AOSAI

奥赛王牌精解

WANGPAIJINGJIE

初三数学

主编：刘叔才

副主编：杨万维　欧丽

团结出版社

前言

“奥林匹克”四个字早已超越了体育的界限，而成为一种精神的象征。因此，国际奥林匹克学科竞赛所倡导和弘扬的人文精神以及它背后隐含的对科学人才的成长乃至对科技发展的推动力已日渐为世人所瞩目。我国自1985年首次参加国际中学生数学奥林匹克竞赛以来，相继参加了物理、化学奥林匹克竞赛，连年取得优异的成绩，曾多次获得团体总分第一。它不仅激发了我国中学生的学习兴趣和竞赛热情，对我国学科人才的培养也起到了积极的推动作用。

为了配合我国奥林匹克学科竞赛活动的开展，为了适应广大中学生对奥林匹克竞赛指导教程的需要，以及为了给从事中学奥赛辅导及研究的教育工作者提供有益的参考资料，我们组织全国各地的部分专家、学者主持编写了《奥赛王牌精解》丛书。本丛书的宗旨是为广大的师生提供切实有用的奥赛辅导书，推动奥林匹克学科竞赛的普及。丛书体系以我国现行的初中、高中数学、物理、化学各学科竞赛大纲为依据。合理的将大纲设计的内容划分为若干章，章下又分若干专题。每专题下设“知识要点”、“范例精解”、“巩固练习”三个板块，不但讲述了竞赛所需的知识，并在思维方法和能力训练方面为学生提供了更多的启示和帮助。

本丛书的作者均是来自各省、市重点中学的特、高级教师，博士、硕士，他们或是中国奥林匹克竞赛的（省级）总教练，或是高级教练、一级教练，长期担任中学奥赛的组织、培训工作，有着丰富实用的竞赛教学经验，所培养出的参赛选手多次获得国际奥赛奖牌，为祖国赢得了荣誉。

本丛书编写过程中使用了众多的参考文献，在此向文献的作者致以衷心的感谢。由于时间仓促，书中难免有疏漏和不妥之处，敬请专家、读者批评指正。

《奥赛王牌精解》编委会

2004年8月

体例说明

《奥赛王牌精解·数学》是一套针对已全面掌握数学知识的参赛学生的复习备考用书。同时对于愿在数学学习方面有所突破和发展的学生有一定的帮助。它根据我国现行的竞赛大纲，将大纲所涉及内容合理地划分为若干章，每章又分专题，专题下设以下栏目：

知识要点

结合国内外各级数学竞赛的最新动向，对竞赛涉及的重点、难点问题及重要的竞赛思想方法进行精讲精析。

范例精解

围绕竞赛的重点和热点，选择经典题、创新题与启发性题进行精解。在解析过程中力求“分析到位，解答简明，评注点睛”，以便读者深入理解问题的实质、变化、缘由和关系，从中获得洞察力、创造机智和竞赛中的灵感。

巩固练习

有针对性地选择和设计一些对竞赛有指导意义的名题、佳题、新题，按选择题、填空题和解答题的顺序编写，对所讲的内容加以巩固，方法加以拓广，使读者达到强化知识、开阔视野、增强能力、提高综合素质的目的。

巩固练习参考答案

为了方便读者使用，书的最后给出了巩固练习中各题的详细解答过程。

通过以上栏目的讲解练习，希望能切实提高参赛学生的参赛水平。

目录 Contents

目录 Contents

第六章 数学竞赛方法与技巧

第一章　一元二次方程

专题1　一元二次方程

知识要点

形如 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的方程称为一元二次方程，使等式成立的实数称为此方程的实数根.

一元二次方程是初中代数的主要内容，在中考和数学竞赛中涉及一元二次方程的题目很多，且具有较强的知识性、综合性、技巧性.就二次方程而言，必须熟练掌握三个重要的知识点：求根公式、判别式和根与系数关系.本讲我们重点研究一元二次方程的解法.

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的求根公式为：$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，若 a、b、c 是有理数，当 b^2-4ac 为某一有理数的平方时，方程有两个有理根；否则有一对共轭的无理根.

一元二次方程的基本解法有：配方法、公式法和因式分解法.对于含绝对值的方程，要先考虑去绝对值；对于含字母系数的一元二次方程要注意二次项系数是否为零.

范例精解

例1 解关于 x 的方程.

(1) $x^2-3|x|+2=0$；

(2) $x^2-|2x-1|-4=0$.

分析 本题两个方程均含绝对值，直接想法是去绝对值，分类讨论.特别地，第一个方程中有 $x^2=|x|^2$，所以可以采用换元思想解此题.

解答 (1) $\because x^2=|x|^2=|x\cdot x|=|x|\cdot|x|=|x|^2$，

$\therefore$ 原方程为 $|x|^2-3|x|+2=0$.

$\therefore (|x|-1)(|x|-2)=0$，

$\therefore |x|-1=0$ 或 $|x|-2=0$.

$\therefore x=\pm 1$ 或 $x=\pm 2$.

$\therefore$ 原方程的解为 $x_1=1, x_2=-1, x_3=2, x_4=-2$.

(2)当 $2x-1>0$, 即 $x>\frac{1}{2}$ 时, 原方程化为

$x^2-2x-3=0$.

$\therefore x_1=3, x_2=-1$(舍去).

当 $2x-1=0$, 即 $x=\frac{1}{2}$ 时, 代入原方程不符合, 应舍去.

当 $2x-1<0$, 即 $x<\frac{1}{2}$ 时, 原方程化为 $x^2+2x-5=0$,

$\therefore x_3=-1-\sqrt{6}, x_4=-1+\sqrt{6}>\frac{1}{2}$(舍去).

$\therefore$ 原方程的所有根为 $x_1=3, x_2=-1-\sqrt{6}$.

评注 对于问题(1)也可以采用按 x 的符号进行分类来求解, 比以上解法稍显繁琐.

例2 解关于 x 的方程.

(1) $x^2-2(a^2+b^2)x+(a^2-b^2)^2=0$;

(2) $(2x^2-3x-2)a^2+(1-x^2)b^2=ab(1+x^2)$;

(3) $2x^3+(1-t)x^2-2tx+(t^2-t)=0$.

分析 (1)从常数项着手, $(a^2-b^2)^2=(a-b)^2(a+b)^2$, $(a-b)^2+(a+b)^2=2(a^2+b^2)$, 从而可采用因式分解法. (2)需整理成关于 x 的标准方程. (3)本身是关于 x 的三次方程, 但字母 t 是二次的, 可尝试把原方程整理成关于 t 的一元二次方程.

解答 (1)法一　原方程分解因式得:

$[x-(a-b)^2][x-(a+b)^2]=0$,

$\therefore x_1=(a-b)^2, x_2=(a+b)^2$.

法二　配方得 $[x-(a^2+b^2)]^2=4a^2b^2$,

$\therefore x-(a^2+b^2)=\pm 2ab$.

$\therefore x_1=(a-b)^2, x_2=(a+b)^2$.

法三　$\Delta=4(a^2+b^2)^2-4(a^2-b^2)^2=16a^2b^2$,

应用求根公式得　$x=a^2+b^2\pm 2ab=(a\pm b)^2$.

(2)将原方程整理得：

$(2a^2-ab-b^2)x^2-3a^2x+(-2a^2-ab+b^2)=0$,

即 $(2a+b)(a-b)x^2-3a^2x-(a+b)(2a-b)=0$.

当 $2a=-b\neq0$ 时，方程化为 $-3a^2x+4a^2=0$，解得 $x=\frac{4}{3}$；

当 $a=b\neq0$ 时，方程化为 $-3a^2x-2a^2=0$，解得 $x=-\frac{2}{3}$；

当 $a=b=0$ 时，原方程的根为任意实数.

当 $2a\neq-b$ 且 $a\neq b$ 时，原方程分解因式为：

$[(2a+b)x+(a+b)][(a-b)x-(2a-b)]=0$.

所以 $x_1=\frac{-a-b}{2a+b}$，$x_2=\frac{2a-b}{a-b}$.

(3)原方程整理为：

$t^2-(x^2+2x+1)t+x^2(2x+1)=0$.

分解因式得：

$(t-x^2)[t-(2x+1)]=0$,

解之得两个关于 t 的方程：

$t=x^2$； ①

$t=2x+1$. ②

把①、②看作是关于 x 的方程，分别解就可以得到原方程的解：

得 $t\geqslant0$ 时，$x_1=\sqrt{t}$，$x_2=-\sqrt{t}$，$x_3=\frac{t-1}{2}$.

当 $t<0$ 时，$x=\frac{t-1}{2}$.

评注 在解字母系数的一元二次方程时，首先应讨论含 x^2 项的系数是否为零．若为一元二次方程，再考虑用因式分解法或公式法解之；题(3)是典型的“反客为主”解法，若具有较强的观察能力，也可直接分解因式.

例3 解下列关于 x 的方程

(1) $(c+a-2b)x^2+(a+b-2c)x+(b+c-2a)=0$;

(2) $x|x+1|+a=0$.

分析 (1)观察题目中系数的特点，$(c+a-2b)+(a+b-2c)+(b+c-2a)=0$，所以 $x=1$ 是原方程的根，但还要注意讨论二次项系数是否为零. (2)对 x 分类脱去绝对值符号.

解答 (1)当 $c+a-2b=a+b-2c=0$ 时，即 $a=b=c$，则原方程变为 $0x^2+0x+0=0$，∴此时方程的根为任意实数；

当 $c+a-2b=0, a+b-2c\neq 0$ 时，原方程变为 $(a+b-2c)x+b+c-2a=0$.

$\therefore x=-\dfrac{b+c-2a}{a+b-2c}$.

当 $c+a-2b\neq 0$ 时，原方程系数之和为 0，

$\therefore x=1$ 是原方程的根.

从而另一根为 $x_2=\dfrac{b+c-2a}{c+a-2b}$.

(2)当 $x<-1$ 时，原方程变形为 $x^2+x-a=0$. ①

当 $\Delta=1+4a\geqslant 0$(由 $x<-1\Rightarrow a=-x|1+x|>0$)即 $a>0$ 时，

①的解为 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$.

但 x 应小于 -1，故 $x=\dfrac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}$ 是原方程的解.

当 $x\geqslant -1$ 时，原方程变形为 $x^2+x+a=0$. ②

当 $\Delta=1-4a\geqslant 0$，即 $a\leqslant\dfrac{1}{4}$ 时②有解为 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4a}}{2}$.

又 $x\geqslant -1$，故 $\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4a}}{2}\geqslant -1$.

所以当 $a<0$ 时，$x=\dfrac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}$ 是原方程的根；

当 $0\leqslant a\leqslant\dfrac{1}{4}$ 时，$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4a}}{2}$ 是原方程的解.

综上可知，

当 $a<0$ 时，原方程的解为 $x=\dfrac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}$；

当 $0\leqslant a\leqslant\dfrac{1}{4}$ 时，原方程的解为 $x=\dfrac{-1+\sqrt{1-4a}}{2}$ 或 $x=\dfrac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}$；

当 $a>\dfrac{1}{4}$ 时，原方程的解为 $x=\dfrac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}$.

评注 题(1)应用了"若 $a+b+c=0$，则方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 必有一根为"1"，使解题过程大大简化，此结论，反之也成立. 题(2)对 x 与 a 都要作分类讨论，需考虑全面.

例4 已知方程 $(a^2-1)x^2-2(5a+1)x+24=0$ 有两个不等的负整数根. 求

整数 a 的值.

分析 该方程有两个不等的负整数根，$\therefore \Delta>0$，可用求根公式表示出二根并充分利用其整数性.

解答 $\Delta=[-2(5a+1)]^2-4(a^2-1)\times 24=4(a+5)^2$.

$\because$ 方程有两个不等的负整数根，$\therefore \Delta>0$ 即 $a\neq -5$.

又 $\because a\neq \pm 1$，$\therefore$ 由求根公式得：

$x=\dfrac{2(5a+1)\pm 2(a+5)}{2(a^2-1)}$.

$\therefore x_1=\dfrac{6}{a-1}$，$x_2=\dfrac{4}{a+1}$ 均为整数.

$\therefore$ 当 $a=-2$ 时，x_1，x_2 为两个不等的负整数，

$\therefore a=-2$.

评注 此题还可以直接因式分解为 $[(a-1)x-6][(a+1)x-4]=0$ 可进一步简化解题.

例5 已知实数 x、y 满足方程 $(x^2+2x+3)(3y^2+2y+1)=\dfrac{4}{3}$，求 $x+y$ 的值.

分析 把 y 当作字母系数，则方程为关于 x 的一元二次方程，可解之.

解答 将原方程整理成关于 x 的方程为：

$(9y^2+6y+3)x^2+(18y^2+12y+6)x+27y^2+18y+5=0$. ①

$\because x$ 为实数，且 $9y^2+6y+3=9\left(y+\dfrac{1}{3}\right)^2+2>0$，

$\therefore \Delta=(18y^2+12y+6)^2-4(9y^2+6y+3)(27y^2+18y+5)\geqslant 0$.

化简，整理得 $(3y+1)^2[(y+1)^2+2y^2]\leqslant 0$.

由平方的非负性知：$(3y+1)^2\geqslant 0$，$(y+1)^2+2y^2>0$.

$\therefore (3y+1)^2=0$ 故 $y=-\dfrac{1}{3}$.

把 $y=-\dfrac{1}{3}$ 代入方程①，解得 $x=-1$.

$\therefore x+y=-\dfrac{4}{3}$.

评注 本例是采用"主元法",即从另一个角度看待方程中的变元(看作字母系数),紧扣有实数解这一条件,这是解含两个或多个变元的二次方程(或方程组)的一般技巧.

例6 首项系数不相等的两个二次方程:

$(a-1)x^2-(a^2+2)x+(a^2+2a)=0$; ①

及$(b-1)x^2-(b^2+2)x+(b^2+2b)=0$. ②

其中 a、b 为正整数,有一公共根,求$\dfrac{a^b+b^a}{a^{-b}+b^{-a}}$的值.

分析 此题可以利用一元二次方程根的解法,先求出方程①、②的根,然后找出它们的公共根.

解答 由条件知 $a>1,b>1,a\neq b$.

方程①分解因式可得:

$[(a-1)x-(a+2)](x-a)=0$.

解得两个根为 $x_1=\dfrac{a+2}{a-1},x_2=a$.

同理解得②的两个根为 $x_3=b,x_4=\dfrac{b+2}{b-1}$.

$\because a\neq b,\therefore a=\dfrac{b+2}{b-1}$或 $b=\dfrac{a+2}{a-1}$.

即 $ab-a-b-2=0,(a-1)(b-1)=3$.

$\because a$、b 均为正整数,则有:

$\begin{cases}a-1=1\\b-1=3\end{cases}$或$\begin{cases}a-1=3\\b-1=1.\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=2\\b=4\end{cases}$或$\begin{cases}a=4\\b=2.\end{cases}$

代入所求值的表达式化简得:

$\dfrac{a^b+b^a}{a^{-b}+b^{-a}}=a^bb^a=4^2\cdot2^4=256$.

另解 由已知条件得 $a>1,b>1,a\neq b$,设方程①、②的公共根为 x_0.则有

$(a-1)x_0^2-(a^2+2)x_0+a^2+2a=0$, ③

$(b-1)x_0^2-(b^2+2)x_0+b^2+2b=0$. ④

③×$(b-1)$-④×$(a-1)$,整理得:

$(a-b)(ab-a-b-2)(x_0-1)=0.$

$\because a\neq b,\therefore x_0=1$ 或 $ab-a-b-2=0.$

若 $x_0=1$,代入③即得 $a=1$ 与 $a>1$ 矛盾.

$\therefore x_0\neq 1$,从而 $ab-a-b-2=0$,即 $ab=a+b+2.$

若 $a>b>1$,则 $b=1+\frac{b}{a}+\frac{2}{a}<3,\therefore b=2,a=4.$

同理,若 $b>a>1$,得 $a=2,b=4.$

代入所求值的表达式得 $\frac{a^b+b^a}{a^{-b}+b^{-a}}=\frac{2^4+4^2}{2^{-4}+4^{-2}}=256.$

评注 还可以应用如下结论来求 a 的值.

两个一元二次方程 $\begin{cases}a_1x^2+b_1x+c_1=0, & ①\\ a_2x^2+b_2x+c_2=0. & ②\end{cases}$

有一个公共根的必要条件是:

$(a_1c_2-a_2c_1)^2=(a_1b_2-a_2b_1)(b_1c_2-b_2c_1).$ ③

巩固练习

一、选择题

1. 方程 $x^2-3|x|-2=0$ 的最小的根的负倒数是 ( )

A. $\frac{1}{2}(3+\sqrt{17})$ B. $\frac{1}{2}(3-\sqrt{17})$ C. $\frac{1}{4}(3-\sqrt{17})$ D. $\frac{1}{4}(\sqrt{17}-3)$

2. 方程 $|x^4-4x^2|=4$ 的实数根的个数是 ( )

A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

3. 已知方程 $2x(kx-4)-x^2+6=0$ 有实数根,则 k 的最大整数值是 ( )

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

4. 关于 x 的方程 $x^2-2|x|+2=m$,恰有 3 个实数根,m 的值等于 ( )

A. 1 B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 2.5

二、填空题

5. 当 a 等于______时,方程 $x^2+ax-6=0$ 与 $x^2-6x+a=0$ 至少有一个公共根.

6. 已知关于 x 的方程 $x^2+2(m+1)x+(3m^2+4mn+4n^2+2)=0$ 有实根,则 $3m^2+2n^3=$______.

7. a 是方程 $x^2+x-\frac{1}{4}=0$ 的根,则 $\frac{a^3-1}{a^5+a^4-a^3-a^2}$ 的值等于______.

三、解答题

8. 解关于 x 的方程：

$x^4-3x^3+(3-2a)x^2+(3a-1)x+a(a-1)=0$.

9. 已知 m,n 为有理数，方程 $x^2+mx+n=0$ 有一个根为 $\sqrt{5}-2$，求 $m+n$ 的值.

10. 设方程 $x^2-kx-7=0$ 和 $x^2-6x-(k+1)=0$ 有公共根，试求 k 的值.

专题2　一元二次方程根的判别式

知识要点

设一元二次方程为 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，其根的判别式为 $\Delta=b^2-4ac$.

对一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，　①

两边乘以 $4a$，得 $4a^2x^2+4abx+4ac=0$.

配方得 $(4a^2x^2+4abx+b^2)-b^2+4ac=0$.

得 $b^2-4ac=(2ax+b)^2$.　②

因此，在方程的观点下，判别式是配方法的结果，并且表现为完全平方的形式，从而在实数范围内有产生非负数的功能.其在方程、不等式、函数等方面的研究中都有广泛的应用.

根的判别式主要应用于以下几个方面：

(1)不解方程，判断一元二次方程的根的存在情况；

由②可以看到：

$\Delta>0\Leftrightarrow$方程①有两个不相等的实根.

$\Delta=0\Leftrightarrow$方程①有两个相等的实根.

$\Delta<0\Leftrightarrow$方程①没有实根.

(2)确定含参数的一元二次方程参数的值或取值范围；

(3)判断实根的有理性、无理性或整数性；由②可以看到对于有理系数方程①，当它的判别式 $\Delta=b^2-4ac=p^2\geqslant0$，且 p 为有理数时，方程①的两实根为有理数，即 $x_1=\dfrac{-b-p}{2a}$，$x_2=\dfrac{-b+p}{2a}$；当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 而 Δ 不是有理数的完全平方数时，方程①有一对无理数根，即：

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

(4)解决求最大值和最小值的问题；

另外，在数学竞赛中的许多问题也可以通过构造一元二次方程，把原问题转化为讨论方程根的性质，然后用判别式给出独特的解法.

范例精解

例1 如果关于 x 的方程 $mx^2-2(m+2)x+m+5=0$ 没有实数根，那么，关于 x 的方程 $(m-5)x^2-2(m+2)x+m=0$ 的实根个数为 ( )

A. 2　　B. 1　　C. 0　　D. 不确定

分析 根据已知条件前一个方程无实根，确定 m 的取值范围，再来讨论第二个方程根的个数情况.

解答 对于方程 $mx^2-2(m+2)x+m+5=0$，

当 $m=0$ 时，该方程有一个实根 $x=\frac{5}{4}$，又已知该方程无实根，所以 $m\neq0$ 且 $\Delta<0$，即 $4(m+2)^2-4m(m+5)<0$，解得 $m>4$.

对于方程 $(m-5)x^2-2(m+2)x+m=0$，

当 $m=5$ 时，方程为一次方程，有一个实根 $x=\frac{5}{14}$；

当 $m\neq5$ 时，方程的判别式 $\Delta=4(m+2)^2-4m(m-5)=36m+16$；

当 $m>4$ 时，$\Delta>0$，方程有两个不相等的实根.

故方程 $(m-5)x^2-2(m+2)x+m=0$ 的实根个数不确定. 选 D.

评注 对于一个二次项系数含参数的方程，要按照二次项系数为零或不为零两种情况来讨论根的情况，二次项系数为零时方程是一次方程；二次项系数不为零时方程是二次方程，方可使用判别式.

例2 设 a,b,c 为互不相等的非零实数，证明：三个方程 $ax^2+2bx+c=0$，$bx^2+2cx+a=0$，$cx^2+2ax+b=0$，不可能都有两个相等的实数根.

分析 同时计算出三个方程的判别式，由于单独分析有难度，故整体考虑它们的和. 若和大于零（或小于零），则说明其中之一必大于零（或小于零）.

证明 方程 $ax^2+2bx+c=0$ 的判别式为 $\Delta_1=4b^2-4ac$；

方程 $bx^2+2cx+a=0$ 的判别式为 $\Delta_2=4c^2-4ab$；

方程 $cx^2+2ax+b=0$ 的判别式为 $\Delta_3=4a^2-4bc$.

所以 $\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3=4a^2+4b^2+4c^2-4ab-4bc-4ac$

$=2(a-b)^2+2(b-c)^2+2(a-c)^2$.

因为,a、b、c 为互不相等的非零实数

所以,$(a-b)^2>0,(b-c)^2>0,(c-a)^2>0$,

即 $\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3>0$.

故题中的三个方程不可能都有两个相等的实数根.

评注 判别方程有无实根,关键是讨论 Δ 值的情况.本题的证明是利用几个实数的和大于(或小于)零,则其中至少有一个实数大于(或小于)零;几个实数的积小于零,则其中至少有一个实数小于零.应用这个实数性质和一元二次方程根的判别式,可讨论一元二次方程的根的情况.

例3 若方程 $x^2+2(1+a)x+(3a^2+4ab+4b^2+2)=0$ 有实数解,求 a,b 的值.

分析 根据原方程有实根,所以它的判别式 $\Delta\geqslant0$,从而确定 a 与 b 的值

解答 因为方程有实数根,则它的判别式

$\Delta=4(1+a)^2-4(3a^2+4ab+4b^2+2)\geqslant0$

即 $(a-1)^2+(a+2b)^2\leqslant0$ ①

由于 $(a-1)^2\geqslant0,(a+2b)^2\geqslant0$,从而有

$(a-1)^2+(a+2b)^2\geqslant0$ ②

要①、②同时成立,只有 $(a-1)^2+(a+2b)^2=0$,而这只有 $(a-1)^2=0$,$(a+2b)^2=0$,才能使上式成立

所以,$a=1,b=-\dfrac{1}{2}$.

评注 此例用到了一个重要原理:"若 $A\geqslant0$ 且 $A\leqslant0$",则"$A=0$",这一方法在今后解题中会有更多应用.

利用根的判别式及根与系数的关系相结合还可解决更多的确定字母参数的问题.下一专题我们将继续研究.

例4 设 m 为整数,且 $4<m<40$,方程 $x^2-2(2m-3)x+4m^2-14m+8=0$ 有两个相异整数根,求 m 的值及方程的根.

分析 由于原方程有两个相异整数根,所以根的判别式应为完全平方数.

解答 $\Delta=4(2m-3)^2-4(4m^2-14m+8)=4(2m+1)$

对于 $4<m<40$ 的整数 m,使 $\Delta=4(2m+1)$ 为完全平方数的全部 m 为 12 和 24,根据求根公式,有:

$$x=\frac{2(2m-3)\pm\sqrt{4(2m+1)}}{2}=2m-3\pm\sqrt{2m+1}$$

当 $m=12$ 时,$x_1=16$,$x_2=26$;

当 $m=24$ 时,$x_1=38$,$x_2=52$.

评注 本题的判别式结构较简单,根据 Δ 要为完全平方数来缩小参数的取值范围,然后通过检验来确定满足题设的参数值.缩小参数取值.

例5 对于任意实数 k,方程 $(k^2+1)x^2-2(a+k)^2x+k^2+4k+b=0$ 总有一个根是 1,(1)求实数 a、b.(2)求另一个根的范围.

分析 将 $x=1$ 代入原方程,得到关于 k 的方程.充分利用它对任意实数 k 成立.可求出 a、b.

解答 把 $x=1$ 代入方程 $(k^2+1)x^2-2(a+k)^2x+k^2+4k+b=0$,

整理得,$4(1-a)k+b-2a^2+1=0$.

上式对于任意实数 k 成立,从而有:

$1-a=0$,且 $b-2a^2+1=0$.

所以,$a=1$,$b=1$.

把 $a=1$,$b=1$ 代入原方程,整理得 $(k^2+1)x^2-2(1+k)^2x+k^2+4k+1=0$,

所以,$\Delta=16k^2$,另一根 $x_2=\dfrac{k^2+4k+1}{k^2+1}$,整理得:

$(x_2-1)k^2-4k+(x_2-1)=0$.

把上式看作是关于 k 的二次方程,由于 k 为实数,所以 $\Delta=(-4)^2-4(x_2-1)^2\geqslant0$,解得 $-1\leqslant x_2\leqslant3$.

评注 解决本题的关键在于用两次转化为关于 k 的方程. 求 x_2 的取值范围相当于求 x_2 的最大值和最小值.

例6 设实数 x、y 满足方程 $x^3+y^3=a^3(a>0)$，求 $x+y$ 的取值范围.

分析 本题需把 $x+y$ 作为整体来考虑，不妨引进参数 k. 设 $x+y=k$. 若根据已知找到 $x\cdot y$ 与参数 k 的关系，则可构造以 x, y 为根的一元二次方程(系数中含字母 k).

解答 设 $x+y=k$.

$x^3+y^3=(x+y)^3-3(x+y)xy=k^3-3kxy=a^3$.

所以，$xy=\dfrac{k^3-a^3}{3k}$.

由此可知，x, y 是关于 t 的方程

$t^2-kt+\dfrac{k^3-a^3}{3k}=0$ 的两实根.

由判别式 $\Delta\geqslant0$，得 $k^2-4\cdot\dfrac{k^3-a^3}{3k}\geqslant0$.

解得 $0<k\leqslant\sqrt[3]{4}a$.

即 $0<x+y\leqslant\sqrt[3]{4}a$.

评注 设所求式整体为参数 k，构造含有字母 k 为系数的一元二次方程，利用 $\Delta\geqslant0$，求出 k 的范围，是解决这类问题的重要方法；构造一元二次方程的主要工具是根与系数的关系.

例7 如果 $x^2+7xy+ay^2-5x+43y-24$ 可分解为两个一次因式的积，求 a 的值.

分析 $x^2+7xy+ay^2-5x+43y-24=(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)$ 成立，可以看作是关于 x 的方程 $x^2+7xy+ay^2-5x+43y-24=0$ 有两个解. 且 Δ 为完全平方式.

解答 原式整理为关于 x 的二次三项式，得 $x^2+(7y-5)x+(ay^2+43y-24)$.

考虑关于 x 的方程：

$x^2+(7y-5)x+(ay^2+43y-24)=0$.