100课

高中数学单元复习

明知白·蒋　庚·刘汉文·魏有德　主编

四川大学出版社

高中数学单元复习100课

明知白　蒋　庚　刘汉文　魏有德

编　者

卞清胜　史树德　刘汉文　陈家骏　张软生
明知白　项中心　项昭义　蒋　庚　魏有德

四川大学出版社
成都　1993·8

(川)新登字 014 号

责任编辑：谭同余
封面设计：冯先洁
版式设计：谭同余

高中数学单元复习 100 课
明知白　蒋　庚　刘汉文　魏有德　主编

四川大学出版社出版发行
四川省新华书店经销　成都犀浦印刷厂印刷
787×1092mm　32 开本　12.5 印张　270 千字
1993 年 8 月第一版　　1993 年 8 月第一次印刷
印数：1——15000 册

ISBN7—5614—0939—7/O·87　定价：5.50 元

前 言

去年12月四川省数学会举办了一期《高中数学教学研讨会》，与会同仁对被邀来川的几位教育专家的报告十分感兴趣，要求能根据会议精神编写出一套全面系统地、针对性强而实用性好的复习教学用书。因此，我们（会议主持者和主讲人）几经研究讨论，决定出这一套书：《高中数学单元复习100课》及配套的《高中数学单元复习练习册》、《高中数学综合复习十讲》。

由于高中数学复习有独特的教学形式和评估考核方式，为众人瞩目。要使这套书能脱颖而出，为广大读者接受，必须具有自己的风格和特色。因此，我们的这套书始终贯彻：**紧扣大纲，系统完整；突出重点，体现特点；讲练结合，使用方便。**

国家教委颁布的："教学大纲"和国家考试中心颁布的（高考）"数学科说明"是我们编写的两个基本大纲。在保持高中数学知识结构的系统性、完整性的基础上，编写时，在知识内容上，突出重点，体现"总复习"的特点；在结构上，体现讲练结合的精神，既达到启迪学生的思维能力的目的，又使教师便于组织教学，收到事半功倍的效果。

本套书各章节的具体执笔者均为北京、河南郑州、湖北黄冈长期从事高中数学的特级教师，他们在知识和经验两方面的水平是不容置疑的。他们的严谨治学精神在这套书中也得到充分的体现。这套书能在这样短时间内与读者见面，十分感谢他们的全面合作与支持！

由于时间短促，疏漏之处，敬请读者赐教。恳请使用这套教材的老师提出宝贵的修改意见和建议。

感谢四川大学出版社的领导和编辑们的大力支持。

魏有德
于四川大学数学系
一九九三年六月

目　录

第一章　预备知识

高中数学总复习的教与学有其特殊性：如充要条件的知识点源于《平面解析几何》，但在各学科中都有广泛的应用；分类讨论的思想从函数定义域与值域的确定到排列与组合应用题，贯穿在整个高中代数之中，……。本着典型的数学思想方法和工具性的基础知识相对集中与提前的原则，设计了“预备知识”作为第一章。

§1—1　集合(一)

[复习要点]

一、集合的概念与表示

1. 集合的概念：

(1) 集合中元素的确定性、互异性、无序性。

(2) 有限集，无限集，空集。

2. 集合的表示：(1) 列举法，描述法，图示法。

(2) 常用数集的记号。

二、集合的包含与相等关系

1. 集合的包含关系：(1) 子集。 (2) 真子集。 (3) 子集和真子集的性质。

2. 集合的相等关系。

[基础知识回顾]

1. 集合是________________________________,
________________________叫做空集,记作________。

2. 方程组$\begin{cases}3x-y=1\\x^2+y^2=5\end{cases}$的解集为________________。

3. 不等式$x^2-5x+6\leqslant 0$的解集为________________。

4. $\varnothing$ 与$\{0\}$的关系是________________,0 与$\{0\}$的关系是________________,0 与 $\varnothing$ 的关系是________________。

5. 方程$x^3-2x^2-3x=0$的解集是________________,它的所有子集是________________________________,所有非空真子集是________________________________。

6. 常用的数集的记号分别是________________________。

[例题选析]

例 1[①] 数集$X=\{(2n+1)\pi,n$是整数$\}$与数集$Y=\{(4k\pm 1)\pi,k$是整数$\}$之间的关系是(　　)。

(A) $X\subset Y$　(B) $X\supset Y$　(C) $X=Y$　(D) $X\neq Y$

(1984 年全国高考试题)

分析　$\because X$是奇数集,改用列举法表示数集Y后发现:Y也是奇数集,　$\therefore X=Y$,应选 C。

例 2　设集合P满足$\{0,1\}\subseteq P\subset\{0,1,2,3,4\}$,试写出所有的集合$P$。

解　$\{0,1\}$,$\{0,1,2\}$,$\{0,1,3\}$,$\{0,1,4\}$,$\{0,1,2,3\}$,$\{0,1,2,4\}$,$\{0,1,3,4\}$。

说明　元素 0,1 必属于P;元素 2,3,4 可属于但不全属于P,也可不属于P。共有$C_3^0+C_3^1+C_3^2=2^3-1=7$个集合

---

① 本书的选择题,都是代号为 A、B、C、D 的四个结论中,有且只有一个是正确的。以后的选择题,不再说明。

符合题意。

不难求得，满足$\{0,1\}\subseteq P\subset\{0,1,2,\cdots,n\}(n\in N)$的集合$P$的个数为$2^{n-1}-1$。

例3 关于实数x的不等式$\left|x-\dfrac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\dfrac{(a-1)^2}{2}$与$x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$（其中$a\in R$）的解集依次记为$A$与$B$。求使$A\subseteq B$的$a$的取值范围。（1990年上海高考试题）

解 由条件，得 $A=\{x\mid 2a\leqslant x\leqslant a^2+1,x\in R\}$。

又得 $(x-2)[x-(3a+1)]\leqslant 0$。

当 $3a+1\geqslant 2$，即$a\geqslant 1/3$时，得

$$B=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3a+1,x\in R\};$$

当$3a+1<2$，即$a<1/3$时，得

$$B=\{x\mid 3a+1\leqslant x\leqslant 2,x\in R\}。$$

故当 $a\geqslant 1/3$时，由$A\subseteq B$得

$$\begin{cases}2\leqslant 2a,\\ a^2+1\leqslant 3a+1。\end{cases}\quad 解得\quad 1\leqslant a\leqslant 3;$$

当$a<1/3$时，由$A\subseteq B$得

$$\begin{cases}3a+1\leqslant 2a,\\ a^2+1\leqslant 2。\end{cases}\quad 解得\quad a=-1。$$

$\therefore$使$A\subseteq B$的a的取值范围是$[1,3]$或$a=-1$。

说明 实数集A、B的包含关系可利用数轴，如图1——1(1)和(2)帮助思考。

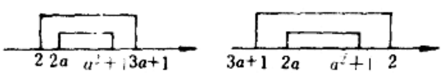

图1—1

例 4　设集合 $A=\{a,a+d,a+2d\}$，集合 $B=\{a,aq,aq^2\}$，且 $A=B$，求 a 与 q 的取值范围。

略解　由题意得(1) 或(2)。

$$(1)\begin{cases}a+d=aq,\\a+2d=aq^2。\end{cases}\quad 即\ \begin{cases}a(1-q)=-d,\\a(1-q^2)=-2d。\end{cases}$$

解得 $q=1$，代入集合 B 知 $q=1$，应舍去。

$$(2)\begin{cases}a+d=aq^2,\\a+2d=aq。\end{cases}$$

解得 $q=-1/2,d=-3a/4\neq 0$。

$\therefore q=-1/2$ 且 $d=-3a/4\neq 0$ 时，集合 $A=B$。

[作业]　做习题 1—1。

§1—2　集合(二)

[复习要点]

一、集合的运算

1. 交集：(1) 交集的定义。(2) 交集的图示。(3) 交集的应用。

2. 并集：(1) 并集的定义。(2) 并集的图示。(3) 并集的应用。

3. 全集：(1) 全集的定义。(2) 全集的范例。

4. 补集：(1) 补集的定义。(2) 补集的图示。(3) 补集的应用。

二、集合的运算律

见[基础知识回顾]第 5 ～ 9 题。

[基础知识回顾]

1. ________________ 叫做 A、B 的交集，记作______，即______________。

2. ________________ 叫做 A、B 的并集，记作______，即______________。

3. ________________ 是一个全集，通常用图形____________表示全集 I。

4. ________________ 叫做集合 A 在集合 I 中的补集，记作______，即______________。

5. $A \cap A =$ ________，$A \cup A =$ ________。

6. $A \cap I =$ ________， $A \cup I =$ ________，
$A \cap \varnothing =$ ________， $A \cup \varnothing =$ ________。

7. $A \cap \overline{A} =$ ____， $A \cup \overline{A} =$ ____， $\overline{\overline{A}} =$ ____。

8. $A \cap B =$ ________， $A \cup B =$ ________。

9. $\overline{A \cap B} =$ ________， $\overline{A \cup B} =$ ________。

[**例题选析**]

例 1　设全集 $I = R$，集合 $M = \{x| \sqrt{x^2} > 2\}$，$N = \{x|\log_x 7 > \log_3 7\}$，那么 $M \cap \overline{N} =$ (　　　　)。

(A)　$\{x|x < -2\}$　　　(B)　$\{x|x < -2$，或 $x \geqslant 3\}$

(C)　$\{x|x \geqslant 3\}$　　　(D)　$\{x| -2 \leqslant x < 3\}$

(1992 年"三南"[①]高考试题)

分析　$\because N = \{x|1 < x < 3\}$，

$\therefore \overline{N} = \{x|x \leqslant 1$，或 $x \geqslant 3\}$；

又 $M = \{x||x| > 2\} = \{x|x < -2$，或 $x > 2\}$，

$\therefore M \cap \overline{N} = \{x|x < -2$，或 $x \geqslant 3\}$，选 B。

---

① "三南"是湖南、云南、海南三省的简称。

例 2 设集合 $M=\{x\mid |x-a|<1\}$，$N=\{x\mid x^2-(a+3)x+3a>0\}$，$a\in R$，且 $M\cup N=R$，求 a 的取值范围。

略解 $M=\{x\mid a-1<x<a+1\}$，

$$N=\{x\mid x<\frac{a+3-|a-3|}{2}, \text{或}\ x>\frac{a+3+|a-3|}{2}\}。$$

由 $M\cup N=R$，得

$$\begin{cases}\dfrac{a+3-|a-3|}{2}>a-1,\\ \dfrac{a+3+|a-3|}{2}<a+1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|a-3|<5-a,\\ |a-3|<a-1。\end{cases}$$

解得 $2<a<4$。

说明 上述解法用配方法解不等式 $x^2-(a+3)x+3a>0$，否则需讨论 $a>3$，$a<3$，$a=3$ 的情形。

例 3 已知集合 A 和集合 B 各含 12 个元素，$A\cap B$ 含有 4 个元素，试求同时满足下面两个条件的集合 C 的个数：(1) $C\subset A\cup B$，且 C 中含有 3 个元素，(2) $C\cap A\neq\varnothing$。(1986 年全国高考试题)

解 ∵ A、B 各含 12 个元素，$A\cap B$ 含 4 个元素，

∴ $A\cup B$ 元素个数是 $12+12-4=20$。

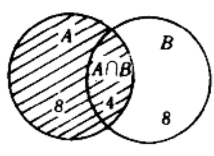

图 1—2

满足条件(1)的集合 C 的个数是 C_{20}^3，但其中还有满足 $A\cap C=\varnothing$ 的集合 C 的个数 C_8^3，则所求集合 C 的个数是 $C_{20}^3-C_8^3=1084$。

说明 上述解法为间接法。用直接法应对 $A\cup B$ 分类

(如图 1—2),从 A 中取一个、两个、三个得 $C_{12}^1 C_8^2 + C_{12}^2 C_8^1 + C_{12}^3 = 1084$。

例 4 设 a、b 是两个实数,$A = \{(x,y) | x = n, \quad y = na + b, n \text{是整数}\}$, $B = \{(x,y) | x = m, y = 3m^2 + 15, m \text{是整数}\}$, $C = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leqslant 144\}$,是平面 XOY 内的点集合。讨论是否存在 a 和 b 使得(1)$A \cap B \neq \varnothing$,(2)$(a,b) \in C$ 同时成立。(1985 年全国高考试题)

略解 如果实数 a 和 b 使得(1)、(2) 同时成立。由(1) 成立,知存在整数 n 使得

$na + b = 3n^2 + 15$,即 $b = 3n^2 + 15 - an$ ①。

由(2) 成立,知存在整数 n 使得 $a^2 + b^2 \leqslant 144$ ②。

将 ① 代入 ② 并整理得

$$(1 + n^2)a^2 - 2n(3n^2 + 15)a + (3n^2 + 15)^2 - 144 \leqslant 0 \quad ③。$$

$$\begin{aligned}\triangle &= 4n^2(3n^2 + 15)^2 - 4(1 + n^2)[(3n^2 + 15)^2 - 144] \\ &= -36(n^2 - 3)^2。\end{aligned}$$

因 n 是整数,$n^2 - 3 \neq 0$,则 $\triangle < 0$。

又 $1 + n^2 > 0$,故不等式 ③ 不可能有实数解 a,即不存在实数 a 和 b,使(1)、(2) 同时成立。

[作业] 做习题 1—2。

§1—3 指数和对数

[复习要点]

一、指数

1. 有理指数幂的意义:(1) 正整数指数幂。(2) 零指数幂。(3) 负整数指数幂。(4) 分数指数幂。

2. 幂的运算法则。

二、对数

1. 对数的意义。

2. 对数的运算法则。

3. 对数的换底公式。

[基础知识回顾]

1. $a^{m/n}=$ ____ $(a\geqslant 0,\quad m、n\in$ ____ , ____)

$a^{-m/n}=$ ____ $(a>0,\ m、n\in$ ____ , ____)。

2. 幂的运算法则分别是 ____________________ ____________(注明底和指数的取值范围)。

3. ____________________叫做以 a 为底 N 的对数，记作____________。

4. 对数的运算法则分别是____________________ ____________

5. $\log_a b\cdot\log_b a=$ ____ ， $\log_{a^n}a^n=$ ____ 。

$\lg(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})=$ ____ 。

[例题选析]

例 1 计算：

(1) $(3\frac{3}{8})^{-2/3}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^0+(0.0081)^{-1/4}-(-\frac{3}{4})^{-2}$；

(2) $\lg^2 5+\lg 2\times\lg 50$。

解 (1) 原式 $=[(\frac{3}{2})^3]^{-2/3}-1+[(0.3)^4]^{-1/4}-\frac{16}{9}$

$$=\frac{4}{9}-1+\frac{10}{3}-\frac{16}{9}=1;$$

(2) 原式 $=\lg^2 5+\lg\frac{10}{5}\times\lg(5\times 10)$

$=\lg^2 5+(1-\lg 5)(1+\lg 5)$

$=\lg^2 5+1-\lg^2 5=1$。

说明 因为 $\lg 2+\lg 5=\lg(2\times 5)=1$，所以在常用对数计算中常用到 $\lg 2=1-\lg 5$ 或 $\lg 5=1-\lg 2$ 等，(2) 题解法相应也有多种。

例 2 化简：

(1) $[(e^x+e^{-x})^2-4]^{1/2}+[(e^x-e^{-x})^2+4]^{1/2}$；

(2) $[a+2b(a-b^2)^{1/2}]^{1/2}-[a-2b(a-b^2)^{1/2}]^{1/2}$

$(b<0, b^2\leqslant a\leqslant 2b^2)$。

解 (1) 原式 $=(e^{2x}+e^{-2x}-2)^{1/2}+(e^{2x}+e^{-2x}+2)^{1/2}$

$=[(e^x-e^{-x})^2]^{1/2}+[(e^x+e^{-x})^2]^{1/2}$

$=|e^x-e^{-x}|+(e^x+e^{-x})$

$=\begin{cases}2e^x & (x\geqslant 0),\\ -2e^x & (x<0)。\end{cases}$

(2) $\because b^2\leqslant a, a-b^2\geqslant 0, \therefore a\pm 2b(a-b^2)^{1/2}$

$=(a-b^2)\pm 2b(a-b^2)^{1/2}+b^2=[(a-b^2)^{1/2}\pm b]^2$。

原式 $=\{[(a-b^2)^{1/2}+b]^2\}^{1/2}-\{[a-b^2)^{1/2}-b]^2\}^{1/2}$

$=|(a-b^2)^{1/2}+b|-|(a-b^2)^{1/2}-b|$。

$\because a\leqslant 2b^2, a-b^2\leqslant b^2, (a-b^2)^{1/2}\leqslant -b$,

$\therefore$ 原式 $=-[(a-b^2)^{1/2}+b]-(a-b^2)^{1/2}+b$

$=-2\sqrt{a-b^2}$。

说明 分数指数幂的化简，往往把被开方式配方后再讨论求值。

例 3 已知 $\log_{18}9=a(a\neq 2)$，$18^b=5$，求 $\log_{36}45$ (1978 年全国高考试题).