研究生教学用书

教育部学位管理与研究生教育司推荐

# 经典逻辑与非经典逻辑基础

# The Basis of Classical Logic and Non-classical Logic

杜国平 编著

高等教育出版社

研究生教学用书

教育部学位管理与研究生教育司推荐

# 经典逻辑与非经典逻辑基础

# The Basis of Classical Logic and Non-classical Logic

杜国平　编著

高等教育出版社

## 内容提要

逻辑是人类智能的核心。本书作者结合自己的研究成果比较系统地介绍了现代逻辑学的基本内容。主要包括三个部分。第一部分介绍集合论的基本内容。第二部分介绍经典逻辑的基本内容,主要包括命题逻辑和谓词逻辑。第三部分介绍非经典逻辑的基本内容。主要包括模态逻辑、时态逻辑、弗协调逻辑和直觉主义逻辑。对现代逻辑的不同系统均采用严格的形式化、公理化方法进行叙述,并详细分析各系统的可靠性、完全性等系统的元性质。本书的内容是自足的,不需要读者其他特别的知识准备。本书既适合逻辑学专业的本科生、研究生使用,也可供计算机科学、人工智能、语言学、哲学等专业的学生使用,还可供对现代逻辑感兴趣的读者自学使用。

**图书在版编目(CIP)数据**

经典逻辑与非经典逻辑基础/杜国平编著.—北京:
高等教育出版社,2006.7
ISBN 7-04-018952-6

Ⅰ.经... Ⅱ.杜... Ⅲ.逻辑-研究生-教材
Ⅳ.B81

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 054388 号

**策划编辑** 李海风 **责任编辑** 张耀明 **封面设计** 李卫青
**责任绘图** 黄建英 **版式设计** 史新薇 **责任校对** 王效珍
**责任印制** 宋克学

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 购书热线 | 010-58581118 |
| 社　　址 | 北京市西城区德外大街4号 | 免费咨询 | 800-810-0598 |
| 邮政编码 | 100011 | 网　　址 | http://www.hep.edu.cn |
| 总　　机 | 010-58581000 | | http://www.hep.com.cn |
| | | 网上订购 | http://www.landraco.com |
| 经　　销 | 蓝色畅想图书发行有限公司 | | http://www.landraco.com.cn |
| 印　　刷 | 北京人卫印刷厂 | 畅想教育 | http://www.widedu.com |
| 开　　本 | 787×960　1/16 | 版　　次 | 2006年7月第1版 |
| 印　　张 | 17.25 | 印　　次 | 2006年7月第1次印刷 |
| 字　　数 | 290 000 | 定　　价 | 29.50元 |

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。



**物料号　18952-00**

# 前　言

诞生于19世纪末、20世纪初的现代逻辑(又称数理逻辑)以其独特的形式化、公理化方法获得了极其迅猛的发展。并且在数学、计算机科学、人工智能、哲学、语言学等领域得到了广泛的应用。今天,现代逻辑学已经成为一门内容丰富、应用广泛的基础性学科。

现代逻辑大体上可以分为经典逻辑和非经典逻辑两种类型。经典逻辑又称“标准逻辑”,主要是指由弗雷格、罗素等人建立起来的数理逻辑。包括命题逻辑和谓词逻辑等。经典逻辑的特点是:[1] 命题连接词都是真值函数;[2] 建立于实质蕴涵之上;[3] 命题只有真、假二值;[4]假定个体域非空。非经典逻辑亦称“非标准逻辑”,包括各种具有与经典逻辑不同特点的现代逻辑。非经典逻辑大致又可以分为两类。一类是经典逻辑的扩充,例如模态逻辑、时态逻辑等;一类是经典逻辑的修正,包括直觉主义逻辑、弗协调逻辑、多值逻辑等。本书主要介绍经典逻辑和非经典逻辑中最为基础的部分。

本书包括四个部分,其中第一部分是预备知识,介绍素朴集合论的基本知识,目的是为后面的章节提供基本的概念准备。第二部分介绍经典逻辑的基本内容,包括命题逻辑和谓词逻辑。第三部分介绍现代公理集合论的基本知识,这一方面是第二部分内容的应用,同时也是为第三部分做准备。公理集合论本身也是现代逻辑的高级专题之一,理解其中的基本理论可以达到对现代逻辑更加深刻的理解。第四部分介绍非经典逻辑,主要包括模态逻辑、时态逻辑、弗协调逻辑和直觉主义逻辑。

现代逻辑研究问题的一般方法和思路是:[1] 确定研究的范围和层次。例如命题逻辑就是研究以命题为基本单位的推理结构和规律的理论;[2] 创制足以刻画研究对象的形式语言;[3] 建立语义,给出有效性概念;[4] 建立形式推理的公理系统;[5] 研究系统的可靠性和完全性等性质。本书在每一章内容的安排上基本上是按照这一思路展开的。读者可以通过本书的学习达到对现代逻辑研究方法的总体把握。

现代逻辑的一个重要特点是语形、语义分得很清楚,被研究的对象和研究的理论分得很清楚,系统内的定理和系统外的定理分得很清楚。本书力求体现这一特点。语形、语义、语形与语义的关系都单独列出章节分别叙述。

书中定理的证明,有时为了清晰,可能给出的不是最简单的证明;有时为了简洁,可能给出的不是最清晰的证明;当然有时给出的可能是既不清晰又不简洁的证明。作为一名读者,我常常为能给出不同于书中的更简洁、更清晰的证明而激动不已。相信本书中会有很多这样的激动留给我们的读者。如果读者能够让我及时地分享您的激动,那我一定会更加激动不已的。

现代逻辑是一门技术性较强的理论,它的很多思想都是通过技术手段加以体现的,为此,我们在书中安排了大量的练习,读者应尽可能地完成书中的习题。

本书不需要读者有专门的知识准备,本书的内容是自足的。在内容的安排上尽可能做到循序渐进、严格规范而便于理解,适合读者自学。

本书是为南京大学逻辑学研究生编写的现代逻辑基础课教材,也可供相关专业的本科生及喜爱逻辑的广大读者使用。一学年的研究生、本科生课程建议以第一章至第四章为第一学期的授课内容,以第五章至第八章为第二学期的授课内容。只有一个学期的本科生课程建议以第二章和第三章作为主要的授课内容,第五章至第八章作为概述,其他各章作为学生自学的内容。

在编写本书的过程中,参考了大量学界名家的著作,在书后已一一列出,谨向他们表示由衷的敬意。

因限于自己的水平,书中的错误和缺点肯定是不会少的,恳请读者批评指正。

杜国平

2004 年 9 月

# 目　录

# 第一章　预备知识

## 1.1　集

集（或集合），朴素地说，就是指由一些对象构成的总体. 构成总体的对象称为该集合的元或元素. 集合可以用若干种方式来描述. 通常的一种方式是在一个大括号内列出它的元素.

例如由元素 4,5,6 构成的集合，可以表示为

$$\{4,5,6\}.$$

无穷集合包含无穷多个元素. 不可能列出无穷集合的所有元素，通常只列出开头的几个或象征性地列出几个外加“…”来表示.

例如，由所有自然数构成的集合 **N** 可以表示为

$$\{0,1,2,3,4,\cdots\}.$$

由所有整数构成的集合 **Z** 可以表示为

$$\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}.$$

我们也可以用

$$\{x \mid P(x)\}$$

或

$$\{x : P(x)\}$$

来表示由满足性质 $P$ 的所有元素而构成的集合.

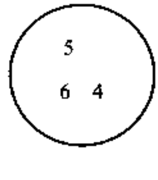
例如，由所有偶数构成的集合，可以表示为

$$\{x : x \text{ 是偶数}\}.$$

再如，由所有满足 $y^2+y-10=0$ 的 $y$ 构成的集合，可以表示为

$$\{y \mid y^2+y-10=0\}.$$

我们还可以用一种直观的图示方法来表示集合. 常用的方法是用一个封闭的圆圈来表示集合，集合的元素用圆圈中的点来表示，也可以直接将元素写在圆圈中. 例如集合 $\{4,5,6\}$ 我们可以用图表示为



不包含任何元素的集合称为空集，记为$\varnothing$.

集合与描述它时元素的排列顺序无关，也不考虑元素的重复. 例如，$\{4,5,6\}$、$\{5,4,6\}$和$\{4,5,5,6\}$都表示同一个集合.

集合 $A$ 和 $B$ 相等，当且仅当集合 $A$ 和 $B$ 具有完全相同的元素. 记作 $A=B$.

例如：

$$\{2,3\}=\{z \mid z^2-5z+6=0\}.$$

"$x$ 是集合 $A$ 的元素"通常表示为

$$x \in A.$$

"$x$ 不是集合 $A$ 的元素"通常表示为

$$x \notin A.$$

例如：$4 \in \{4,5,6\}$，$8 \notin \{4,5,6\}$.

根据上述规定，显然有：$y$ 具有性质 $P$ 当且仅当 $y \in \{x \mid P(x)\}$.

对于任意两个集合 $A$ 和 $B$，如果 $A$ 的每一个元素也都是集合 $B$ 的元素，则称集合 $A$ 是集合 $B$ 的子集，记作 $A \subseteq B$. 如果 $A$ 是集合 $B$ 的子集并且 $A$ 不等于 $B$，则称集合 $A$ 是集合 $B$ 的真子集，记作 $A \subsetneq B$.

显然，对于任何集合 $A$，$A \subseteq A$；对于任何非空集合 $A$，规定$\varnothing \subsetneq A$.

## 1.2 集 运 算

给定一个集合 $A$，由所有不在 $A$ 中的元素构成的集合称为集合 $A$ 的补集，记作 $\bar{A}$. 即

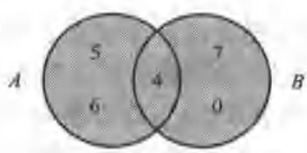
$$x \in \bar{A} \text{ 当且仅当 } x \notin A.$$

给定任意两个集合 $A$ 和 $B$，由 $A$ 和 $B$ 中所有元素构成的集合称为 $A$ 和 $B$ 的并集，记作 $A \cup B$. 即 $A \cup B=\{x \mid x \in A \text{ 或者 } x \in B\}$.

例如：

$$\{4,5,6\} \cup \{4,7,0\}=\{0,4,5,6,7\}.$$

集合的并运算可以图示为（阴影部分为运算的结果）



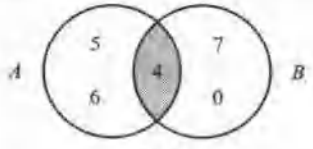

$A \cup B$

给定任意两个集合 $A$ 和 $B$，由 $A$ 和 $B$ 中所有相同元素构成的集合称为 $A$ 和 $B$ 的交集，记作 $A\cap B$. 即 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 并且 $x\in B\}$.

例如：

$$\{4,5,6\}\cap\{4,7,0\}=\{4\}.$$

集合的交运算可以图示为(阴影部分为运算的结果)



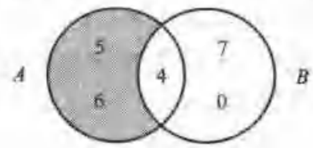

$A\cap B$

给定任意两个集合 $A$ 和 $B$，由所有属于 $A$ 但不属于 $B$ 的元素构成的集合称为 $A$ 和 $B$ 的差集，记作 $A-B$. 即 $A-B=\{x\mid x\in A$ 但是 $x\notin B\}$.

例如：

$$\{4,5,6\}-\{4,7,0\}=\{5,6\}.$$

集合的差运算可以图示为(阴影部分为运算的结果)




$A-B$

称集合 $A$ 和 $B$ 不相交，当且仅当 $A\cap B=\varnothing$.

给定任一集合 $A$，由所有 $A$ 的子集作为元素而构成的集合称为集合 $A$ 的幂集，记作 $P(A)$.

例如：

$$P(\{4\})=\{\varnothing,\{4\}\}.$$

更一般地，设 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 2)$ 是集合，令

$A_1\cup\cdots\cup A_n=\{x\mid$ 存在 $i=1,2,\cdots,n$，使得 $x\in A_i\}$，

$A_1\cap\cdots\cap A_n=\{x\mid$ 对于每一 $i=1,2,\cdots,n$，都有 $x\in A_i\}$，

其中 $A_1\cup\cdots\cup A_n$ 称为集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并，$A_1\cap\cdots\cap A_n$ 称为集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交.

设 $\{S_i\mid i\in I\}$ 是由集构成的集合，其中作为元素的集合 $S_i$ 以 $I$ 中的元素 $i$ 为指标. 令

$$\bigcup_{i\in I} S_i = \{x \mid 有\ i\in I,使得\ x\in S_i\},$$

$$\bigcap_{i\in I} S_i = \{x \mid 对于每一\ i\in I,都有\ x\in S_i\},$$

其中 $\bigcup_{i\in I} S_i$ 称为集合 $\{S_i \mid i\in I\}$ 的并，$\bigcap_{i\in I} S_i$ 称为集合 $\{S_i \mid i\in I\}$ 的交.

由两个对象 $a$ 和 $b$ 组成的有序序列称为 $a$ 和 $b$ 的有序对，记作

$$\langle a,b\rangle.$$

我们可以用箭头来表示 $a$ 和 $b$ 之间的顺序关系，将有序对图示如下

$$a \longrightarrow b$$

对于任意的两个有序对 $\langle a,b\rangle$ 和 $\langle c,d\rangle$，$\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle$ 当且仅当 $a=c$ 并且 $b=d$.

在集合中是不考虑元素的顺序的，而在有序对中是考虑顺序的. 因此，$\{3,2\}=\{2,3\}$，$\langle 2,3\rangle\neq\langle 3,2\rangle$.

由若干个对象 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的有序序列称为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的有序 $n$ 元组，记作

$$\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle.$$

对于任意的两个有序 $n$ 元组 $\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle$ 和 $\langle b_1,b_2,\cdots,b_n\rangle$，$\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle=\langle b_1,b_2,\cdots,b_n\rangle$ 当且仅当对于 $i=1,2,\cdots,n$，都有 $a_i=b_i$.

若干个有序 $n$ 元组也可以作为集合的元素构成一个集合.

由有序 $n$ 元组构成的集合：

$$\{\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle \mid x_1\in A_1,x_2\in A_2,\cdots,x_n\in A_n\}$$

称为集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的笛卡儿积，记作 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$.

当集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都为相同的集合 $A$ 时，$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 也称为集合 $A$ 的 $n$ 次笛卡儿积，记作 $A^n$. 即

$$A^n=\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{n个A}=\{\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle \mid x_1,x_2,\cdots,x_n\in A\}.$$

例如：

$$\{1,2\}\times\{3,4\}=\{\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\},$$

$$\{4,6\}^2=\{\langle 4,4\rangle,\langle 4,6\rangle,\langle 6,4\rangle,\langle 6,6\rangle\}.$$

## 1.3 关系和映射

设 $A,B$ 为两个集合，$A$ 和 $B$ 的笛卡儿积 $A\times B$ 的任意子集 $R$ 称为 $A\times B$ 上的关系. 如果 $R=\varnothing$，则称 $R$ 为 $A\times B$ 上的空关系；如果 $R=A\times B$，则称 $R$ 为 $A\times B$ 上的全关系. 如果 $A=B$，则称 $R$ 为集合 $A$ 上的一个关系.

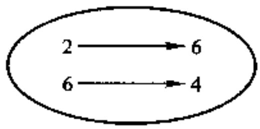
如果 $\langle a,b\rangle\in R$，则称 $a$ 和 $b$ 之间有 $R$ 关系，记作 $aRb$. 即

$$aRb \text{ 当且仅当} \langle a,b\rangle \in R.$$

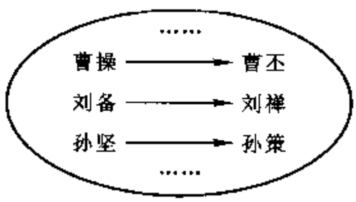
一般地,设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为任意的集合,笛卡儿积 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 的任意子集 $R$ 称为 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 上的一个 $n$ 元关系.特别地,如果 $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$,则 $A \times A \times \cdots \times A$ 上的一个 $n$ 元关系也简称为 $A$ 上的一个 $n$ 元关系.

例如:$\{\langle 2,6\rangle, \langle 6,4\rangle\}$ 就是 $\{1,2,6\} \times \{2,4,6\}$ 上的一个二元关系,也是集合 $\{2,4,6\}$ 上的一个二元关系.

该关系可以图示为




再如,通常的"父子"关系可以图示为




和一般集合的描述方法相同,对于关系,我们既可以用列举出元素的方法来表示它(如上例),也可以用集合中所有元素所决定的特征来描述它.

例如:自然数间的小于关系 $R$ 我们可以表示为

$$\{\langle x,y\rangle \mid x,y \in \mathbf{N}, \text{并且 } x<y\}.$$

相等关系是任何集合 $A$ 上的一个特殊的二元关系,即

$$\{\langle x,y\rangle \mid x,y \in A, \text{并且 } x=y\}.$$

也就是

$$\{\langle x,x\rangle \mid x \in A\}.$$

等价关系也是一种特殊类型的二元关系.如果集合 $A$ 上的二元关系 $R$ 满足下述 3 个条件:

[1] $R$ 是自返的,即对于任何 $x \in A$,都有 $xRx$;

[2] $R$ 是对称的，即对于任何 $x,y\in A$，如果 $xRy$，则 $yRx$；

[3] $R$ 是传递的，即对于任何 $x,y,z\in A$，如果 $xRy$，$yRz$，则 $xRz$.

则称 $R$ 是集合 $A$ 上的一个等价关系.

显然，集合 $A$ 上的相等关系是集合 $A$ 上的一个等价关系.

如果 $f$ 是一个由有序对构成的集合，并且对于任意的 $\langle x,y\rangle,\langle x,z\rangle\in f$，都有 $y=z$，则称 $f$ 是一个映射（也称为函数）. $f$ 的定义域是集合

$$\mathrm{dom}(f)=\{x\mid 存在\ y, 使得\langle x,y\rangle\in f\};$$

$f$ 的值域是集合

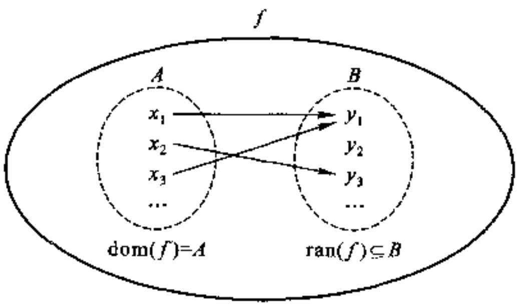
$$\mathrm{ran}(f)=\{y\mid 存在\ x, 使得\langle x,y\rangle\in f\}.$$

若 $f$ 是映射，并且 $x\in\mathrm{dom}(f)$，则有唯一的 $y$，使得 $\langle x,y\rangle\in f$ 成立. 记为 $y=f(x)$，并且称 $f(x)$ 为 $f$ 在 $x$ 处的值. 若 $f$ 是映射，并且 $\mathrm{dom}(f)=A$，$\mathrm{ran}(f)\subseteq B$，则称 $f$ 为由 $A$ 到 $B$ 上的一个映射，记作

$$f:A\to B.$$

若 $A=B$，也称 $f$ 为集合 $A$ 上的一个映射.

一个由 $A$ 到 $B$ 上的映射 $f$，可以图示为




**例 1** 设 $A_1=\{1,2\}$，$A_2=\{4\}$，$D=\{10,20\}$，$f_1=\{\langle\langle 2,4\rangle,10\rangle\}$，则 $f_1$ 不是一个 $A_1\times A_2$ 到 $D$ 的函数. 因为 $\mathrm{dom}(f_1)\neq A_1\times A_2$.

**例 2** 设 $A=\{1,2\}$，$B=\{10,20\}$，$f_2=\{\langle 2,10\rangle,\langle 1,10\rangle,\langle 1,20\rangle\}$，则 $f_2$ 不是一个由 $A$ 到 $B$ 上的映射，因为存在 $\langle 1,10\rangle,\langle 1,20\rangle\in f_2$，但是 $10\neq 20$.

**例 3** 设 $A=\{1,2\}$，$B=\{10,20\}$，$f_3=\{\langle 2,10\rangle,\langle 1,30\rangle\}$，则 $f_3$ 不是一个由 $A$ 到 $B$ 上的映射，因为 $\mathrm{ran}(f)$ 不是 $B$ 的子集.

若 $f$ 是由 $A$ 到 $B$ 上的一个映射，并且对于任意的 $x_1,x_2\in A$，如果 $x_1\neq x_2$，那么都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 $f$ 是由 $A$ 到 $B$ 上的一个单射；

若 $f$ 是由 $A$ 到 $B$ 上的一个映射，并且 $\mathrm{ran}(f)=B$，则称 $f$ 是由 $A$ 到 $B$ 上的一个满射；

若 $f$ 既是 $A$ 到 $B$ 上的一个单射，又是 $A$ 到 $B$ 上的一个满射，则称 $f$ 是由 $A$ 到 $B$ 上的一个一一映射（也称双射）.

集合 $A$ 上的 $n$ 元函数 $f$ 是 $A^n$ 到 $A$ 上的映射.

例如：

$\{\langle x,x+1\rangle \mid x\in \mathbf{N}\}$ 就是自然数集 $\mathbf{N}$ 上的一元函数，$\{\langle\langle x,y\rangle,x+y\rangle \mid x,y\in \mathbf{N}\}$ 就是自然数集 $\mathbf{N}$ 上的二元函数.

设 $R$ 是 $S$ 上的一个 $n$ 元关系，$S_1\subseteq S$. $R$ 到 $S_1$ 上的限制是指 $n$ 元关系 $R\cap S_1^n$. 记作 $R\mid S_1$.

设 $f:S\to B$ 是映射，$S_1\subseteq S$. $f$ 到 $S_1$ 上的限制是由 $S_1$ 到 $B$ 上的一个映射，记作 $f\mid S_1$. 其中对于每一 $x\in S_1$，$(f\mid S_1)(x)=f(x)$.

## 1.4 集合的基数

集合的基数是比较集合大小的一个概念. 集合 $A$ 的基数通常记作 $|A|$.

对于任意两个集合 $A$ 和 $B$，如果存在一个由 $A$ 到 $B$ 的双射，则称集合 $A$ 和 $B$ 等势，记作

$$A\sim B.$$

对于任意两个集合 $A$ 和 $B$，$|A|=|B|$ 当且仅当 $A\sim B$；如果存在集合 $B_1$，$B_1\subseteq B$ 并且 $A\sim B_1$，则 $|A|\leqslant|B|$；如果存在集合 $A_1$，$A_1\subseteq A$ 并且 $A_1\sim B$，则 $|A|\geqslant|B|$；如果 $|A|\leqslant|B|$ 并且 $|A|\neq|B|$，则 $|A|<|B|$.

可以证明：如果 $|A|\leqslant|B|$ 并且 $|A|\geqslant|B|$，则 $|A|=|B|$.

有限集合的基数实质上就是该集合元素的个数. 当集合 $A$ 是有限集时，$|A|$ 是某一正整数 $n$，因为对于有限集 $A$，总存在一个正整数 $n$，使得 $A$ 与 $\{1,2,\cdots,n\}$ 等势.

注意：$|\varnothing|=0$.

称 $A$ 为可数无限的，当且仅当 $|A|=|\mathbf{N}|$. 称 $A$ 为可数的，当且仅当 $|A|\leqslant|\mathbf{N}|$.

自然数集的基数通常记为 $\aleph_0$，实数集的基数通常记为 $C$. 可以证明 $\aleph_0<C$.

关于可数集有下面一些基本定理：

[1] 可数集的子集是可数的；

[2] 有限个可数集的并是可数的；

[3] 可数个可数集的并是可数的；

[4] 有限个可数集的笛卡儿积是可数的；

[5] 由一个可数无穷集的所有有限子集构成的集是可数无穷的.

# 第二章 命题逻辑

## 2.1 基于命题联系的推理

命题逻辑是研究命题连接词的逻辑性质和推理规律的理论,是现代逻辑最为基础的部分.

一个有效的推理形式,其有效性可能依据于命题与命题之间的联系,也可能依据于词项与词项之间的联系,还可能依据于某一特殊词项的逻辑性质.我们来看下述推理:

**例 1**

如果一个数 $a$ 是 6 的倍数,那么它能被 2 整除,

所以,如果 $a$ 不能被 2 整除,那么它不是 6 的倍数.

**例 2**

如果所有都梁香的叶子都是蓝色的,

那么就不存在都梁香的叶子不是蓝色的.

**例 3**

如果天永远是蓝的,水永远是绿的,

那么永远天是蓝的,水是绿的.

这三个推理在形式上都是有效的(直观地说就是由真的前提不会推出假的结论,或者说如果前提是真的,那么结论也是真的).但是它们赖以有效的基础是不同的.例 1 的有效性依赖于"(因为)如果 $p$,那么 $q$.所以如果不是 $q$,那么不是 $p$",简单地说,它依赖于"如果,那么"、"不"、"因为,所以"等这些连接词的联系.例 2 的有效性则不仅依赖于"如果,那么"、"不"等连接词的联系,还依赖于词项"所有"、"存在"之间的联系.例 3 的有效性则不仅依赖于"如果,那么"等连接词的联系,还取决于特殊词项"永远"的性质.

例 1 和例 2、例 3 的一个重要区别是,它的推理有效性仅仅依赖于句子与句子之间的联系,而不涉及句子内部词项与词项之间的联系.这样,我们在研究其形式有效性的时候,就不需要对句子内部的结构进行分析,而只需要分析句子与句子之间的结构就可以了.

因为在推理中出现的句子一般而言是或真或假的,而或真或假的句

子一般又被称为命题，所以我们将例 1 这样的推理称为基于命题的推理.

那么，基于命题的推理在结构上包含哪些元素呢？

首先，它包含基本命题. 在例 1 中就包括“$a$ 是 6 的倍数”、“$a$ 能被 2 整除”这样的基本命题.

其次，它包含表示命题与命题之间联系的命题连接词. 在例 1 中，就包括“如果，那么”、“不”等.

再次，它包含句子与句子之间联系的层次.

在现代逻辑中，研究推理是采用符号化的方法进行研究的，因此在命题逻辑的形式语言中，表示基本命题、命题连接词的符号和区分层次的技术性符号是不可缺少的.

如果我们用 $p$ 表示基本命题“$a$ 是 6 的倍数”，用 $q$ 表示基本命题“$a$ 能被 2 整除”，用 $p\to q$ 表示“如果 $p$，那么 $q$”，用$\neg p$ 表示“不是 $p$”，用 $p\vdash q$ 表示“因为 $p$，所以 $q$”. 那么例 1 的推理形式就可以表示为

$$p\to q\vdash\neg q\to\neg p.$$

所以，也可以简单地说，命题逻辑是研究基于命题的推理规律的理论.

## 2.2 命题语言

**定义 2.2.1** 命题逻辑的形式语言 $L^P$ 由下列三类符号构成：

[1] $p_0,p_1,\cdots,p_n,\cdots$ ;

[2] $\neg,\to$;

[3] ), (.

形式语言 $L^P$ 中的第一类符号称为命题符，它由可数无限多个符号构成，其中每个符号均由小写字母 $p$ 及其下标构成(为了方便，有时 $p_0$，$p_1$，…也写成 $p,q,r,s,\cdots$)；第二类符号称为联结符，它们的读法如下表：

| 联结符 | 读法 | 名字 |
|---|---|---|
| $\neg$ | 非 | 否定 |
| $\to$ | 如果，则 | 蕴涵 |

其中$\neg$是一元联结符，$\to$是二元联结符；第三类符号是两个标点符号，分