

奥林匹克教学辅导丛书

# 初中数学奥林匹克 电视讲座

张硕才 陈传理 主编



HONGSHUXUEAOLINPIKEDIANSHIJIANGZUO

G633.6 / 406 / 253

奥林匹克教学辅导丛书

# 初中数学奥林匹克电视讲座

张硕才 陈传理 主编

华中师范大学出版社

奥林匹克教学辅导丛书  
**初中数学奥林匹克电视讲座**  
张硕才 陈传理 主编

华中师范大学出版社出版发行  
(武昌桂子山)

新华书店湖北发行所经销  
天门印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 10.375 字数 235千字  
1990年11月第1版 1991年1月第2次印刷  
ISBN 7 5622-0586-8/G·191  
印数: 18001--50000 定价: 3.95元

## 出版说明

国际数学、物理、化学、计算机奥林匹克是世界上规模和影响最大的中学生学科竞赛活动。这项活动为各国表现本民族的聪明才智提供了合适的舞台，因而，受到越来越多的国家的重视。几年来，我国中学生在这项活动中获得了优异成绩，震惊中外。为了使中小學生开阔视野、启迪思维、发展才能，进一步推动中小学奥林匹克竞赛活动的普及开展，为了促进中小学教育的深化，为我国科学技术的腾飞做好准备，我社特约请一批热心奥林匹克事业的专家教授和中小学教师编写了这套《奥林匹克教学辅导丛书》。

这套丛书包括有数学、物理、化学、计算机、外语等五门学科。其中，中小学数学奥林匹克教学辅导书5册已经正式出版，物理、化学、计算机和外语等中小学奥林匹克教学辅导书也将陆续出版。本丛书的作者都是首批《中国奥林匹克高级教练员》和湖北省奥林匹克优秀教练员，他们为我国奥林匹克事业和湖北省的竞赛活动作出了富有成效的工作，这套丛书也是他们长期辅导学生经验的总结。每册均编有各层次的奥林匹克讲座和训练，内容翔实，是一套较好的奥林匹克教学辅导书，我们希望这套丛书能成为青少年学习的良师益友。

出版这样的丛书我们还是初步尝试，为了进一步充实完善，衷心希望广大读者提出建议和意见。

## 前 言

自1986年我国正式步入国际数学竞赛(IMO)殿堂以来,连续五届的30名选手参赛共获取30块奖牌,其中湖北省有6名优秀选手为我国争得六块奖牌(二金、三银、一铜),特别1990年参加第31届IMO的湖北三名选手获奖二金一银创造了国际数学奥林匹克先史,震惊中外。优异成绩的奥秘在哪里?很重要的原因是楚天有才,湖北更有一大批热心数学教育、热爱数学奥林匹克事业的教授和中学教师,他们长期辛勤耕耘,组织数学竞赛活动,更注意研究从初中开始培训数学奥林匹克选手的规律和方法。为推动全国数学竞赛活动的开展,中国教育电视台邀请了湖北省部分做出了突出贡献的专家教练员参加录制了《初中数学专题讲座》电视讲座十五讲。这套节目播放后效果良好,因此被选定为每年固定电视教育节目。

本书是在中国教育电视台卫星转播系列电视教学片《初中数学专题讲座》的基础上进一步修改而成的。

为配合广大青少年今后收视学习时取得更佳效果,同时为了推动中学数学奥林匹克竞赛活动的普及开展,本书编写时注意了以下几个方面:增加了《方格填数和涂色问题》、《解含有数论函数 $[x]$ 的方程、解含有绝对直记号的方程》两个专题,并且每个专题中都增补了适度的练习题并附有答案或提示。

全书基本上概括了初中数学的重要基础知识和解题方法，对初中数学竞赛范围的知识作了系统的归纳，并特别着重于数学思维能力的培养和解题技巧的训练。每个专题所选用的例题和习题大都是国内外数学竞赛试题，在讲解中强调了解题思路的分析和揭示解题规律，意在既能使读者了解初中数学竞赛的基本要求，又能达到启迪思维、开阔视野，从而提高分析问题和解决问题的能力，为参加数学奥林匹克竞赛活动打下良好的基础。

参加本书编著的作者都是电视讲座的主讲教师 and 教学顾问，他们是长期从事中学数学研究的大学教授和有丰富经验的中学数学高级教师。其中齐民友教授、陈森林教授都是全国知名数学家，他们长期关心中学数学教育并亲自为教学实践做示范。其他主讲教师也都是首批《中国数学奥林匹克高级教练员》和湖北省数学奥林匹克优秀教练员，他们为中国数学奥林匹克事业和湖北省的数学竞赛活动做了富有成效的工作，这本书也是他们长期辅导学生经验的总结。

本书由张硕才、陈传理同志主编。湖北省各地、州、市数学学会和教研室的同志及有关大、中学校给予了热情的支持；湖北省电化教育馆的领导和工作人 员，特别是负责录象片的编辑胡师邦同志和本书的责任编辑肖佩玉同志做了大量工作，在此一并向他们表示谢意。

湖北省数学学会

1990年8月

## 目 录

|      |                                       |         |
|------|---------------------------------------|---------|
| 第一讲  | 和初中同学谈谈学习数学·····                      | ( 1 )   |
| 第二讲  | 解数学题的一些思考方法·····                      | ( 12 )  |
| 第三讲  | 整数问题·····                             | ( 54 )  |
| 第四讲  | 代数式的恒等变形·····                         | ( 69 )  |
| 第五讲  | 指数与对数·····                            | ( 83 )  |
| 第六讲  | 方程·····                               | ( 101 ) |
| 第七讲  | 一元二次方程根的判别式与韦达定理·····                 | ( 113 ) |
| 第八讲  | 二次函数与抛物线·····                         | ( 129 ) |
| 第九讲  | 直线形中的基本图·····                         | ( 154 ) |
| 第十讲  | 圆·····                                | ( 176 ) |
| 第十一讲 | 面积问题·····                             | ( 195 ) |
| 第十二讲 | 正弦定理 余弦定理·····                        | ( 216 ) |
| 第十三讲 | 反证法·····                              | ( 232 ) |
| 第十四讲 | 抽屉原则·····                             | ( 243 ) |
| 第十五讲 | 探索·构造·反思·····                         | ( 264 ) |
| 第十六讲 | 方格填数和涂色问题·····                        | ( 287 ) |
| 第十七讲 | 解含有数论函数 $[x]$ 的方程<br>解含有绝对值记号的方程····· | ( 303 ) |

## 第一讲 和初中同学谈谈学习数学

齐民友

齐民友系武汉大学校长、数学教授、博士研究生导师，湖北省数学学会常务理事，曾担任中国数学学会常务理事，第31届国际数学奥林匹克主试委员会主席，是国内外知名数学家；出版专著多本、发表学术论文多篇，其中《关于FUCHS型和奇型偏微分方程的研究》获1987年国家自然科学四等奖，当选为湖北省科协副主席。

同学们从小学到初中学习了不少数学知识，现在又增加了代数、几何，不断有所进步。现在，同学们一定会问：我们为什么要学习数学？怎样才能克服困难改进自己的学习方法？今天，我给大家讲一讲这些方面的问题。

### 一、数学是一门非常重要的科学

为什么数学是一门非常重要的科学呢？同学们毕业后有的参加工作，有的继续学习，不论你到哪里，你一定会发现，生活处处离不开数学，人类社会处处离不开数学，我举出一个大家都很熟悉的例子说明这个问题。

例1 如果A、B两点间有一个池塘，怎样才能量出A、B两点间的距离？

**解** 如图1-1所示,  $M$  为一个池塘。为了间接求出  $A$ 、 $B$  两点间的距离, 我们先找出一点  $O$ , 使得  $OA$ 、 $OB$  能直接量出来。在  $OA$ 、 $OB$  上分别找两点  $A'$ 、 $B'$ 。

作  $\triangle OA'B'$ , 使得:

$$OA' : OA = OB' : OB$$

$$\therefore \triangle OAB \sim \triangle OA'B'$$

$$\therefore A'B' : AB = OA' : OA$$

(相似三角形的对应边成比例)

$$\text{则 } AB = \frac{OA \cdot A'B'}{OA'}$$

由于  $OA'$ 、 $OA$ 、 $A'B'$  都能直接量出, 所以  $AB$  也就求出来了。

这个简单的例子说明, 人类社会离不开数学。

将来有的同学会当一名工人或商业工作者、科学工作者等等, 从使用最简单的计算工具到电子计算机, 都离不开最起码的数学。所以, 我们又可以说, 现代社会更加离不开数学。

我想讲的第二层意思是, 数学是一切学科——无论是社会科学还是自然科学——的重要基础。在中学物理中有一个著名的牛顿第二定律:

$F = ma$ , 式中  $F$  为力,  $m$  为质量,  $a$  为加速度。这个定律适用面相当广, 公式的表达式很简单, 使用起来变化万千, 如果没有丰富的数学知识, 就不能学好用好这个定律。

在电学中有一个著名的欧姆定律:

$U = IR$ , 式中  $U$  为电压,  $I$  为电流,  $R$  为电阻。这个公式也很简单, 但使用也是很广泛的, 如果没有相当丰富的数学

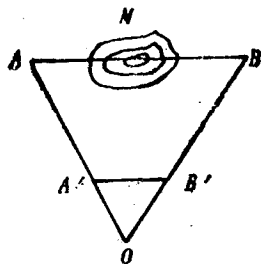


图 1-1

知识，你也不可能会用这个公式。

现代医学中有一个很有用的仪器CT（断层扫描器），就用了很深的数学知识。

由此看来，数学的确是一门非常重要的科学，它对于青少年的成长是一门必不可少的课程，它具有下面一些功能。

### （一）数学可以训练有条理的思维

数学能使人的头脑清晰，它有下面三点意思：

- 1.概念清晰。学习数学与做任何事情一样，要有清晰的概念，才能做得好；
- 2.学习数学要有寻根究底的精神；
- 3.说话要有根据。学数学的每一句话都要有根据，决不允许猜测或随随便便。

### （二）通过学习数学，可以养成一种良好的工作习惯。

它有下面三层意思：

- 1.循序渐进。做任何工作，都要一件一件去完成，一步一步地去做，不允许马马虎虎。
- 2.办事要规范，要按规矩去做事。
- 3.一丝不苟。学习数学，最忌差不多、就是这样、大概如此，它讲求的是一丝不苟。

这样，通过学习数学，就能培养我们良好的工作习惯。

### （三）表述要清楚

在学习数学时，说每一句话，写每一段文字，记每一个公式，推理每一步算式，甚至标点符号和逻辑思维都要清楚。这对于青少年的成长也是非常重要的。

### （四）学习数学可以培养追求真理的精神

这是最重要的一点，这也有几层意思：

1.可以培养同学们顽强的毅力。很多同学都认为数学不好学，正因为如此，它就能培养顽强的毅力，这是今后任何工作都必不可少的。

2.培养不断进取的精神。任何事情，都不可能一次就做得百分之百地正确，必须不断进取，才能做得更好。

3.不达目的决不休止。数学比较难学，有了这种精神，才可能学好。

综上所述，我们可以说，数学是一门非常重要的科学，因为它重要，所以我们就要努力学习它。

## 二、学习数学难不难？

同学们都关心这个问题，不少同学认为数学重要，但是太难学了，我没有天才，无法学好数学。究竟怎样看待这个问题呢？我要把真实的情况告诉大家。数学并不是一门容易学的科学，实际上，世界上没有任何一门科学是那么容易学的。马克思有一句名言：“科学上是没有平坦大道的，只有在崎岖的山路上不畏险阻的人，才有希望达到光辉的顶点。”我们在学习数学时，应该以此为座右铭，勇敢地去追求真理，不断进取，才能学得好。这样，就不至于在遇到困难时丧失信心或打退堂鼓。

那么，学习数学是不是难到只有少数人才能学呢？也不是。对于初中学生，只要求你们学一些基础知识，为学习其他知识打下基础，训练一种良好的习惯。因此，我们说学习数学并不是太困难的。毛泽东同志有一句名言：“入门并不难，深造也是办得到的”，当你学了基础知识后，也可以深造。“天下无难事，只怕有心人。”同学们，只要下定了决心，就一定能学好数学。

### 三、学习数学要注意的几件事

(一) 循序渐进。前面的知识没有真懂, 就决不要急着去学后面的知识。

(二) 不要急躁, 熟练了自然会快。

不少同学初学数学就求快, 这是很不好的习惯。我认为, 开始慢一点, 熟练了就会快起来。通过下面的一个例子来说明这个问题。

**例 2** 解  $(a+b+c) \cdot (a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$

**解** 先用  $a$  乘后面的多项式:

$$a^3 + ab^2 + ac^2 - abc - ca^2 - a^2b,$$

再用  $b$  乘后面的多项式:

$$a^2b + b^3 + bc^2 - b^2c - abc - ab^2,$$

最后用  $c$  乘后面的多项式:

$$ca^2 + cb^2 + c^3 - bc^2 - c^2a - abc.$$

把这 18 项合并起来, 分步找出同类项:

$$\begin{aligned} & a^3 \boxed{+ ab^2} + \underline{a^2} - abc - ca^2 - a^2b \\ & + a^2b + b^3 + bc^2 - b^2c - abc \boxed{- ab^2} \\ & + ca^2 + cb^2 + c^3 - bc^2 - \underline{c^2}a - abc \\ & = a^3 \quad \quad \quad - abc - \underline{ca^2} - \underline{a^2b} \\ & \quad \quad \quad + a^2b + b^3 + bc^2 - b^2c - abc \\ & \quad \quad \quad + \underline{ca^2} + cb^2 + c^3 - bc^2 \quad \quad - abc \\ & = a^3 \quad \quad \quad - abc \\ & \quad \quad \quad + b^3 + \underline{bc^2} - \underline{b^2c} - abc \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \underline{cb^2} + c^3 - \underline{bc^2} && - abc \\
 = &a^3 && - abc \\
 &+ b^3 && - abc \\
 &&& + c^3 && - abc \\
 = &a^3 + b^3 + c^3 - 3abc
 \end{aligned}$$

从解这个例题中我们看出，开始学数学时总是慢一些，等到熟练了，也就快了，书写也可以简单些。

### (三) 多试几种方法

对于一个复杂的数学题，想要一次就找出一个正确的方法是很难的，往往要多试几种方法，经过比较，找出正确的最佳的解题方法。

**例 3** 因式分解  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 。

**解** 我们总是从已学过的公式入手，思考解题的方法。

#### 1. 试用立方和公式解题。

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

用于原式，有：

$$\begin{aligned}
 a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a^3 + b^3) + c^3 - 3abc \\
 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) + c^3 - 3abc
 \end{aligned}$$

再往下，就无法解了，需要试用另外的方法。

#### 2. 试用和的立方公式解题。

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

用于原式，有：

$$\begin{aligned}
 &a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\
 = &a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2b - 3ab^2 + c^3 - 3abc \\
 = &(a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b + c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= [(a+b)+c] \cdot [(a+b)^2 - (a+b)c + c^2] - 3ab(a+b+c) \\
 &= (a+b+c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2) - 3ab(a+b+c) \\
 &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - ac - bc - 3ab) \\
 &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ac - bc - ab)
 \end{aligned}$$

解此题，我们可以有三点体会：

- (1) 遇到暂时困难，不要停滞，多想几种方法试一下。
- (2) 细心考察每一方面，想好下一步做法。
- (3) 原来没有成功的步骤，可能在另一种解法中部分地用到。

#### (四) 最重要的是熟练和准确

数学不是天才的学问，一个普通的人完全能学好数学，关键是要按科学办法去学习。开始时可以先慢一些，求得熟练，这是快的基础。解数学题一定要准确，如果不准确，就可能出错。下面，我们向大家介绍数学史上的一个著名的错误例子。

**例 4** 证明一切三角形都是等腰三角形。

已知：任意三角形  $ABC$

求证：  $AB = AC$

**证明** 从图1-2中可以明显看出  $AB \cong AC$ 。下面我们试图证明  $AB = AC$ ，请同学们注意分析，看错在哪里。

作  $\angle A$  的平分线  $AG$ ，又作  $BC$  的中垂线  $DE$ 。有两种可能

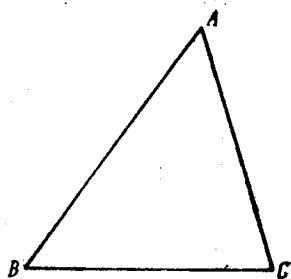


图 1-2

性: (1)  $AG \parallel DE$ , 或者  $AG$  与  $DE$  重合, 此时  $AG \perp BC$ , 可以证明  $AB = AC$  是一定成立的.

(2)  $AG$  与  $DE$  相交于  $G$ . 作  $GH \perp AB$ ,  $GF \perp AC$ , 如图1-3所示.

在  $\triangle AHG$ 、 $\triangle AFG$  中,

$AG = AG$  (公共边),  $\angle HAG$   
 $= \angle FAG$  (角平分线定义)

$\angle AHG = \angle AFG$  (二直角)

$\therefore \triangle AHG \cong \triangle AFG$

(a, a, s)

得  $AH = AF$  (1)

$HG = FG$  (2)

在  $\triangle BDG$ 、 $\triangle CDG$  中,

$BD = CD$  (中垂线定义),

$\angle BDG = \angle CDG$  (二直角)

$GD = GD$  (公共边)

$\therefore \triangle BDG \cong \triangle CDG$  (s, a, s)

得  $BG = CG$  (3)

在  $\triangle BGH$ 、 $\triangle CGF$  中,

$HG = FG$ ,  $BG = CG$

$\angle GHB = \angle GFC$  (二直角)

$\therefore \triangle BGH \cong \triangle CGF$  (s, s, a)

得  $BH = CF$  (4)

合并(1)、(4)两式, 得:

$AB = AH + BH = AF + CF = AC$ , 证毕.

我们对上面每一步式子进行分析, 似乎都没有错, 那

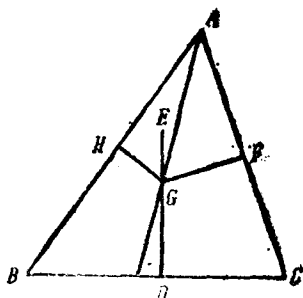


图 1-3

么，为什么会得出如此荒唐的结果呢？错在哪里呢？错在大家没有想到的一个地方：画图不准确。

下面，我们正确画图后再证明，就能得到正确的结论。

从G作 $GH \perp AB$ 交AB于H，作 $GF \perp AC$ ，交AC延长线于F。如图1-4所示。

我们很易证明： $\triangle AHG \cong \triangle AFG$   
 $\triangle BDG \cong \triangle CDG$ ， $\triangle BHG \cong \triangle CFG$ ，  
 则有相应的等量关系：

$$AH = AF \quad (1)$$

$$HG = FG \quad (2)$$

$$BG = CG \quad (3)$$

$$BH = CF \quad (4)$$

$$\text{而 } AB = AH + BH,$$

$$AC = AF - CF$$

$$\text{显然 } AB \neq AC.$$

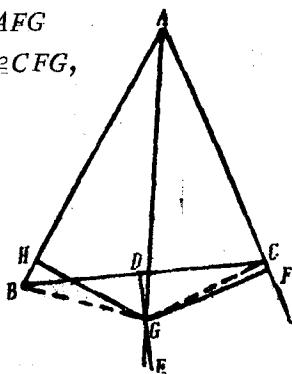


图 1-4

这是历史上的一个非常著名的例子，说明画图不准确，也可能得出十分荒唐的结论。

有些题目，当你没有把概念搞清楚时，也可以出现大错误。下面我们举一个例子。

**例 5** 证明 $1 = 2$ 。

“证明”：取两个数 $a$ 、 $b$ ，使：

$$a = b \neq 0 \quad (1)$$

$$\text{乘以 } a, \text{ 有 } a^2 = ab \quad (2)$$

$$\text{又 } b^2 = b^2 \quad (3)$$

$$(2) - (3), \text{ 有 } a^2 - b^2 = ab - b^2$$

$$\text{因式分解：} (a+b)(a-b) = b(a-b)$$

两边同除以  $(a-b)$  得  $a+b=b$

由(1)得  $2b=b$ , 则  $2=1$ .

证明出这么一个荒唐的结论, 错在哪里呢? 问题出在两边同除以  $(a-b)$  上:

在题解中, 我们曾假设  $a=b$ , 则  $a-b=0$ , 除以  $a-b$  就是用 0 作除数, 这是错的. 我们知道, 在数学中有一个非常重要规定:

数学中不准“以 0 作除数”, “以 0 作分母”, 或者“约去 0”!

如果违反了这条规定, 整个数学就没有了, 现代数学也没有了, 可见它的重要性, 希望同学们随时都要注意这一点.

由此看来, 熟练与准确是多么的重要, 同学们一定要在这方面下苦功夫.

#### (五) 不断进步

数学的发展是无止境的, 学习数学也永无止境, 同学们要自觉培养不断进步, 不达目的决不休止的精神, 这里, 我给大家提几点建议:

1. 每作完一道题或学过一个定理后, 要考虑一下还有没有其他作法?

数学是一门培养人具有举一反三能力的学科, 只有这样, 同学们才可能创造性地学习数学, 培养出许多优良的品质来.

2. 要看看老师和同学们是怎么做的.