"希望杯"数学竞赛系列丛书 主编 周国镇

HOPE 希望杯 全国数学邀请赛 since 1990

希望杯

数学能力培训教程

王墨森 张海英 骆 华 等◎编著

小学

◎掌握美的数学

◎学会创新思考

◎登上更高境界

数学能力测评的高水准资料

为千千万万的青少年播种希望

气象出版社

★ 圆形，表示广阔的天空。

★ 英文 hope（希望）形如一只展翅飞翔的鸟。喻义：“希望杯”全国数学邀请赛为广大的青少年在科学思维能力上的健康发展开辟了一个广阔的空间，任他们自由翱翔。

★ “since 1990”字样表示：“希望杯”全国数学邀请赛是从1990年开始创办的。

XIWANGBEI SHUXUE NENGLI PEIXUN JIAOCHENG

ISBN 7-5029-4046-4

ISBN 7-5029-4046-4/G · 1123

定价：13.00元

"希望杯"数学竞赛系列丛书　主编　周国镇

"希望杯"数学能力培训教程

小　学

王墨森　张海英　骆　华等◎编著

气象出版社

图书在版编目(CIP)数据

“希望杯”数学能力培训教程. 小学 / 周国镇主编.
北京：气象出版社，2005.10
（“希望杯”数学竞赛系列丛书）
ISBN 7－5029－4046－4

Ⅰ. 希… Ⅱ. 周… Ⅲ. 数学课—小学—教学参考
资料 Ⅳ. G624.503

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 120727 号

气象出版社出版

（北京海淀区中关村南大街 46 号 邮编：100081）

总编室：010－68407112 发行部：010－62175925

网址 http://cmp.cma.gov.cn E－mail：qxcbs@263.net

责任编辑：黄丽荣 终审：黄润恒

封面设计：贾衍凤 版式设计：刘祥玉 责任校对：庚 申

*

河北天普润印刷厂印刷

气象出版社发行

*

开本：850×1168 1/32 印张：10.5 字数：273 千字

2005 年 12 月第一版 2006 年 1 月第二次印刷

印数：20001~40000 定价：13.00 元

“希望杯”全国数学邀请赛
组织委员会

顾　问

龚　昇　著名数学家
华罗庚数学奖获得者
中国科学技术大学原副校长

梅向明　著名数学家
北京师范学院原院长

徐利治　著名数学家
大连理工大学数学研究所原所长

常务委员

陈德泉　应用数学家
曾任中国优选法统筹法与经济数学研究会理事长，现任副理事长
华罗庚实验室主任
曾任第一、二届“希望杯”组委会主任，其他各届副主任

计　雷　应用数学家
曾任中国优选法统筹法与经济数学研究会理事长，现任副理事长
华罗庚实验室副主任
曾任三届“希望杯”组委会主任，其他各届副主任

徐伟宣　应用数学家
中国科学院科技政策与管理科学研究所原所长
中国优选法统筹法与经济数学研究会理事长
华罗庚实验室副主任

曾任六届“希望杯”组委会主任，其他各届副主任

周国镇 数学教育专家

《数理天地》杂志社社长、总编

历届“希望杯”组委会秘书长、命题委员会主任

刘学红 中国青年报名记者、中青在线网总裁

周春荔 数学教育专家

首都师范大学教授

吕伟泉 广东省教研室副主任

汪江松 数学教育专家

《中学数学》主编

湖北大学教授

肖果能 数学教育专家

中南大学教授

顾宏达 数学教育专家

上海黄浦教育学院原院长

黄建弘 数学教育专家

上海师资培训中心实验基地主任

欧益生 浙江嘉兴市教研室主任

曾大洋 福建泉州市数学会秘书长

龙开奋 数学教育专家

广西师范大学副教授

委　员

北　京 牛玉石

天　津 王成维

澳　门 吕晓白

河　北 石瑞贞　胡天顺　张丽晨　关登超　耿昌敏　石扶兴

李本洲

山　西 张起林　白　枫　温树成　宋　校　马建党　王芝梅

内蒙古	张志仁	王　荣	刘爱平	刘彦彰	南　丁	高秀恩
	杨　莉	敖特根				
辽　宁	赵素艳	孙家逊	张顺清	刘　荟	舒凤杰	魏丽敏
	陈玉华	陈桂英	王闽东			
吉　林	张胜利	刘　颖	赵莉红	祝承亮	李春花	
黑龙江	于　辉	李修福	孙　兵	全绍先	全贵泉	
上　海	杨家政	熊　斌	王凤春	毛育才	黎　东	李　鹏
	李国威	王明珠	李　为	俞颂萱		
江　苏	许云峰	夏建新	刘　健	孔德旺	杨浩清	陶建平
	任方成					
浙　江	吴明华	李世杰	应建军	马建新	何仁荣	
福　建	付晋玫	曾大洋	温晓丹	王一柱		
江　西	熊以情	徐源可	董乐华	毛有祥	肖建中	
山　东	赵水祥	侯加明	王丽萍	王　政	闫炳杰	
河　南	马国军	陈宝亭				
湖　北	汪江松	余光明	刘统菊	杨德焱	赵小平	
湖　南	肖真武	谢细华	曾晓牛			
广　东	周　署	黄文毓	徐山洪	郑俊盛	劳兆喜	陈文生
	殷切文	梁秉冠	梁小贱	邓志云	林国忠	刘超平
	刘案清	石永生	卢建川	刘仲雄	邓正德	付冠流
	何浩江	王金玉	钟　明			
海　南	张　力	张光浓	莫德勋			
四　川	李黎明	赵颖钧	牟　林	冯惠芹	王国风	吴挽蓉
贵　州	王荣方	胡朝双	王兴华	罗朝兴		
云　南	张文英	欧　群	汪　锐	龚　灵	罗　红	徐云贵
陕　西	王秋科	吕咏格	徐学芳			
甘　肃	胡学让					
宁　夏	杨　燕	李占玉				
青　海	闫翊德					
新　疆	杨卫平	黄志清	张小平			

前　　言

这套教程充分注意了新颁布的中小学数学教学大纲，力求充分体现“希望杯”的特色，为广大师生提供系统、全面、实用的数学内容、思想和方法，以“鼓励学好课本知识，适当拓宽知识面，激发学习数学的兴趣和热情，培养科学的思维能力、创新能力和实践能力”。

本教程中所有原始的素材都来源于历届“希望杯”全国数学邀请赛的试题和培训题，这些题目中绝大多数是由“希望杯”全国数学邀请赛命题委员会的专家们命定的，其余则是由全国各地数学命题的研究人员编拟。这些题目，不但贴近现行的中小学数学课本，而且很有启发性、思考性和趣味性，寓科学于趣味之中，寓知识、能力的考查于数学的美育之中。学习和研究这些题目不仅能使学习者对数学课本的理解、掌握和应用能力达到高水平，并且能实实在在地提高科学思维素质，而这种素质对于有效地学习任何知识都是必需的。正因为如此，历届“希望杯”全国数学邀请赛的试题和培训题被多方人士看好：中考、高考命题人员经常从中吸取营养；有远见的数学教师大量地从中选取资料，来充实和丰富教学内容；众多的数学教学和培训机构则用来作为教材的主要内容之一。最有说服力的是千千万万的中小学生，正是经过对“希望杯”试题的学习、研究，提高了水平，大大加强了学数学的兴趣和信心，他们的数学素养明显地不同于没有接触过“希望杯”的学生们。值得一提的是，北大、清华等著名高校以及远赴国外大学的众多学子中有

不少人，在中学时代，都曾有参加过“希望杯”全国数学邀请赛并且获奖的经历。

“希望杯”全国数学邀请赛从1990年开始举办，至今已举办16届。16年来，参赛的初一、初二、高一、高二这四个年级，每个年级的试题、培训题累计都超过2000个，四个年级的题目则累计近万个，几乎覆盖了中学数学的全部以及中学数学课本以外的很多内容，不仅如此，而且蕴含了丰富的数学思想和方法。若要将这些题目全部做一遍，对于一位数学教师来说，确也值得和可能，但是对于一位中学生，则难度就很大了。因此如何从中提取最精彩最重要的部分，按数学的系统整理出来，就非常必要。本教程正是做了这样一件事：它从每个年级的2000多个题目中各精选了四分之一左右，分为若干个专题，对每个专题，给出了相关的必备知识，再详细分析若干个题目，然后安排做少量的题，这样一个过程，一个专题就拿下来了。一个个专题，陆续学下来，中学数学的最主要的内容、思想和方法也就能熟悉和掌握，数学功底必然大大地得到加强。

考虑到大部分中小学生只是希望能很好地掌握学校里数学课本上的内容，另一方面又有不少中小学生并不满足于此，他们对课本以外的数学也有强烈的求知欲，所以我们的教程分课本以内的和课本以外的两部分。前者占教程的大部分，后者只占小部分。

《“希望杯”数学能力培训教程》现由气象出版社于2005年12月出版，包括初一、初二、高一、高二、小学(四、五年级)，计五册。该教程在内容上贴近新的中小学数学教学大纲，更突出对科学思维能力的培养，而且在行文上力求简明易懂。

随着“希望杯”试题的不断更新和学校数学教学的需要，本教程将逐年修订，不断优化，力求将教、学和应试三者融为一体。衷心希望本套教程能引导更多的中小学生走向热爱数学、掌握数学的成功道路。

教程的作者主要是“希望杯”全国数学邀请赛命题委员会的成员，有的作者是多年带领学生参加“希望杯”全国数学邀请赛，并对“希望杯”试题深有研究的数学教师。

真诚的欢迎读者指出书中不妥之处。

周国镇

2005年10月15日

注：**周国镇**　数学教育专家，《数理天地》杂志社社长兼总编；中国优选法统筹法与经济数学研究会常务理事，数学教育委员会主任；“希望杯”全国数学邀请赛组委会秘书长，命题委员会主任。

目　录

"希望杯"全国数学邀请赛组织委员会

前　言

小学四年级

第 1 讲　数与数位 ……………………………………（1）

第 2 讲　平均数 ……………………………………（14）

第 3 讲　巧算 ……………………………………（21）

第 4 讲　字母表示数 ……………………………………（29）

第 5 讲　简易方程 ……………………………………（35）

第 6 讲　应用题 ……………………………………（43）

第 7 讲　行程问题 ……………………………………（60）

第 8 讲　整除与带余除法 ……………………………………（71）

第 9 讲　生活数学 ……………………………………（81）

第 10 讲　统筹问题 ……………………………………（88）

第 11 讲　阅读·理解·应用 ……………………………………（94）

第 12 讲　平面几何初步 ……………………………………（101）

第 13 讲　立体几何初步 ……………………………………（117）

第 14 讲　逻辑推理 ……………………………………（124）

小学五年级

第 1 讲　四则运算 ……………………………………（151）

第 2 讲　自然数性质 ……………………………………（161）

第 3 讲　小数问题 ……………………………………（171）

第 4 讲　平均数 ……………………………………（179）

第 5 讲　阅读·理解·应用 ……………………………………（186）

第 6 讲　找规律填数 ……………………………………（192）

第 7 讲　比和比例 …………………………………………… (200)
第 8 讲　字母表示数 ………………………………………… (206)
第 9 讲　简易方程 …………………………………………… (211)
第 10 讲　数字谜语 ………………………………………… (223)
第 11 讲　最值问题 ………………………………………… (229)
第 12 讲　排列组合 ………………………………………… (237)
第 13 讲　合情推理 ………………………………………… (245)
第 14 讲　逻辑问题 ………………………………………… (255)
第 15 讲　行程问题 ………………………………………… (266)
第 16 讲　应用问题 ………………………………………… (274)
第 17 讲　生活数学 ………………………………………… (285)
第 18 讲　平面几何初步 …………………………………… (293)
第 19 讲　空间概念 ………………………………………… (312)

小学四年级

第1讲　数与数位

一、知识提要

数用来表示量的多少、大小．只用数字0～9，就可以构造出无穷多的整数．人们在对整数进行运算的应用和研究中，逐步熟悉了整数的特性．比如，整数可分为两大类——奇数和偶数等．利用整数的一些基本性质，可以进一步探索许多有趣和复杂的数学规律．正是这些特性的魅力，吸引了古往今来许多数学家不断地研究和探索．到现在，对整数及其扩充的性质的研究已经形成一个数学分支——数论．同学们也在开始接触数论中的一些简单知识了．在这一讲里，我们主要讨论下面的问题．

1. 奇数与偶数

奇数与偶数相加减的规律：

偶数±偶数＝偶数，奇数±奇数＝偶数，奇数±偶数＝奇数．

奇数与偶数相乘的规律：

偶数×偶数＝偶数，奇数×奇数＝奇数，奇数×偶数＝偶数．

2. 质数与合数

对于100以内的自然数，有哪些是质数，有哪些是合数，同学们应该了解．要注意，0和1既不是质数，也不是合数；2是最小的

质数,也是质数中惟一的偶数.

另外,同学们还要掌握如何将一个数分解质因数.

3. 数位问题

常见的数位问题有:(1)数字的个数;(2)数字的和;(3)变换数字位置;(4)尾数问题.

一个多位数上的数字的含义可用如下的形式表示出来:

$$a=a\times1;$$
$$\overline{ab}=a\times10+b;$$
$$\overline{abc}=a\times100+b\times10+c;$$
$$\overline{abcd}=1000\times a+100\times b+10\times c+d;$$
$$\cdots\cdots$$

这在解变换数字位置问题时经常用到.

4. 两个常用到的结论

(1)将一个不为 0 的自然数写成两个数的和的形式,当这两个数相差得越小,它们的积就越大;

(2)将一个不为 0 的自然数写成两个数的积的形式,当这两个数相差得越小,它们的和就越小.

二、例题

例 1　某次竞赛有 20 道题,初始分为 60 分.规定:答对一题给 5 分,不答扣 1 分,答错一题扣 3 分.则最后得分必定是______(填“奇数”或“偶数”).

第 3 届(2005 年)培训题

分析　这道题考查奇、偶数的相加减规律.每次答题后,得分要加上奇数或减去奇数.第一次答题是偶数±奇数=奇数,第二次答题是奇数±奇数=偶数,第三次答题又是偶数±奇数=奇数……由此即可看出规律.

解　初始分为 60 分，不论答题情况如何，答第 1 题后，得分为奇数；答第 2 题后，得分为偶数……答完 20 题后，得分为偶数.

例 2　甲、乙、丙、丁四人做游戏，丁对甲、乙、丙说："无论你们三人每人给出的整数是什么，我有一个结论总成立."甲、乙、丙三人半信半疑，经三人多次验证，结果都正确. 请写出丁可能给的结论，并说明理由.

第 1 届(2003 年)第 2 试

分析　这是一道开放题，答案不惟一. 可以从奇偶性考虑.

解　结论：三个整数中，必有两个整数的和是偶数.

因为甲、乙、丙给出的整数不是奇数就是偶数，而给出的三个数的奇偶性只有以下几种情况：

(1)3 个奇数；

(2)2 个奇数 1 个偶数；

(3)1 个奇数 2 个偶数；

(4)3 个偶数.

又因为　奇数＋奇数＝偶数；

　　　　偶数＋偶数＝偶数，

所以结论成立.

例 3　求 $1949\times1951\times1953\times\cdots\times2003$ 的个位数.

第 1 届(2003 年)培训题

分析　显然，把乘积算出来是不可取的. 此题只需求乘积的个位数，而乘积的个位数等于所有乘数的个位数的乘积的个位数. 观察算式，所有乘数的个位数都是奇数，而奇数×奇数＝奇数，这就是突破口.

解　每一个乘数的个位数字都是奇数，且其中有一个是 5. 而奇数与 5 的积的个位数字一定是 5. 所以原式的积的个位数是 5.

例 4　一个三位数，个位和百位数字交换后还是一个三位数，

它与原三位数的差的个位数字是 7,试求它们的差.

第 1 届(2003 年)第 2 试

分析 将原来的三位数和新的三位数都展开成和的形式,就容易找到它们之间的联系.

解 设原三位数是$\overline{abc}$,即 $100a+10b+c$. 个位和百位数字交换后,得到的三位数是$\overline{cba}$,即 $100c+10b+a$. 两个三位数的差是

$$\overline{abc}-\overline{cba}=99(a-c)$$

或
$$\overline{cba}-\overline{abc}=99(c-a).$$

因为 差的个位数字是 7,

所以 $a-c=3$ 或 $c-a=3$,

即差是 297.

例 5 一个四位数,千位上的数比个位上的数大 3,交换千位上的数字和个位上的数字得到另一个四位数. 已知这两个四位数的和是 14593,那么原来的四位数是______.

第 2 届(2004 年)培训题

分析 千位数字和个位数字交换位置,十位和百位上的数字不变. 将原来的四位数和新的四位数相加,个位数字的和应等于千位数字的和. 而这两个四位数相加得 14593(如图 1-1 所示),这样可推知个位数字的和与千位数字的和都是 13,再由题给条件即可进一步推导出答案.

$$\begin{array}{r} a\ b\ c\ d \\ +\ d\ b\ c\ a \\ \hline 1\ 4\ 5\ 9\ 3 \end{array}$$

图 1-1

解 因为 两个四位数的和是 14593,

所以 它们的个位数字之和是 13,

中间两位数的和是 158. 中间两位数是

$$158\div2=79.$$

因为 原来的四位数中千位上的数字比个位上的数字大 3,

所以 千位上的数字是 8,个位上的数字是 5.

即原来的四位数是 8795.

例 6　个位数字大于十位数字的两位数共有______个．这些两位数的和是______．

第 3 届(2005 年)培训题

分析　首先确定满足题意的所有两位数有哪些．求这些两位数的和 Q,可分别求出所有个位数的和 x 与十位数的和 y,则 $Q=x+10y$.

解　当十位数字是 1 时,满足题意的两位数有 8 个;

当十位数字是 2 时,满足题意的两位数有 7 个;

……

当十位数字是 8 时,满足题意的两位数有 1 个;

当十位数字是 9 时,满足题意的两位数有 0 个．

共有　$0+1+2+3+4+5+6+7+8=36$(个).

这些两位数的十位数字的和是

$$8\times1+7\times2+6\times3+5\times4+4\times5+3\times6+2\times7+1\times8=120,$$

个位数字的和是

$$9\times8+8\times7+7\times6+6\times5+5\times4+4\times3+3\times2+2\times1=240,$$

所以这些两位数的和是

$$120\times10+240=1440.$$

例 7　将连续的正整数 1,2,3,…按从小到大的顺序排成一列 123456789101112…,如果所排成的数列中共有 3005 个数字,那么这个数列中共有______个连续的正整数.

第 2 届(2004 年)培训题

分析　从 1 开始的连续的整数中,有 9 个一位数:1～9;接下来是 90 个两位数:10～99;再接下来是 900 个三位数:100～999……这样就能确定出所排成的数列中,第 3005 位数所对应的数字是哪一个整数的哪一位数．

解　1～999 共有数字 $9+180+2700=2889$(个),