

如果測定的一些觀測量，必須嚴格滿足于理論上之条件关系。那末，在这种情况下下的觀測就称为条件觀測。比如三角形三內角之和应等于 180° ，因此对三角形各角之觀測属于条件觀測。

如果一些觀測量之間無任何关系，在这种情况下下的觀測就称为独立觀測。例如只觀測一三角形內任意兩個角，這兩觀測量之間沒有几何关系存在，像这样的觀測就属于独立觀測。

三、按觀測时所处的条件，分为等精度觀測及不等精度觀測。

在觀測中要注意觀測結果的質量，觀測的質量取決於觀測時所處的條件。如一組觀測結果是在同樣可靠的條件下獲得的，其觀測質量又認為相同，則這些觀測稱為等精度觀測。

如在一組觀測結果中，各個觀測結果是在不同的可靠條件下而獲得的，其觀測質量認為是不相同的，則這些觀測稱為不等精度觀測。

第二章 觀測誤差及最小二乘法原理

概 述

在这一章中，首先对觀測誤差的种类、性質和处理方法作了歸納性的說明，接着根据偶然誤差（觀測誤差的一种）的性質，以觀測实例导出了最小二乘法原理。最小二乘法原理是处理觀測中既不能避免又不能消除的这个偶然誤差的理論根据，也就是測量平差这一門科学的理論根据。

學習了这一章，讀者就会明白測量平差所处理的誤差是什么样的誤差，以及处理这誤差的理論基础又是什么。这一章是觀測誤差理論的必要知識，又是測量平差的理論基础。

这一章，对具有測量外業知識的讀者來說是很容易理解的，对于还没有具有測量知識的讀者來說，应该積極联系实际，力求在实际工作中去深刻的体会它。

§ 2-1. 觀測誤差的产生及分类

觀測誤差是由于仪器的缺点，觀測者感覺器官不完善和外界条件的变化而产生的。按照觀測誤差的性質和特征，分为錯誤、系統誤差和偶然誤差三种。

一、錯誤

在觀測时，由于觀測者和記錄者之疏忽大意而出現了誤差，这种誤差属于錯誤。例如量距时讀錯一个分划数；測角記錄时，把分数記为度数等等。这种誤差，只要注意檢查就容易發現和避免。因此要求觀測者及記錄者細心操作外，还要注意記錄的檢查，务使在外業中完全消除錯誤，以免造成严重的返工。

二、系統誤差

在相同的觀測條件下，作一系列的觀測，其誤差常保持同一數值，同一符號，或者隨着觀測條件的不同，其誤差遵循着一定的規律變化，凡具有這種性質的誤差稱為系統誤差。例如用20米長的鋼尺量距，量得之距離為 S ，此尺與標準尺比較結果長（或短） α ，則距離 S 就含有誤差 $\frac{\alpha}{20}S$ 。這種誤差的大小與所測之距離成正比，並且保持同一符號。又如用照準軸不平行於水準軸的水準儀進行高程測量，則標尺讀數的誤差就與水準儀至標尺的距離成正比，也保持同一符號。

這種誤差是由于儀器構造有缺陷或檢查校正不嚴格而產生的。這種誤差的變化具有規律性，因此採用觀測的方法或計算的方法就可以消除。例如測水準時，採取前後視距離相等，就可以消除照準軸不平行於水準軸所引起的標尺讀數誤差對高差的影響；經緯儀測角採取正倒鏡觀測，就可以消除照準軸不垂直於水平軸產生的誤差對水平角的影響；又如用長度不合標準的鋼尺去量距離產生的誤差，就可用鋼尺檢定的改正數經過計算加以消除。

此外，系統誤差也有由外界的自然條件和觀測者的影響而產生的。例如空氣溫度變化使鋼尺的長度發生變化，大氣折光對水準測量產生彎氣折光差；又如觀測者照準目標時，習慣把望遠鏡十字絲交點對在目標中央之右側或左側而產生誤差，等等即是。

但是自然條件對觀測之影響，其規律不容易掌握，人的誤差不容易發現，因此除採用一定觀測方法和計算方法以消除或減小其影響外，在觀測時應注意自然條件之變化，以使系統誤差之影響減少到最小。

三、偶然誤差

如果觀測誤差在大小（絕對值）和符號（正負）上均不表示出致性，不能按觀測順序得出一定的規律，這種性質的誤差稱為偶

然誤差。其產生原因很多，如自然條件的變化，儀器構造不精確及校正不能達到理論上的條件，人的感覺器官所不能避免的誤差，甚至觀測者操作的熟練程度和工作情緒好壞等，都會影響觀測結果而產生偶然誤差。這些影響，可能是個別的或同時的出現，對觀測所產生的誤差也可能在不同程度上相互抵消，所以當同一人用同一儀器在同樣情況下作反復觀測時，所得觀測結果往往各不相同。

由於客觀世界在不斷地變化，偶然誤差產生的原因很複雜，找不到一個完全消除它的方法，故在一切觀測結果中都不可避免的含有偶然誤差。但是我們在觀測時，有可能使其對觀測結果的影響減弱到很小。

在平差時，我們所用的觀測結果一般不含有系統誤差和錯誤，因為事先已作過詳盡的檢查和消除工作。但是必須注意，有些系統誤差的來源，我們無法事先知道，因此，在所得的觀測結果中，實際上除含有偶然誤差外，並含有較小的不易發覺的系統誤差。

如果某一組觀測結果，其誤差的數值及符號變化均有一定的規律，則這組觀測所包含的主要的誤差就是系統誤差；若觀測誤差的大小和符號沒有任何規律，則這組觀測所包含的主要的誤差就是偶然誤差。觀測者的任務，就是在觀測的過程中，尽可能地消除系統誤差對觀測結果的影響，或者減弱到比偶然誤差的影響小得多。因此，在判斷觀測結果質量的好壞時，一般均指該觀測結果含有偶然誤差的大小而言。在測量平差中所指的誤差就是偶然誤差。

§ 2-2. 偶然誤差的性質

研究各種觀測列的結果證明，各觀測列之偶然誤差，從表面上來看是無規律可循，但用統計學的方法，可得出所謂統計學上的規律。觀測的個數愈多，這種規律性的表現愈明顯。

現將用統計學方法獲得的偶然誤差規律，即用統計學的方法獲得的偶然誤差之性質分述于下：

一、在一定的觀測條件下，偶然誤差的絕對值不會超過一定

的限值。

二、絕對值小的誤差比絕對值大的誤差出現的個數要多，近于零的誤差出現的個數最多。

三、絕對值相等的正誤差與負誤差出現的個數相等。

四、一量的等精度觀測列，其偶然誤差的算術平均值，隨着觀測次數的增加而趨近于零。即：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n}{n} = 0.$$

上述第一種性質，說明在一定的觀測條件下，觀測的偶然誤差有一定的範圍（即將要提到的最大誤差）。

第二種性質，說明誤差值的規律性。

第三種性質，說明誤差方向的規律性。

第四種性質，說明誤差的抵償性。

現在，我們舉一系列真誤差為例，來說明上述偶然誤差的幾個性質。這列真誤差共40個，照原先觀測的順序為：

表 2-1

觀測順序	真誤差	觀測順序	真誤差	觀測順序	真誤差	觀測順序	真誤差
1	0.15	11	-1.30	21	-0.15	31	-0.58
2	-0.02	12	-0.56	22	-0.50	32	0.95
3	-1.15	13	0.50	23	0.02	33	-1.55
4	0.66	14	-0.50	24	-0.25	34	1.12
5	1.18	15	0.82	25	-0.72	35	-0.66
6	0.67	16	1.29	26	-1.28	36	0.25
7	-0.28	17	0.15	27	1.45	37	0.65
8	-0.17	18	-0.91	28	-0.05	38	-0.22
9	-0.52	19	0.71	29	-2.42	39	1.65
10	-0.83	20	1.27	30	0.98	40	0.17

現在來觀察上列按觀測順序排列的真誤差，在其大小上和符號上，都沒有任何的規律性。這說明這列真誤差是偶然誤差。

為了便於說明偶然誤差的性質，將上列真誤差按其絕對值之