

新纪元教考系列丛书

丛书主编 陈伟志



高考考前100天 有效预测及高效训练

2006年高考总复习

高三 数 学 理科

一本由好题、亮题、原创题构成的精品书

一本以一一对应模式预测高考命题的创新书

一本融考前冲刺能力与应试心理双重训练为一体的科学备考书

东北林业大学出版社



新纪元教考系列丛书

新纪元教考

新编《101》目录索引并图

《101》目录索引并图

《101》目录索引并图

《101》目录索引并图

高考考前100天 有效预测及高效训练

高三 数学 (理科)

丛书主编	陈伟志		
本册主编	赵宝东		
编委	赵宝东	郑召齐	吴启明
	王有梅	乔世磊	王龙坤
	李治国	段智红	盛凤山

东北林业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新纪元教考系列丛书. 高三数学: 理科/陈伟志主编; 赵宝东分册主编. —哈尔滨: 东北林业大学出版社, 2006. 1

ISBN 7-81076-837-9

I. 新… II. ①陈…②赵… III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第157807号

策 划: 杨积广
责任编辑: 杨秋华
封面设计: 许弘凌



NEFUP

新纪元教考系列丛书

高三数学(理科)

Gaosan Shuxue(Like)

丛书主编 陈伟志

本册主编 赵宝东

东北林业大学出版社出版发行
(哈尔滨市和兴路26号)

凯基印刷(上海)有限公司印装
开本889 × 1194 1/16 印张11.25 字数280千字
2006年1月第1版 2006年1月第1次印装

ISBN 7-81076-837-9/G · 289

套定价: 175.00元(共10册)

前 言

市场上同类教辅书上市时间早，对新一年的高考跨年度预测，依据不充分，可信度不高；由于时间过早，变数太大，因而也不敢做具体、大胆的预测，只能千篇一律、点到为止。本丛书就是为了解决上述问题，应广大师生的强烈要求诞生的。

这是一套以一一对应模式预测高考命题的创新书！

她，一反空洞、空话、套话的预测模式，在高考命题人入围前的最有效时间对下一年高考以左右栏一一对应的创新模式进行具体、到位、大胆的预测。这是同类书无法比拟的亮点！

这是一套融考前冲刺能力与应试心理双重训练为一体的科学备考书！

【从高频考点题预测新考点】搜集最近5年来涵盖命题频率最高的考点的高考题，进行深度剖析，得出同一考点5年来在题型、考查角度及侧重点、背景材料等方面的变化规律，并使之与今年高考脉络贯通，辐射出今年的考题雏形。这种预测源于5年来的高频考点题，实实在在地体现高考命题规律，因而更科学、更准确、更可靠，考生一书在手，等于握住了高考制胜的利器，信心自然倍增，有效消除考前焦虑心理。

【从高频名模题预测新考题】将全国名校特级教师或省市级学科带头人精心命制的2005、2006年高考模拟题中出现频率最高的试题进行分类剖析，并以变式的形式进行再预测。这种变式预测是全国名校名师名模中高频率试题的提炼与结晶。考生读之练之，今年的高考题自然成竹于胸，稳操胜券之感油然而生。加之全书所有解析语言有的放矢、点化性强，针对考生考前的焦虑心理，将心理辅导渗透在思路启迪、方法归纳、技巧点拨中，考生在阅读或训练的过程中不知不觉豁然开朗、身心愉悦，充满必胜信心，收到强化能力与心理训练的双重高效。

这是一套由好题、亮题、原创题构成的精品书！

“减负增效”是本丛书的目标追求。第二部分“高效训练篇”按“原创好题”的要求编写。本丛书把“好题”定义在“紧扣考纲，体现命题趋势；在知识交汇点命题，突出能力考查；命题角度新颖，变式拓展性强；典型程度高，有举一反三之效；背景材料新，贴近现实社会和学生生活”五大要素上，全书非好题、亮题不用，以一当十。这是本丛书笑傲行业的利器！

教育部明确指出，高考改革必须体现国家课程改革的方向，渗透新课标理念。为此，我们吸取了基础教育发达、率先实行新课标课程、高考考生最多（2005年参考人数72万人）竞争最激烈的山东省部分资深教研员、高三把关教师的研究成果，可谓用心良苦，但目的只有一个——打造精品书，开创高考复习指导类教辅书编写思想、编写体例、编写方法和质量上的新局面，为考生奉献最有价值的复习指导书！

本丛书严格按最新《考试大纲》编写，供今年全国考生使用。

衷心期望本丛书能给广大师生耳目一新的感觉，并能把莘莘学子推进人生理想的殿堂！

上海新纪元教考研究院

2006年1月

目 录

第一部分 有效预测篇

专题一	集合及简易逻辑	1
专题二	函数	11
专题三	基本初等函数	20
专题四	数列	29
专题五	三角函数	41
专题六	平面向量	51
专题七	不等式	57
专题八	直线和圆的方程	68
专题九	圆锥曲线	81
专题十	直线、平面、简单几何体	93
专题十一	排列、组合与概率	103
专题十二	概率与统计	112
专题十三	极限、导数及应用	119

第二部分 高效训练篇

综合训练 (一)	集合与函数	125
综合训练 (二)	数列与不等式	128
综合训练 (三)	三角与向量	131
综合训练 (四)	解析几何	134
综合训练 (五)	直线、平面、简单几何体	137
综合训练 (六)	排列组合、概率与统计	140
2006 年高考模拟试题一		144
2006 年高考模拟试题二		147
2006 年高考模拟试题三		150
2006 年高考模拟试题四		153
参考答案		156

第一部分 有效预测篇

专题一 集合及简易逻辑

从高频考点题预测新考点

高频考点题

考点一 集合的概念与运算

- ① (2005·湖北卷) 设 P, Q 为两个非空实数集, 定义集合 $P+Q = \{a+b \mid a \in P, b \in Q\}$, 若 $P = \{0, 2, 5\}$, $Q = \{1, 2, 6\}$, 则 $P+Q$ 中元素的个数是 ()
- A. 9 B. 8 C. 7 D. 6

【命题意图】 本小题考查集合、集合的元素、分类计数原理等基本概念与相关计算. 本题在考查基础知识的同时, 要求学生有一定的阅读理解能力和处理新情境问题的应用能力.

【思路点拨】 法一: 从集合 P 中选取加数 a 有 3 种不同方法, 对于选定的每一个 a , 再在集合 Q 中选取加数 b 又有 3 种不同的方法, 故共能得到 9 个和. 考虑到集合中元素的互异性, 又因为 $0+6=6, 5+1=6$ 的结果相同, 故共有不同的和 $9-1=8$, 答案为 B.

法二: 本题也可以采用列举法, 直接选取不同的 8 个和来作为 $P+Q$ 中的元素, 从而选 B.

- ② (2004·全国卷) 设集合 $M = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, $N = \{(x, y) \mid x^2 - y = 0, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, 则集合 $M \cap N$ 中元素的个数为 ()
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【命题意图】 本小题重点考查集合的表示方法、集合中元素的性质、曲线与曲线的交点、二元二次方程的解法及综合计算的能力, 还考查了转化和数形结合的数学思想的应用.

【思路点拨】 法一: 联立 $x^2 + y^2 = 1$ 和 $x^2 - y = 0$ 得两解 $x = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, x = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 从而可知 $M \cap N$ 中元素的个数为 2, 应选 B.

法二: 利用转化和数形结合思想, 将集合的交集问题转化为图像的交点问题. 画出圆和抛物线的简图, 马上可以得出图



今年怎样考?

从左栏五个考题, 我们看到, 在近几年高考中, 本部分仍以考查概念和计算为主, 对与集合有关的概念和运算, 主要从语言表达、符号表示、直观图形三方面考查; 对集合的表示, 要在先“代表元素”后“元素属性”原则下加深理解, 同时要注意集合与不等式、集合与方程、集合与函数的关系. 要重视集合的工具性和它在学习解决其他数学问题中的作用.

今年高考对集合知识的考查肯定仍以考查概念和计算为主, 题型主要是选择题、填空题, 解答题出现的可能性相对较小, 以本部分知识作为工具和其他知识结合起来综合命题的可能性相对会大些. 常常通过和函数的性质综合应用结合起来考查, 具有隐蔽性. 所以同学们在研究集合与函数问题时, 应结合集合、函数的概念和函数的性质进行综合分析. 另外, 新情景立意下的集合问题也是考试的热点. 具体的例子请参加高频名模题的第 4、5 两题和预测新考题的第 3 题.

像有两个交点,应选 B,体现了小题小做的解题策略.

③ (2004·江苏卷)设函数 $f(x) = -\frac{x}{1+|x|}$ ($x \in \mathbf{R}$), 区间 $M=[a, b]$ ($a < b$), 集合 $N = \{y | y = f(x), x \in M\}$, 则使 $M=N$ 成立的实数对 (a, b) 有 ()

- A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 无数多个

【命题意图】 本小题考查知识很多,利用基本函数为载体,考查了集合之间的关系、函数的单调性、奇偶性的灵活运用,综合性较强.

【思路点拨】 解答这类集合问题,应首先认清集合中元素的本质属性,然后再按集合间的关系逐个求解. 由 $f(x) = -\frac{x}{1+|x|}$ ($x \in \mathbf{R}$) 可知为奇函数且为减函数,又 $f(a) = b$, 且 $f(b) = a$, 故点 $(a, b), (b, a)$ 在 $f(x)$ 的图像上, 由 $f(x)$ 为奇函数, 知点 $(-a, -b), (-b, -a)$ 也在 $f(x)$ 的图像上. 由 $f(x)$ 为减函数, 比较 $(a, b), (-b, -a)$ 知 ① $a < -b$ 且 $b > -a$, 或 ② $a > -b$ 且 $b < -a$, 或 ③ $a = -b$, ①② 自身皆有矛盾, 故 $a = -b, a + b = 0$, 故 $f(a) = -b$ 且 $a + b = 0$, 等价于 $b = -\frac{a}{1+|a|}$ 且 $b = -a$, 等价于 $a = b = 0$, 此与 $a < b$ 矛盾, 故选 A.

④ (2004·北京卷) 函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \in P, \\ -x, & x \in M, \end{cases}$ 其中 P, M 为实数集 \mathbf{R} 的两个非空子集, 又规定 $f(P) = \{y | y = f(x), x \in P\}$, $f(M) = \{y | y = f(x), x \in M\}$. 给出下列四个判断:

- ① 若 $P \cap M = \emptyset$, 则 $f(P) \cap f(M) = \emptyset$;
 ② 若 $P \cap M \neq \emptyset$, 则 $f(P) \cap f(M) \neq \emptyset$;
 ③ 若 $P \cup M = \mathbf{R}$, 则 $f(P) \cup f(M) = \mathbf{R}$;
 ④ 若 $P \cup M \neq \mathbf{R}$, 则 $f(P) \cup f(M) \neq \mathbf{R}$.

其中正确判断有 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【命题意图】 此题考查内容为集合的基本知识,但背景新颖,利用抽象函数为载体,考查集合知识与函数性质的综合运用.

【思路点拨】 判断集合是否相同,一定要分析所有的元素是否相同. 排除选项可以利用赋值法进行. 要正确理解奇函数和偶函数的定义,因为只有实数 x 与 $-x$ 同时在定义域内, $f(x)$ 与 $f(-x)$ 才有意义. 所以判断函数奇偶性必须先考虑定义域.

对①可举出反例. 如取 $P = [1, 2], M = [-2, -1]$, 故①错. 对③可举出反例, 如取 $P = [0, +\infty), M = (-\infty, 0)$, 则 $P \cup M = \mathbf{R}$, $f(P) \cup f(M) = [0, +\infty) \neq \mathbf{R}$, 故③错. 对②可给出证明: 若 $P \cup M \neq \emptyset$, 则存在 $x_0 \in (P \cup M)$. 则由 $x_0 \in P$, 知 $f(x_0)$

动动手

① 集合 $M = \{(x, y) | x > 0, y > 0\}$, $N = \{(x, y) | x + y > 0, xy > 0\}$, 则 ()

- A. $M=N$
 B. $M \subseteq N$
 C. $M \supseteq N$
 D. $M \cap N = \emptyset$

② 阅读下面一段话: “张明和李文是好友,他们在复习集合时,决定采用如下的复习方法,即张明提出问题的一部分和问题的框架,而李文必须按照张明的要求编写出可解的问题让张明解决.”

张明就提出了问题的一部分: “已知非空集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq a\}$, … 求出实数 a 的取值范围.” 编题的要求是: “出现两个具有某种关系的集合 B, C , 且集合 B, C 中的字母必须属于 A .”

你能不能帮李文一个忙, 编出这类题 (至少三题):

【解答】 _____

【做题札记】 试根据以上两个题目联想总结一下我们所学的集合中出现了几种元素及其表示法:

【答案】 1. A 2. 略.

$=x_0$. 又由 $x_0 \in M$, 知 $f(x_0) = -x_0$. 由函数值的惟一性知 $x_0 = -x_0$, 故 $x_0 = 0$, 且 $f(x_0) = 0$, 即 $P \cup M = \{0\}$. 于是 $0 \in f(p)$ 且 $0 \in f(m)$, 故 $0 \in f(p) \cap f(m)$, 即 $f(p) \cap f(M) \neq \emptyset$, 即②正确. 对④可给出证明(略). 故选 B.

考点二 集合与简单不等式

⑤ (2003·上海卷) 设集合 $A = \{x \mid |x| < 4\}$, $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 > 0\}$, 则集合 $\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin A \cap B\} =$ _____.

【命题意图】 本小题考查集合的化简, 集合中元素的性质, 补、交集运算等运算通性通法的应用、综合能力.

【思路点拨】 先求出集合 A、B 后, 注意 $x \in A$ 且 $x \notin A \cap B$ 的等价转化. $A = \{x \mid |x| < 4\} = \{x \mid -4 < x < 4\}$, $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 > 0\} = \{x \mid x < 1 \text{ 或 } x > 3\}$, $x \notin A \cap B$ 等价于 $x \in \complement_{\mathbf{R}}(A \cap B)$, 而 $A \cap B = \{x \mid -4 < x < 4\} \cap \{x \mid x < 1 \text{ 或 } x > 3\} = \{x \mid -4 < x < 1 \text{ 或 } 3 < x < 4\}$, 所以 $\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin (A \cap B)\} = \{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$. 故应填 $\{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$.

⑥ (2003·北京卷) 设集合 $A = \{x \mid x^2 - 1 > 0\}$, $B = \{x \mid \log_2 x > 0\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ()

- A. $\{x \mid x > 1\}$ B. $\{x \mid x > 0\}$
C. $\{x \mid x < -1\}$ D. $\{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$

【命题意图】 本题考查了集合的概念和简单不等式的解法等基础知识.

【思路点拨】 只需分别解出 A、B 集合, 再求交集即可. $A = \{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$, $B = \{x \mid x > 1\}$, 所以 $A \cap B = \{x \mid x > 1\}$, 故选 A.

⑦ (2003·北京春考卷) 若不等式 $|ax + 2| < 6$ 的解集是 $(-1, 2)$, 则实数 a 等于 ()

- 6A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【命题意图】 本小题考查了绝对值不等式的解法、不等式的性质、分类讨论的思想及方程的思想.

【思路点拨】 按照解不等式的通常方法做, 但要注意对参数的讨论. 对 a 进行讨论.

法一: 由 $|ax + 2| < 6$ 得 $-8 < ax < 4$, 若 $a = 0$, 则 $x \in \mathbf{R}$, 不合题意; 若 $a > 0$, 则由上式可得 $-\frac{8}{a} < x < \frac{4}{a}$, 由不等式的解为 $-1 < x < 2$, 可得 $-\frac{8}{a} = -1$, 且 $\frac{4}{a} = 2$, 出现矛盾; 若 $a < 0$, 则由 $-8 < ax < 4$, 得 $\frac{4}{a} < x < -\frac{8}{a}$, 由不等式的解为 $-1 < x < 2$, 可



今年怎样考?

从左栏三个考题, 我们看到, 在近几年高考中, 本部分仍以考查简单不等式的解法等通性、通法为主, 以集合的知识为载体与不等式的知识结合的题型是考查的重点.

今年对本部分的考查估计还应以熟练掌握不等式的解法, 特别是一元一次不等式、一元二次不等式、简单的含绝对值不等式的解法为主; 或单独命题, 或隐于其他问题的解答之中; 题型主要是选择题、填空题, 如以解答题形式的命题, 其主要是含参数的分类讨论问题. 因此同学们要在熟练、准确、简单上下功夫. 在解不等式中, 要充分利用数形结合的思想, 使解法变得简单、准确, 解题步骤“程序”化, 可操作性要强.

动手

③ 已知集合

$$M = \left\{ x \mid \frac{(x-4)(x+2)}{(x-7)(x+1)} < 0 \right\}, \text{ 集合}$$

$$N = \{x \mid 2\sqrt{ax} > 3a - x, a < 0\}, \text{ 求}$$

$$\text{集合 } T = \{a \mid M \cap N \neq \emptyset\}$$

【解答】 _____

【做题札记】 _____

得 $\frac{8}{a}=2$, 且 $\frac{4}{a}=-1$, 解得 $a=-4$, 故选 C.

法二: 也可以逐一将备选项代入 $-8 < ax < 4$ 进行验证, 利用排除法可得答案.

考点三 简易逻辑

8 (2005·湖北卷) 对任意实数 a, b, c 给出下列命题:

①“ $a=b$ ”是“ $ac=bc$ ”的充要条件; ②“ $a+5$ 是无理数”是“ a 是无理数”的充要条件; ③“ $a>b$ ”是“ $a^2>b^2$ ”的充分条件; ④“ $a<5$ ”是“ $a<3$ ”的必要条件.

其中真命题的个数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【命题意图】 本小题在考查命题的概念、命题的真假判断、充要条件的概念及判断的同时, 还考查了等式和不等式的性质应用.

【思路点拨】 采取对每一命题逐一判断的方法有助于我们做出正确的选择. 命题①在 $c=0$ 时不正确, 即 $a=b$ 只是 $ac=bc$ 的充分不必要条件; 注意到无理数的概念与实数的加法运算, 可知命题②是真命题; 命题③在 a, b 至少有一个是负数时不正确, 所以命题③是假命题; 由不等式的性质, 命题④是真命题; 综上, 命题②④是真命题, 故选 B.

9 (2005·湖南卷) 集合 $A = \{x | \frac{x-1}{x+1} < 0\}$, $B = \{x | |x-b| < a\}$, 若“ $a=1$ ”是“ $A \cap B \neq \emptyset$ ”的充分条件, 则 b 的取值范围是 ()

- A. $-2 \leq b < 0$ B. $0 < b \leq 2$
C. $-3 < b < -1$ D. $-1 \leq b < 2$

【命题意图】 本小题命题者从求参数范围的角度出发, 考查了分式不等式及绝对值不等式的解法、命题充分条件的判断方法, 有一定的综合性.

【思路点拨】 先求集合 A, B , 由条件强弱做出判断. 易知集合 $A = \{x | -1 < x < 1\}$, 集合 $B = \{x | b-a < x < b+a\}$, 当 $a=1$ 时, $B = \{x | b-1 < x < 1+b\}$; 又因为 $a=1$ 是 $A \cap B \neq \emptyset$ 的充分条件, 所以 $-1 \leq b < 2$, 故选 D.

10 (2004·福建卷) 命题 p : 若 $a, b \in \mathbb{R}$, 则 $|a| + |b| > 1$ 是 $|a+b| > 1$ 的充要条件; 命题 q : 函数 $y = \sqrt{|x-1|} - 2$ 的定义域是 $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$, 则 ()

- A. “ p 或 q ”为假 B. “ p 且 q ”为真
C. p 真 q 假 D. p 假 q 真

【命题意图】 本小题利用函数和不等式的知识考查了复

【答案】 $T = \{a | a| < -\frac{1}{9}\}$.



今年怎样考?

从左栏三个考题, 我们看到, 在近几年高考中, 对简易逻辑知识的考查命题以集合、函数、不等式、立体几何中的线面关系等知识为载体, 考查命题间的关系的判定.

今年对本部分的考查估计多以选择题出现, 有时也隐含于解答題中; 主要考查仍然是对命题间关系的判定. 因此同学们在学习时, 对命题真假的判定, 要从条件的“强”“弱”、满足条件的元素集合的包含关系、转换等价命题等角度训练判断能力. 充要条件的判定, 首先要从题目的叙述中认定条件与结论, 然后判断条件、结论的关系, 得出正确结论. 由于这部分知识是理解数学问题, 阐述数学知识的工具, 往往渗透于数学的各个角落, 应引起足够的重视.

动动手

4 若不等式 $|x-1| < a$ 成立的充分条件为 $0 < x < 4$, 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $[3, +\infty)$
B. $[1, +\infty)$
C. $(-\infty, 3]$
D. $(-\infty, 1]$

【解答】 _____

合命题真假的判断.

【思路点拨】 首先将已知命题具体化,然后看条件的强弱做出判断.因为 $a, b \in \mathbf{R}, |a \cdot b| \leq |a| \cdot |b|$, 所以由 $|a| + |b| > 1$ 不一定推出 $|a+b| > 1$. 例如: $a = -1, b = 1$, 则 $|a| + |b| = 2 > 1$ 成立, 但 $|a+b| = 0 < 1$, 故 $|a| + |b| > 1$ 不是 $|a+b| > 1$ 的充分条件, 因此, 命题 p 假. 又使 $y = \sqrt{|x-1|} - 2$ 有意义, 须满足条件 $|x-1| - 2 \geq 0$, 即 $|x-1| \geq 2$. 解得 $x \leq -1$ 或 $x \geq 3$, 即 $x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$, 所以命题 q 真, 故选 D.

【做题札记】

【答案】 A

从高频名模题预测新考题

高频名模题

考点一 集合的概念与运算

① (南京·金陵中学) 已知 $M = \{y | y = x^2\}, N = \{y | x^2 + y^2 = 2\}$, 则 $M \cap N =$ ()

- A. $\{(1,1), (-1,1)\}$ B. $\{1\}$
C. $[0,1]$ D. $[0, \sqrt{2}]$

【命题意图】 本题考查集合的概念和有关运算, 要求能够正确理解集合概念并运算, 关键要分清集合元素的本质属性. 本题是求 y 的公共解, 而不是求曲线的交点坐标, 不能错选 A.

【思路点拨】 $M = \{y | y = x^2\}$, 即 $y \geq 0$. $N = \{y | x^2 + y^2 = 2\}$, 即 $-\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$. 故 $M \cap N = [0, \sqrt{2}]$, 选 D.

② (淮安·淮安一中) 已知 a 为不等于零的实数, 那么集合 $M = \{x | x^2 - 2(a+1)x + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$ 的子集的个数为 ()

- A. 1 个 B. 2 个
C. 4 个 D. 1 个或 2 个或 4 个

【命题意图】 本题考查集合、集合子集等概念及一元二次方程的根与判别式 Δ 之间的关系.

【思路点拨】 由题意判别式 $\Delta = 4a^2 - 8a$, 因此 $\Delta = 0$ 或 $\Delta > 0$ 或 $\Delta < 0$, 从而集合可有一个元素, 两个元素, 或空集. 所以其子集个数分别是 2 个、4 个或 1 个, 因此选 D.

③ (潍坊·诸城一中) 若 $A \cap B = \emptyset$, 且 $A \cup B = \{a, b\}$, 则满足条件的集合 A, B 的组数有 ()

- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

【命题意图】 本题考查集合中的空集、子集、交集、并集等概念, 正确理解这些概念是解答本题的关键.

预测新考题

① 已知集合 $P = \{x | y = x^2 - 1\}$, 集合 $Q = \{y | y = x^2 - 1\}$, 那么 $P \cap Q$ 等于 ()

- A. \emptyset B. P
C. Q D. \mathbf{R}

【命题意图】 本小题考查了集合概念及其集合的表示方法和两集合间关系的确定. 对元素属性的确定是关键.

【思路点拨】 首先根据已知条件确定元素的特征. 因为 $P = \mathbf{R}, Q = \{y | y \geq -1\}$, 所以 $P \cap Q = Q = \{y | y \geq -1\}$, 故选 C.

② 已知集合 $M = \{0, 1\}$, 集合 $N = \{x | x \subseteq M\}$, 则集合 N 中的元素个数是 ()

- A. 1 B. 2
C. 3 D. 4

【命题意图】 本小题考查了集合、子集等概念及元素与集合的关系, 集合与集合的关系, 要求对概念有较深的理解.

【思路点拨】 首先确定集合 N 中的元素的特征. 集合 N 是集合 M 的子集, 所以 N 中元素的个数就是集合 M 的真子集的个数 2^2

【思路点拨】 确定集合 A, B 里的元素特征是关键. 因为 $A \cap B = \emptyset$, 且 $A \cup B = \{a, b\}$, 所以集合 A 的可能情况有 4 种, 即 $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$, 对应的集合 B 的情况也有 4 种, 故选 B.

④ (江苏·启东中学) 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, A 与 B 是 U 的子集, 若 $A \cap B = \{1, 3, 5\}$, 则称 (A, B) 为“理想配集”. 则所有“理想配集”的个数是 _____.

【命题意图】 本题考查对新情景立意题的理解和对情景知识的再造, 考查创新能力. 错误主要出在对集合中交集的错误理解, 导致重复和遗漏.

【思路点拨】 正确理解 (A, B) 为“理想配集”的概念是关键. 两个集合中都必须含有 $\{1, 3, 5\}$; 假设 A 中只含共同元素, 则 B 除共同元素外可以取 $\{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}, \{2, 4, 6\}$, 共有 7 组; 假设 A 在共同元素外只含一元素, 如含 $\{2\}$, 则 B 或不取, 或取 $\{4\}, \{6\}, \{4, 6\}$, 共有 4 组, 同理, A 只取 $\{6\}$ 或 $\{4\}$ 时, 各有 4 组, 共 12 组; 假设 A 在共同元素外含两元素, 如含 $\{2, 4\}$, 则 B 只有不含、只含 $\{6\}$ 两组情况, 同理 B 含 $\{2, 6\}, \{4, 6\}$ 时各有 2 组, 共 6 组; 假设 A 含所有元素, 则 B 只能含共同元素; 最后就是 A, B 都只含共同元素. 故合计 $7 + 12 + 6 + 1 + 1 = 27$.

⑤ (日照·实验高中) 给定集合 A, B , 定义 $A * B = \{x | x = m - n, m \in A, n \in B\}$. $A = \{4, 5, 6\}, B = \{1, 2, 3\}$, 则集合 $A * B$ 中的所有元素之和为 _____ ()

A. 15 B. 14 C. 27 D. -14

【命题意图】 本题考查新情景立意下的集合问题, 这是近年高考常见的题型, 确定集合 $A * B$ 的元素是解决本题的关键.

【思路点拨】 首先确定集合 $A * B$ 的元素特征. $A * B = \{3, 2, 1, 4, 5\}$, 元素和为 15.

⑥ (淮安·淮安一中) 设集合 $M = \left\{x \mid m \leq x \leq m + \frac{3}{4}\right\}, N = \left\{x \mid n - \frac{1}{3} \leq x \leq n\right\}$, 且 M, N 都是集合 $\{x | 0 \leq x \leq 1\}$ 的子集. 如果把 $b - a$ 叫做集合 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 的“长度”, 那么集合 $M \cap N$ 的“长度”的最小值是 _____ ()

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{12}$ D. $\frac{5}{12}$

【命题意图】 本题考查集合背景下的新立意题目, 考查学生的思维能力、分析问题的能力, 通过对集合子集的理解, 抽象出集合的元素属性问题, 可以借助数轴解决. 错误容易出在对题意的把握和对集合中长度最小值的分析上.

$-1 = 3$. 故选 C.

③ 设集合 $M = \{3, 4, 5\}, N = \{4, 5, 6, 7\}$, 定义 $M * N = \{(a, b) | a \in M, b \in N\}$, 则 $M * N$ 中元素的个数为 _____ ()

A. 3 B. 7
C. 10 D. 12

【命题意图】 本题是一道有新的集合定义的题目. 从构建新的集合考查学生分析问题解决问题的能力.

【思路点拨】 根据 $M * N$ 的定义知, 它的元素为 (a, b) , 因为 $a \in M, b \in N$, 所以 $M * N$ 中元素个数为 $3 \times 4 = 12$ 个.

④ 已知集合 $P = \{a | a = 3n, n \in \mathbf{Z}\}, Q = \{b | b = 3n + 1, n \in \mathbf{Z}\}, R = \{c | c = 3n + 2, n \in \mathbf{Z}\}$, 其中 $a \in P, b \in Q, c \in R$, 则 $d = a - b + c$ 有 _____ ()

A. $d \in P$ B. $d \in Q$
C. $d \in R$ D. $d \in Q \cup R$

【命题意图】 本小题考查了集合及其元素属性的基本知识.

【思路点拨】 首先确定各个集合中元素的特征.

法一: 因为 $a \in P, b \in Q, c \in R$, 所以设 $a = 3n, b = 3m + 1, c = 3k + 2 (n, m, k \in \mathbf{Z})$, 则

$d = 3n - 3m - 1 + 3k + 2 = 3(n - m + k) + 1$, 所以 $d \in Q$, 故选 B.

法二: 因为是选择题, 故可赋值, $a = 3, b = 4, c = 5, a - b + c = 4$, 故选 B.

【思路点拨】 准确理解长度的意义. 由题意可知 $0 \leq m \leq \frac{1}{4}, \frac{1}{3} \leq n \leq 1$, 又因为 M, N 是集合 $\{x | 0 \leq x \leq 1\}$ 的子集, 在 $[0, 1]$ 内找集合 $M \cap N$ 的“长度”的最小值, 我们可以令 $m=0, n=1$ 即取 $M = [0, \frac{3}{4}], N = [\frac{2}{3}, 1]$, 这样使 $M \cap N$ 的“长度”的最小值为 $\frac{1}{12}$, 选 C.

考点二 集合与简单不等式

⑦ (上海·育才中学) 若非空集合 $A = \{x | 2a+1 \leq x \leq 3a-5\}, B = \{x | 3 \leq x \leq 22\}$, 则能使 $A \subseteq (A \cap B)$ 成立的所有 a 的集合是 ()

- A. $\{a | 1 \leq a \leq 9\}$ B. $\{a | 6 \leq a \leq 9\}$
C. $\{a | a \leq 9\}$ D. \emptyset

【命题意图】 本题考查集合的交集与子集的有关知识, 首先要搞清 $A \subseteq (A \cap B)$ 的意义, 明确 A, B 两集合的包含关系, 需要借助数轴加以分析解决. 错误主要出在把 $A \subseteq (A \cap B)$ 的意义搞反或直接不理解, 无从下手.

【思路点拨】 寻找 $A \subseteq (A \cap B)$ 的等价关系是关键. 要使 $A \subseteq (A \cap B)$, 则必须满足 $A \subseteq B$, 即 $2a+1 \geq 3$ 且 $3a-5 \leq 22$ 解得 $1 \leq a \leq 9$, 然而仅考虑此并不准确, 因为集合 A 中 $2a+1 \leq 3a-5$, 必须 $a \geq 6$, 所以选 B.

⑧ (江苏·丰桥中学) 设集合 $M = \{x | -1 \leq x \leq 2\}, N = \{x | x \leq a\}$. 若 $M \cap N \neq \emptyset$, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 2)$ B. $(-1, +\infty)$
C. $[-1, +\infty]$ D. $[-1, 1]$

【命题意图】 本题考查集合的运算和对集合中参数的讨论问题.

【思路点拨】 可以借助数轴进行运算, 要注意审清题目中交集、并集、补集的运算意义. 只要使 M 和 N 有公共部分就能满足题意, 利用数轴得答案 C.

⑨ (山东·日照一中) 不等式组 $\begin{cases} x > a^2+1 \\ x < 2a+4 \end{cases}$ 有解, 则实数 A 的取值范围是 ()

- A. $(-1, 3)$ B. $(-3, 1)$
C. $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ D. $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

【命题意图】 本题考查基本不等式的解法和等价转化的

⑤ 若集合 $M = \{x | x^2 + x - 6 = 0\}, N = \{x | kx + 1 = 0\}$, 且 $N \subseteq M$, 求 k 的可能值组成的集合.

【命题意图】 本小题考查了集合中的子集、空集等概念. 在集合与方程等知识的结合处命题是近年高考常见的题型.

【思路点拨】 理解集合 $N = \{x | kx + 1 = 0\}$ 的元素特征是关键. 集合 $M = \{-3, 2\}$, 当 $k=0$ 时, 集合 $N = \emptyset$, 满足 $N \subseteq M$. 当 $k \neq 0$ 时, 方程 $kx + 1 = 0$ 的解为 $x = -\frac{1}{k}$. 为使 $N \subseteq M$, 可使 $-\frac{1}{k} = -3$, 或 $-\frac{1}{k} = 2$, 即 $k = \frac{1}{3}, k = -\frac{1}{2}$. 故所求集合为 $\{0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\}$.

⑥ 不等式 $2x^2 - 3|x| - 35 > 0$ 的解为 ()

- A. $x < -\frac{7}{2}$ 或 $x > 5$
B. $0 < x < \frac{7}{2}$ 或 $x > 5$
C. $-\frac{7}{2} < x < 5$ 或 $x > 7$
D. $x < -5$ 或 $x > 5$

【命题意图】 在含绝对值不等式和一元二次不等式交叉处命题, 重在考查基本不等式的解法, 考查综合应用知识的能力.

【思路点拨】 找原不等式的等价形式. 不等式 $2x^2 - 3|x| - 35 > 0$
 $\Leftrightarrow 2|x|^2 - 3|x| - 35 > 0$
 $\Leftrightarrow (2|x| + 7)(|x| - 5) > 0$
 $\Leftrightarrow |x| > 5 \Leftrightarrow x > 5$ 或 $x < -5$. 故

能力.

【思路点拨】 关键寻找原不等式组有解的等价形式. 要使原不等式组有解, 必须有 $a^2 + 1 < 2a + 4$ 有解, 解不等式得 $-1 < x < 3$, 故选 A.

10 (南京·金陵中学) 若不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集是 $\{x | x < -2, \text{ 或 } x > -\frac{1}{2}\}$, 则 $ax^2 - bx + c > 0$ 的解集是 ()

- A. $\{x | -\frac{1}{2} < x < 2\}$ B. $\{x | \frac{1}{2} < x < 2\}$
 C. $\{x | x < \frac{1}{2}, \text{ 或 } x > 2\}$ D. $\{x | x < -\frac{1}{2}, \text{ 或 } x > 2\}$

【命题意图】 本题考查一元二次不等式的解法及一元二次方程根与系数的关系.

【思路点拨】 从一元二次不等式的解集、一元二次方程的根、一元二次函数图像三者之间的关系方面去考虑. 由不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集是 $\{x | x < -2, \text{ 或 } x > -\frac{1}{2}\}$, 可得: $-2, -\frac{1}{2}$ 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根, 而且 $a < 0$, 从而可推出 $2, \frac{1}{2}$ 是方程 $ax^2 - bx + c = 0$ 的两根, 所以 $ax^2 - bx + c > 0$ 的解是 $\frac{1}{2} < x < 2$, 因此选 B.

11 (山东·五莲一中) 设非空集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq a\}$, $B = \{y | y = 2x + 3, x \in A\}$, $C = \{z | z = x^2, x \in A\}$, 若 $C \cap B = C$, 求实数 a 的取值范围.

【命题意图】 本小题考查了集合的运算及二次函数的值域以及分类讨论的数学思想方法.

【思路点拨】 在化简集合 C 时, 对二次函数 $z = x^2$, ($x \in A$) 的值域要分情况讨论求解. 因为 $A = \{x | -2 \leq x \leq a\}$, 所以 $B = \{y | y = 2x + 3, x \in A\} = \{y | -1 \leq y \leq 2a + 3\}$. ①当 $-2 \leq a \leq 0$ 时, $C = \{z | z = x^2, x \in A\} = \{z | a^2 \leq z \leq 4\}$, 要使 $C \cap B = C$, 须 $a^2 \geq -1$ 且 $2a + 3 \geq 4$, 解得 $a \geq \frac{1}{2}$, 所以无解; ②当 $0 < a \leq 2$ 时, $C = \{z | 0 \leq z \leq 4\}$, 要使 $C \cap B = C$, 须 $2a + 3 \geq 4$, 解得 $a \geq \frac{1}{2}$; 所以 $\frac{1}{2} \leq a \leq 2$; ③当 $a > 2$ 时, $C = \{z | 0 \leq z \leq a^2\}$, 要使 $C \cap B = C$, 须 $a^2 \leq 2a + 3$, 解得 $-1 \leq a \leq 3$, 所以 $2 < a \leq 3$. 综合①②③可知 $\frac{1}{2} \leq a \leq 3$.

选 D.

7 已知集合 $M = \{x | x + 3x + 2 \geq 0\}$, $N = \{x | mx^2 - 4x + m - 1 > 0, m \in \mathbf{R}\}$, 若 $M \cap N = \emptyset$, 且 $M \cup N = M$, 求 m 的取值范围.

【命题意图】 本题考查了集合与集合的关系的基本知识, 以及含参数的问题的讨论和等价转化的数学思想的运用.

【思路点拨】 解决这类含参数集合综合问题的关键是等价转化集合的表示或化简集合, 然后依据数形结合进行分类讨论. 由已知 $M = \{x | x^2 + 3x + 2 \geq 0\}$, 得 $M = \{x | x \leq -2 \text{ 或 } x \geq -1\}$, 由 $M \cap N = \emptyset$, 得 ① $N = \emptyset$, 或 ② $N = \{x | -2 < x < -1\}$.

又因为 $M \cup N = M$, 所以 $N = \{x | -2 < x < -1\}$ 不成立, 否则 $M \cup N = \mathbf{R}$, 与题设 $M \cup N = M$ 矛盾. 由上面分析知 $N = \emptyset$.

由已知 $N = \{x | mx^2 - 4x + m - 1 > 0, m \in \mathbf{R}\}$, 结合 $N = \emptyset$, 得对一切 $x \in \mathbf{R}$, $mx^2 - 4x + m - 1 \leq 0$ 恒成立, 于是有 $m < 0$, 且 $16 - 4m(m - 1) \leq 0$, 解得 $m \leq \frac{1 - \sqrt{17}}{2}$. 所以 m 的取值范围是

$$\left\{ m \mid m \leq \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \right\}$$

8 $\begin{cases} a+b > 4 \\ ab > 4 \end{cases}$ 是 $\begin{cases} a > 2 \\ b > 2 \end{cases}$ 的 _____ 条件.

【命题意图】 本小题利用不等式做载体考查对命题之间关系的判断.

【思路点拨】 由 $\begin{cases} a > 2 \\ b > 2 \end{cases}$ 可以

考点三 简易逻辑

12 (湖北·黄冈中学)已知命题 $p: m \geq 1$, 命题 $q: 2m^2 - 9m + 10 < 0$. 若 p, q 中有且仅有一个为真命题, 则实数 m 的取值范围是_____.

【命题意图】 本题考查命题的真假、不等式的解法、及集合之间的关系. 要求学生能够判断命题的真假, 理清集合之间的关系. 错误容易出在对命题的理解上.

【思路点拨】 p, q 中有且仅有一个为真命题, 有两种情况: (1) p 真、 q 假, (2) p 假、 q 真. 当 p 真、 q 假时解得 $[1, 2]$ 或 $[\frac{5}{2}, +\infty)$, 当 p 假、 q 真时解得空集, 然后两种结果求并集. 答案: $[1, 2] \cup [\frac{5}{2}, +\infty)$.

13 (浙江·温州一中)设命题 P : 函数 $f(x) = x + \frac{a}{x} (a > 0)$ 在区间 $(1, 2)$ 上单调递增; 命题 Q : 不等式 $|x-1| - |x+2| < 4a$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都成立. 若“ P 或 Q ”是真命题, “ P 且 Q ”是假命题, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\frac{3}{4} < a \leq 1$ B. $\frac{3}{4} \leq a < 1$
 C. $0 < a \leq \frac{3}{4}$ 或 $a > 1$ D. $0 < a < \frac{3}{4}$ 或 $a \geq 1$

【命题意图】 本题考查参数的讨论问题, 考查函数 $f(x) = x + \frac{a}{x}$ 的有关性质, 考查数形结合的数学思想的运用. 错误容易出在对命题的理解和参数的范围求解上.

【思路点拨】 从函数单调性和绝对值不等式入手对参数进行讨论, 然后对命题真假进行判断和理解. 函数 $f(x) = x + \frac{a}{x} (a > 0)$ 在区间 $(1, 2)$ 上单调递增成立的 a 的范围是 $a \leq 1$, 不等式 $|x-1| - |x+2| < 4a$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都成立的 a 的范围是 $a > \frac{3}{4}$, 要使“ P 或 Q ”是真命题, “ P 且 Q ”是假命题”这一条件成立, 必须有一范围使两命题其一成立, 其一不成立, 而 $0 < a \leq \frac{3}{4}$ 使 P 成立、使 Q 不成立, $a > 1$ 使 Q 成立、使 P 不成立, 正好满足“ P 或 Q ”是真命题, “ P 且 Q ”是假命题. 故答案为 C.

14 (浙江·绍兴一中)“ $-4 < k < 0$ ”是“函数的值恒为正值”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

推出 $\begin{cases} a+b > 4 \\ ab > 4 \end{cases}$, 而 $\begin{cases} a+b > 4 \\ ab > 4 \end{cases}$ 推不

出 $\begin{cases} a > 2 \\ b > 2 \end{cases}$, 如 $a=1, b=5$. 举反例

否定, 所以是必要不充分.

9 已知 $k \in \{a | -1 < a < 1, a \neq 0\}$, 设命题 $p: y = kx + 2$ 005 的值随 x 的增大而增大; 命题 q : 不等式 $x + |x - 2k| > 1$ 的解集为 \mathbf{R} . 当命题 p, q 有且只有一个正确时, 求实数 k 的取值范围.

【命题意图】 本小题考查了集合的基本知识, 函数的性质和含参数的不等式的解集的讨论等知识. 考查了学生的综合分析和解决问题的能力. 在集合、函数、不等式等多个知识点的交汇处命题是近年高考的显著特点.

【思路点拨】 将已知条件转化为等价的简单不等式. 首先研究 q :

因为 $x + |x - 2k| = \begin{cases} 2x - 2k (x \geq 2k) \\ 2k (x < 2k) \end{cases}$, 所以 $x + |x - 2k|$ 的最小值是 $2k$. 因为 $x + |x - 2k| > 1$ 的解集为 \mathbf{R} , 所以 $2k > 1, k > \frac{1}{2}$. 结合 $k \in \{a | -1 < a < 1, a \neq 0\}$ 知 q 正确时, $\frac{1}{2} < k < 1$.

q 不正确时, $-1 < k \leq \frac{1}{2}$, 且 $k \neq 0$. 其次研究 $p: y = kx + 2$ 005 的值随 x 的增大而增大, $k > 0$; 反之 $k \leq 0$. 所以 p 正确时, $0 < k < 1$; p 不正确时, $-1 < k < 0$. 综上所述, 当 p 正确且 q 不正确时, $0 < k$

【命题意图】 本题考查函数值恒正、恒负的参数讨论问题以及命题充要关系的判定.

【思路点拨】 寻找命题“函数 $y=x^2+kx-k$ 的值恒为正”的等价命题是关键. 要使函数 $y=x^2-kx-k$ 的值恒为正值, 只要满足 $\Delta < 0$, 即 $k^2+4k < 0$, 解得 $-4 < k < 0$, 如果 $-4 < k < 0$, 则 $\Delta < 0$. 所以函数 $y=x^2-kx-k$ 的值恒为正值, 所以选 C.

$\leq \frac{1}{2}$; 当 p 不正确且 q 正确时, $k \in \emptyset$. 所以 k 的取值范围是 $0 < k \leq \frac{1}{2}$.

专题二 函数

从高频考点题预测新考点

高频考点题

考点一 函数的概念

① (2005·浙江卷) 设 $f(x) = \begin{cases} |x-1|-2, & |x| \leq 1 \\ \frac{1}{1+x^2}, & |x| > 1 \end{cases}$,

则 $f\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right] =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{4}{13}$ C. $-\frac{9}{5}$ D. $\frac{25}{41}$

【命题意图】 本小题用分段函数为载体, 从求分段函数值出发, 考查了函数定义域、解析式、函数值等概念, 要求对函数概念的理解更深刻、全面、到位.

【思路点拨】 正确理解分段函数、复合函数的概念, 注意自变量、函数值的位置转化. 因为 $\frac{1}{2} \in [-1, 1]$, 所以 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left|\frac{1}{2}-1\right|-2 = \frac{1}{2}-2 = -\frac{3}{2} \in (-\infty, -1)$, 所以 $f\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right] = f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{13}$. 故选 B.

② (2005·上海卷) 设定义域为 R 的函数 $f(x) = \begin{cases} |\lg|x-1||, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$, 则关于 x 的方程 $f^2(x) + bf(x) + c = 0$

有 7 个不同实数解的充要条件是 ()

- A. $b < 0$ 且 $c > 0$ B. $b > 0$ 且 $c < 0$
C. $b < 0$ 且 $c = 0$ D. $b \geq 0$ 且 $c = 0$

【命题意图】 本小题用分段函数为载体, 考查一元二次方程、绝对值、对数方程等综合知识.

【思路点拨】 注意利用选择题的特性, 设而不求, 同时当 $f(x) = 0$ 时, 已经有 3 个解. 已知 $f(x) \geq 0$, 若 $f(x) = d > 0$, 则 $|\lg|x-1|| = \pm d$, 所以 $x-1 = \pm 10^{\pm d}$, 它是四个不同的值. 因此要使 $f^2(x) + bf(x) + c = 0$ 有 7 个不同实数解, 只需关于 $f(x)$ 的方程有一个正根, 一个零根, 故选 C.



今年怎样考?

从左栏的四个题目可以看出, 近年的高考对函数概念的考查主要从函数三要素、函数解析式、反函数等入手, 考查函数基本知识、函数与方程、函数与不等式的关系和数形结合等思想方法.

今年对本考点的考查估计多以选择题、填空题的形式出现, 内容还是以函数基本知识为主, 但应该特别注意分段函数. 分段函数除了需要函数知识、方法、能力以外, 要求对函数概念理解更深刻. 它涉及的题型多样, 有求分段函数解析式, 求分段函数中自变量的范围, 求分段函数的最值、图像、反函数及分段函数应用等. 同学们在复习时应抓住分段函数中的定义域及对应关系, 结合有关性质、图像求解.

动动手

① 符号 $[x]$ 表示不超过的最大整数, 如 $[\pi] = 3, [-1.08] = -2$ 定义函数 $\{x\} = x - [x]$, 那么下列命题中正确的是_____.

(1) 函数 $\{x\}$ 的定义域为 R , 值域为 $[0, 1]$;

(2) 方程 $\{x\} = \frac{1}{2}$, 有无数解;

(3) 函数 $\{x\}$ 是周期函数;

(4) 函数 $\{x\}$ 是增函数.

3 (2005·天津卷) 设 f^{-1} 是函数 $f(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x}) (a > 1)$ 的反函数, 则使 $f^{-1}(x) > 1$ 成立的 x 的取值范围为 ()

- A. $(\frac{a^2-1}{2a}, +\infty)$ B. $(-\infty, \frac{a^2-1}{2a})$
 C. $(\frac{a^2-1}{2a}, a)$ D. $[a, +\infty)$

【命题意图】 本小题考查反函数的概念及性质和简单不等式的解法.

【思路点拨】 利用求反函数基本方法:

法一: 由已知得 $f^{-1} = \log_a(x + \sqrt{x^2+1})$, 由 $\log_a(x + \sqrt{x^2+1}) > 1$, 解得 $x > \frac{a^2-1}{2a}$, 故选 A.

法二: 注意到 $f(x)$ 是增函数, 则 $f^{-1}(x)$ 也是增函数.

$f^{-1}(x) > 1$ 成立的 x 的取值范围的含义是: 对 $f(x)$ 而言, $x=1$ 时 $f(x) > f(1)$, 即对 $f^{-1}(x)$ 而言 $x > f(1)$, 即 $x > \frac{a - a^{-1}}{2} = \frac{a^2-1}{2a}$.

4 (2005·湖南卷) 设函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(1, 2)$ 对称, 且存在反函数 $f^{-1}(x)$, $f(4) = 0$, 则 $f^{-1}(4) =$ _____.

【命题意图】 本小题考查了函数、反函数的概念, 互为反函数的图像间的关系及函数图像的对称问题等.

【思路点拨】 利用数形结合的方法, 通过分析计算观察得出结果. 或根据函数及互为反函数的图像的点的对称关系式, 运用代数方法求解.

法一: 因为函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(1, 2)$ 对称, 所以 $f(x) = 4 - f(2-x)$, 由 $f(4) = 0$ 代入上式, 得 $f(-2) = 4$, 由函数和反函数的关系得 $f^{-1}(4) = -2$.

法二: 由已知 $(4, 0)$ 在 $f(x)$ 的图像上, 因为函数 $f(x)$ 的图像关于 $(1, 2)$ 对称, 所以点 $(4, 0)$ 关于点 $(1, 2)$ 对称的点 $(-2, 4)$ 也在 $f(x)$ 的图像上. 从而点 $(-2, 4)$ 关于直线 $y=x$ 对称的点 $(4, -2)$ 在 $f^{-1}(x)$ 图像上, 即 $f^{-1}(4) = -2$.

考点二 函数的性质

5 (2005·重庆卷) 若函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数, 在 $(-\infty, 0]$ 上是减函数, 且 $f(2) = 0$, 则使得 $f(x) < 0$ 的 x 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 2)$ B. $(2, +\infty)$
 C. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ D. $(-2, 2)$

【命题意图】 本小题考查了函数的性质和数形结合的数学思想方法.

【思路点拨】 对于抽象函数问题, 解决方法一般为模式化

2 已知函数 $f(x) =$

$\log_3 \frac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 最大值为 2, 最小值为 0, 求 m, n 的值.

【解答】

【做题札记】 函数的值域(或最值)是高考的重要的考点和热点之一, 故掌握求函数值域(或最值)的常用办法显得尤为重要, 试在这里做出初步总结:

【答案】 1. (2)(3); 2. $m=n=5$



今年怎样考?

从左栏的四个题目可以看出, 近年的高考对函数单调性、奇偶性、周期性等性质的考查, 多结合方程或不等式知识进行, 以抽象函数为载体, 主要考查函数基本概念基本推理及应用能力.