第一章　函数与导数

一、考试要求

1. 集合、子集、补集、交集、并集的概念. 了解空集和全集的概念. 了解属于、包含、相等的意义，以及有关的符号和术语. 理解掌握逻辑联结词、充要条件、四种命题.

2. 深刻理解函数的有关概念. 掌握对应法则、图象等有关性质. 理解掌握函数的单调性和奇偶性的概念，掌握基本的判定方法和步骤，并会运用. 理解掌握反函数的概念，明确反函数的意义、一些常见符号的意义、求反函数的方法和步骤，反函数与原函数的关系等. 理解掌握指数函数和对数函数的性质、图象及运算性质，对数、指数运算及其函数和性质.

3. 了解导数的实际意义，深刻理解导数的概念，了解用定义求简单函数的导数. 熟记基本求导公式，了解复合函数的求导法则. 会求简单函数的导数. 掌握导数的有关应用. 了解定积分的实际意义，理解积分的概念. 掌握微积分的基本定理.

二、复习建议

函数不仅是高中数学的核心内容，还是学习高等数学的基础，所以在高考中，函数知识占有极其重要的地位. 其试题不但形式多样，而且突出考查学生在联系与转化、分类与讨论、数与形结合等重要方面的数学思想和能力. 函数知识覆盖面广、综合性强、思维力度大、能力要求高，因此在高考中，它是被用于考数学思想、考数学方法、考能力、考素质的重要部分.

在复习时，一要夯实基础；二要深刻理解与运用，如函数概念与函数性质；三要数形结合，做到"见到函数式即可想到图象与性质，见到图象即可判断函数类型与性质"；四要注重函数的应用与知识的综合.

集合的初步知识与简易逻辑知识，是掌握和使用数学语言的基础. 复习集合的内容时，要注意集合语言的转化，要正确理解和使用符号. 充分、必要条件的判断首先要分清命题的条件和结论. 判断充分、必要条件的常用方法论是定义法、逆否法、数形结合法.

导数是新教材增设的内容，是学习高等数学的基础. 它在自然科学、工程技术等方面都有着广泛的应用. 其在高考中所占的比例趋势远高于其在课时中所占的比例. 导数已经由前几年只是在解问题中的辅助工具上升为分析和解决问题时必不可少的工具，近五年的高考试卷中每年都有一道关于导数的试题，分值为5~17分.

第一单元　集合的概念与运算

第一讲　集合的概念

考点剖析

重点与难点：理解集合的概念，掌握集合的表示法；理解集合之间的包含与相等关系，理解空集与全集；理解集合的概念和集合之间的包含与相等关系；掌握集合的表示法，理解空集与全集.

例题精选

例 1　已知 $A=\{a+2, (a+1)^2, a^2+3a+3\}$，若 $1\in A$，求实数 a 的值.

解：①若 $a+2=1$，则 $a=-1$，此时 $A=\{1, 0, 1\}$ 与集合中元素的互异性矛盾，舍去.

②若 $(a+1)^2=1$，则 $a=0$ 或 $a=-2$. 当 $a=0$ 时，$A=\{2, 1, 3\}$ 满足题意. 若 $a=-2$，此时 $A=\{0, 1, 1\}$ 与集合中元素的互异性矛盾，舍去.

③若 $a^2+3a+3=1$，则 $a=-1$（舍去），或 $a=-2$（舍去）.

综上所述，$a=0$.

例 2　已知集合 $A=\{m\mid \dfrac{6}{6-m}\in \mathbf{N}^*，且\ m\in \mathbf{Z}\}$，试用列举法表示集合 A.

解：$\because \dfrac{6}{6-m}\in \mathbf{N}^*$，则 $6-m\in \mathbf{N}^*$，且 $6-m$ 为 6 的约数，

$\therefore 6-m=1, 2, 3, 6$，即 $m=0, 3, 4, 5$.

$\therefore A=\{0, 3, 4, 5\}$.

例 3　下列表达式中，正确的是（　　）.

①$0\subseteq\{0\}$；②$\varnothing\in\{\varnothing\}$；③$\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$；④$\varnothing=\{0\}$；⑤$\{0\}\in 0$；⑥$\varnothing\in\{0\}$；⑦$\varnothing\subseteq\{0\}$；⑧$\{0, 1\}=\{(0, 1)\}$.

A. ②③⑦　　B. ①④⑧　　C. ②③⑤　　D. ②③⑥

解：①应为 $0\in\{0\}$；②③正确，$\{\varnothing\}$ 表示有一个元素为 $\varnothing$ 的集合；④应为 $\varnothing\subseteq\{0\}$，$\{0\}$ 表示有一个元素为 0 的集合；⑤⑥错误；⑦正确；⑧错误，因为 $\{0, 1\}$ 是数集，而 $\{(0, 1)\}$ 为点集. 所以正确答案为 A.

例 4　已知非空集合 $M\subseteq\{1, 2, 3, 4, 5\}$，且若 $a\in M$，则 $6-a\in M$，那么集合 M 的个数为（　　）.

A. 5 个　　B. 6 个　　C. 7 个　　D. 8 个

解：共有 $\{3\}$，$\{1,5\}$，$\{2,4\}$，$\{1,3,5\}$，$\{2,3,4\}$，$\{1,2,4,5\}$，$\{1,2,3,4,5\}$ 7个. 所以正确答案为C.

评估测试

(一) 基础巩固

1. 选择题.

(1) 下面给出的对象中：①某班个子较高的同学；②相当大的实数；③倒数等于它本身的实数；④2005届广东省高中毕业生；⑤2005年升上全国名牌大学的学生. 其中能构成集合的有（　　）个.

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

(2) 设 $A=\{a|a$ 使方程 $ax^2+2x+1=0$ 有唯一实数解$\}$，则 A 用列举法可表示为（　　）.

A. $A=\{1\}$　　B. $A=\{0\}$

C. $A=\{0,1\}$　　D. $A=\{0\}$ 或 $\{1\}$

(3) 设 P、Q 为两个非空实数集合，定义集合 $P+Q=\{a+b|a\in P, b\in Q\}$，若 $P=\{0,2,5\}$，$Q=\{1,2,6\}$，则 $P+Q$ 中元素的个数是（　　）.

A. 9个　　B. 8个　　C. 7个　　D. 6个

(4) 集合 $A=\{x\in\mathbf{R}|x(x-1)(x-2)=0\}$，则集合 A 的非空子集的个数为（　　）.

A. 4个　　B. 8个　　C. 7个　　D. 6个

2. 填空题.

(1) 下列四个命题中：①与1非常接近的全体实数能构成集合；②$\{-1,(-1)^2\}$ 表示一个集合；③空集是任何一个集合的真子集；④任何一个非空集合必有两个以上的子集. 其中正确的有______(填序号).

(2) 已知集合 $A=\{0,1\}$，$B=\{x|x\in A, x\in\mathbf{N}^*\}$，$C=\{x|x\subseteq A\}$，则 A、B、C 之间的关系是______.

(3) 设集合 $M=\{x\in\mathbf{Z}|\frac{6}{2-x}\in\mathbf{Z}\}$，若用列举法表示集合 M，则 $M=$______.

(4) 若 $\{x|2x-a=0\}\subseteq\{x|-1<x<3\}$，则 a 的取值范围是______.

3. 简答题.

(1) 已知集合 $A=\{a|\frac{x+a}{x^2-2}=1\}$ 有唯一实数解，用列举法表示集合 A.

(2) 设集合 $A=\{x||x-a|<2\}$，$B=\{x|\frac{2x-1}{x+2}<1\}$，若 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

(二) 能力提升

1. 已知集合 $A=\{a, a+b, a+2b\}$，$B=\{a, ac, ac^2\}$. 若 $A=B$，求实数 c 的值.

2. 设函数 $f(x)=\sqrt{2-\frac{x+3}{x+1}}$ 的定义域为 A，不等式 $(x-a-1)(2a-x)>0(a<1)$ 的解集为 B.

(1) 求 A.

(2) 若 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

第二讲　集合的运算

考点剖析

重点：理解两个集合的并集与交集的含义，会求两个简单集合的并集与交集；理解在给定集合中一个子集的补集的含义，会求给定子集的补集；能使用Venn图表达集合的关系及运算，体会直观图示对理解抽象概念的作用.

难点：补集的有关运算.

例题精选

例1　已知集合 A、B 是全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 的子集，$A\cap B=\{2\}$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{1,9\}$，$(\complement_U A)\cap B=\{4,6,8\}$，求 A、B.

分析：作出Venn图，如图1-1所示，利用数形结合法求解本题.

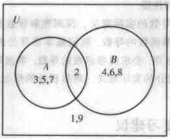


图 1-1

解：由图可得，$A=\{2,3,5,7\}$，$B=\{2,4,6,8\}$.

例2　已知全集 $U=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{|a+7|,2\}$，$\complement_U A=\{5\}$，则实数 a 的值是（　　）.

A. 2，−4　　B. −2，4　　C. 2　　D. −4

解：∵ $\complement_U A=\{5\}$，$A=\{|a+7|,2\}$，$U=\{2,3,a^2+2a-3\}$，

$\therefore\begin{cases}|a+7|=3,\\ a^2+2a-3=5.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-4, \text{或} a=-10,\\ a=-4, \text{或} a=2.\end{cases}$

∴ $a=-4$，∴ 正确答案为D.

例3　已知 $A=\{x|x^2-px-2=0\}$，$B=\{x|x^2+qx+r=0\}$，且 $A\cup B=\{-2,1,5\}$，$A\cap B=\{-2\}$，求 p、q、r 的值.

解：∵ $A\cap B=\{-2\}$，∴ $-2\in A$，$-2\in B$.

将 -2 代入 $x^2-px-2=0$，得 $p=-1$. ∴ $A=\{1,-2\}$.

∵ $A\cup B=\{-2,1,5\}$，$A\cap B=\{-2\}$，∴ $B=\{-2,5\}$.

$\therefore\begin{cases}(-2)+5=-q,\\ (-2)\times 5=r.\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}q=-3,\\ r=-10.\end{cases}$

∴ $p=-1$，$q=-3$，$r=-10$.

例4　已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|x^2-ax+3a-5=0\}$. 若 $A\cap B=B$，求实数 a 的取值范围.

解：$A=\{x|x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$，

由 $x^2-ax+3a-5=0$，可知 $\Delta=a^2-4(3a-5)=a^2-12a+20=(a-2)(a-10)$.

(1) 当 $2<a<10$ 时，$\Delta<0$，$B=\varnothing\subseteq A$；

(2) 当 $a\leqslant 2$ 或 $a\geqslant 10$ 时，$\Delta\geqslant 0$，则 $B\neq\varnothing$.

若 $x=1$，则 $1-a+3a-5=0$，得 $a=2$，此时 $B=\{x|x^2-2x+1=0\}=\{1\}\subseteq A$；

若 $x=2$，则 $4-2a+3a-5=0$，得 $a=1$，此时 $B=\{2,-1\}\not\subseteq A$.

综上所述，当 $2\leqslant a<10$ 时，均有 $A\cap B=B$.

评估测试

（一）基础巩固

1. 选择题.

(1) 已知集合 $M=\{x|x^2<4\}$，$N=\{x|x^2-2x-3<0\}$，则集合 $M\cap N=$(　　).

A. $\{x|x<-2\}$　　B. $\{x|x>3\}$

C. $\{x|-1<x<2\}$　　D. $\{x|2<x<3\}$

(2) 设集合 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{2, 5\}$，则 $A\cap(\complement_U B)$ 等于(　　).

A. $\{2\}$　　B. $\{2, 3\}$

C. $\{3\}$　　D. $\{1, 3\}$

(3) 设集合 $M=\{(x, y)|x^2+y^2=1, x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$，$N=\{(x, y)|x^2-y=0, x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$，则集合 $M\cap N$ 中元素的个数为(　　).

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

(4) 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $E=\{x|x^2+x-6\geqslant 0\}$，$F=\{x|x^2-4x-5<0\}$，则集合 $\{x|-1<x<2\}=$(　　).

A. $E\cap F$　　B. $(\complement_U E)\cap F$

C. $(\complement_U E)\cup(\complement_U F)$　　D. $\complement_U(E\cup F)$

2. 填空题.

(1) 设 $T=\{(x,y)|ax+y-3=0\}$，$S=\{(x, y)|x-y-b=0\}$. 若 $S\cap T=\{(2, 1)\}$，则 $a=$________，$b=$________.

(2) 已知集合 $M=\{0, 1, 2\}$，$N=\{x|x=2a, a\in M\}$，则集合 $M\cap N=$____________.

(3) 设集合 $A=\{5, \log_2(a+3)\}$，集合 $B=\{a, b\}$. 若 $A\cap B=\{2\}$，则 $A\cup B=$____________.

(4) 定义 $M-N=\{x\mid x\in M$，且 $x\notin N\}$，若 $M=\{1, 3, 5, 7, 9\}$，$N=\{2, 3, 5\}$，则 $M-N=$______________.

3. 简答题.

(1) 已知集合 $A=\{-1, 2\}$，$B=\{x|mx+1=0\}$，若 $A\cup B=A$，求实数 m 的取值.

(2) 已知集合 $A=\{x|x^2+2x-8<0\}$，$B=\{x||x+2|>3\}$，$C=\{x|x^2-2mx+m^2-1<0\}$，若 $(A\cap B)\subseteq C$，求实数 m 的取值范围.

（二）能力提升

1. 已知 $U=\{x|x^2-3x+2\geqslant 0\}$，$A=\{x||x-2|>1\}$，$B=\{x|\frac{x-1}{x-2}\geqslant 0\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$，$(\complement_U A)\cup B$，$A\cap(\complement_U B)$.

2. 集合 $A=\{t|t$ 使 $\{x|x^2+2tx-4t-3\neq 0\}=\mathbf{R}\}$，集合 $B=\{t|t$ 使 $\{x|x^2+2tx-2t=0\}\neq\varnothing\}$，其中 x，t 均为实数. 求 $A\cap B$.

第二单元　函数的概念与表示

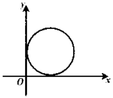
考点剖析

重点：理解函数的定义；了解构成函数的要素；掌握函数的几种常用表示方法（列表法、图象法、解析法等）.

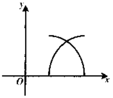
难点：函数的几种常用表示方法.

例题精选

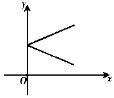
例1　下列可作为 $y=f(x)$ 图象的是(　　).



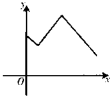
A.



B.



C.



D.

解：在选项A、B、C中，均存在一个 x 对应两个 y 的情况，因此A、B、C均错. 故正确的答案是D.

例2　已知 $f(x)=4x^2-2x+1$，$g(x)=\frac{6}{x-3}$，求 $f\left(\frac{3}{2}\right)$，$f(-x)$，$f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

解：$f\left(\frac{3}{2}\right)=4\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot\frac{3}{2}+1=7$，

$f(-x)=4\cdot(-x)^2-2(-x)+1=4x^2+2x+1$，

$$f[g(x)]=4[g(x)]^2-2[g(x)]+1=4\cdot\left(\frac{6}{x-3}\right)^2-2\cdot\frac{6}{x-3}+1=\frac{x^2-18x+189}{(x-3)^2},$$

$$g[f(x)]=\frac{6}{f(x)-3}=\frac{6}{4x^2-2x+1-3}=\frac{3}{2x^2-x-1}.$$

例3　如果函数 $f(x)$ 满足方程 $af(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=ax$，$x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq 0$，a 为常数，且 $a\neq\pm 1$，则 $f(x)=$____________.

解：$af(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=ax$，　①

将 x 换成 $\frac{1}{x}$，则 $\frac{1}{x}$ 换成 x，得 $af\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=\frac{a}{x}$.　②

由①、②消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$，即①×a-②得

$(a^2-1)f(x)=a^2x-\frac{a}{x}$. $\because a\neq\pm1$,

则 $f(x)=\dfrac{a^2x-\frac{a}{x}}{a^2-1}=\dfrac{a(ax^2-1)}{x(a^2-1)}$ $(x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq0)$.

例 4 如图 1-2 所示，已知底角为 45°的等腰梯形 $ABCD$，底边 BC 长为 7 cm，腰长为 $2\sqrt{2}$ cm，当一条垂直于底边 BC（垂足为 F）的直线 l 从左向右移动（与梯形 $ABCD$ 有公共点）时，直线 l 把梯形分成两部分．令 $BF=x$，试写出左边部分的面积 y 与 x 的函数解析式．

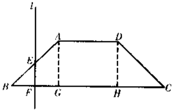


图 1-2

分析：要注意动直线 l 在移动的过程中所围成的几何体的形状及相应图形的面积公式．

解：过点 A、D 分别作 $AG\perp BC$，$DH\perp BC$，垂足分别是 G、H.

因为 $ABCD$ 是等腰梯形，底角为 45°，$AB=2\sqrt{2}$ cm，所以 $BG=AG=DH=HC=2$ cm.

又 $BC=7$ cm，所以 $AD=GH=3$ cm.

(1) 当点 F 在 BG 上，即 $x\in(0, 2]$ 时，$y=\frac{1}{2}x^2$；

(2) 当点 F 在 GH 上，即 $x\in(2, 5]$ 时，$y=2+(x-2)\cdot2=2x-2$；

(3) 当点 F 在 HC 上，即 $x\in(5, 7)$ 时，

$y=S_{五边形ABFED}=S_{梯形ABCD}-S_{Rt\triangle CEF}=-(x-7)^2+10$.

所以，函数解析式为 $y=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2, & x\in(0, 2],\\ 2x-2, & x\in(2, 5],\\ -\frac{1}{2}(x-7)^2+10, & x\in(5, 7].\end{cases}$

评估测试

（一）基础巩固

1. 选择题.

(1) 下列各式中：

①$y=x-(x-3)$；②$y=\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}$；③$y=\begin{cases}x-1 & (x<0),\\ x+1 & (x\geq0);\end{cases}$ ④$y=\begin{cases}0 & (x为有理数),\\ 1 & (x为实数).\end{cases}$

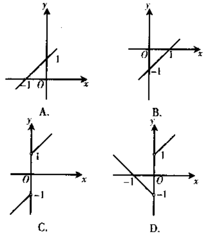
表示 y 是 x 的函数的有（　　）.

A. 4 个　　B. 3 个　　C. 2 个　　D. 1 个

(2) 已知映射 f：$A\to B$，其中 $A=B=\mathbf{R}$，对应法则 f：$y=-x^2+2x$，对于实数 $k\in B$，在集合 A 中不存在原象，则 k 的取值范围是（　　）.

A. $k>1$　　B. $k\geq1$　　C. $k<1$　　D. $k\leq1$

(3) 函数 $f(x)=x+\frac{|x|}{x}$ 的图象是（　　）.



(4) 已知 $f(\sqrt{x}+1)=x+1$，则函数 $f(x)$ 的解析式为（　　）.

A. $f(x)=x^2$　　B. $f(x)=x^2+1(x\geq1)$

C. $f(x)=x^2-2x+2(x\geq1)$　　D. $f(x)=x^2-2x(x\geq1)$

2. 填空题.

(1) 如果 $f[f(x)]=2x-1$，则一次函数 $f(x)=$____________.

(2) 设 f：$A\to B$ 是从 A 到 B 的映射，其中 $A=B=\{(x, y)|x, y\in\mathbf{R}\}$，$f$：$(x, y)\to(x+y, x-y)$，那么 A 中元素 $(1, 3)$ 的象是________，B 中元素 $(1, 3)$ 的原象是________.

(3) 已知函数 $f(n)=\begin{cases}n-3 & (n\geq10),\\ f[f(n+5)] & (n<10).\end{cases}$ 其中 $n\in\mathbf{N}$，则 $f(8)$ 等于________.

(4) 已知函数 $f(x)=\frac{x}{x+1}$，则 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2006)+f(2007)+f(1)+f\left(\frac{1}{2}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{2006}\right)+f\left(\frac{1}{2007}\right)=$________.

3. 简答题.

(1) 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数，对一切 $x\in\mathbf{R}$ 均有 $f(x)+f(x+2)=0$，当 $-1<x\leq1$ 时，$f(x)=2x-1$．求当 $1<x\leq3$ 时，函数 $f(x)$ 的解析式.

(2) 如图 1-3 所示，动点 P 从边长为 4 的正方形 $ABCD$ 顶点 B 开始，顺次经过 C、D、A 绕周界一圈．设 x 表示 P 的行程，y 表示 $\triangle APB$ 的面积，求函数 $y=f(x)$ 的解析式.

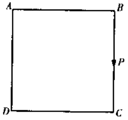


图 1-3

（二）能力提升

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & (x<1),\\ 4-\sqrt{x-1} & (x\geq1),\end{cases}$ 则使得 $f(x)\geq1$ 的

自变量 x 的取值范围为（　　）.

A. $(-\infty, -2]\cup[0, 10]$

B. $(-\infty, -2]\cup[0, 1]$

C. $(-\infty, -2]\cup[1, 10]$

D. $[-2, 0)\cup[1, 10]$

2. 设当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=2$；当 $x<0$ 时，$f(x)=1$. 又 $g(x)=\dfrac{3f(x-1)-f(x-2)}{2}$ $(x>0)$，写出 $y=g(x)$ 的表达式，并画出其图象.

第三单元　函数的解析式、定义域与值域

考点剖析

重点与难点：求函数的定义域、值域.

例题精选

例 1　求函数 $f(x)=\dfrac{1}{2-|x|}+\sqrt{x^2-1}$ 的定义域.

解：由 $\begin{cases}2-|x|\neq 0,\\ x^2-1\geqslant 0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x\neq\pm 2,\\ x\leqslant -1 \text{ 或 } x\geqslant 1.\end{cases}$

所以函数的定义域为 $(-\infty, -2)\cup(-2, -1]\cup[1, 2)\cup(2, +\infty)$.

例 2　若函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[-2, 4]$，则函数 $g(x)=f(x)+f(-x)$ 的定义域是（　　）.

A. $[-4, 4]$　　　B. $[-2, 2]$

C. $[-4, -2]$　　　D. $[2, 4]$

解：要使函数有意义，只需 $\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 4,\\ -2\leqslant -x\leqslant 4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 4,\\ -4\leqslant x\leqslant 2\end{cases}\Rightarrow -2\leqslant x\leqslant 2$.

即函数的定义域是 $[-2, 2]$. 所以正确答案是 B.

例 3　(1) 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[1, 2)$，求函数 $f(x^2)$ 的定义域.

(2) 已知 $f(x+1)$ 的定义域为 $[0, 1]$，求函数 $f(x)$ 的定义域.

解：(1) 由 $f(x)$ 的定义域为 $[1, 2)$，

可知 $f(x^2)$ 中自变量 x^2 也应在 $[1, 2)$ 中，

故 $1\leqslant x^2<2$，所以 $-\sqrt{2}<x\leqslant -1$ 或 $1\leqslant x<\sqrt{2}$，

即 $f(x^2)$ 的定义域为 $(-\sqrt{2}, -1]\cup[1, \sqrt{2})$.

(2) 已知 $f(x+1)$ 的定义域为 $[0, 1]$，即 $0\leqslant x\leqslant 1$，

则 $1\leqslant x+1\leqslant 2$，所以 $f(x)$ 的定义域为 $[1, 2]$

例 4　求下列函数的值域.

(1) $y=2x^2-4x+1$ $(0\leqslant x\leqslant 3)$.

(2) $y=\dfrac{4x+3}{x^2+1}$.

(3) $y=x-\sqrt{1-2x}$.

(4) $y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

解：(1) $y=2x^2-4x+1=2(x-1)^2-1$，又 $0\leqslant x\leqslant 3$.

由此函数的图象，可以得所求函数的值域为 $[-1, 7]$.

(2) 由 $y=\dfrac{4x+3}{x^2+1}$，可得 $yx^2-4x+y-3=0$. 当 $y=0$ 时，$x=-\dfrac{3}{4}$.

当 $y\neq 0$ 时，$x\in\mathbf{R}$. 故 $\Delta=(-4)^2-4y(y-3)\geqslant 0$，

解得 $-1\leqslant y\leqslant 4$，且 $y\neq 0$. 并且当 $x=-2$ 时，$y=-1$；

当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，$y=4$.

$\therefore$ 所求函数的值域为 $[-1, 4]$.

(3) 令 $\sqrt{1-2x}=t$，则 $t\geqslant 0$，且 $x=\dfrac{1-t^2}{2}$.

$\therefore y=x-\sqrt{1-2x}=\dfrac{1-t^2}{2}-t=-\dfrac{1}{2}(t+1)^2+1\leqslant\dfrac{1}{2}$ $(t\geqslant 0)$.

$\therefore$ 所求函数的值域为 $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$.

(4) 由 $y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$，得 $e^x=\dfrac{1+y}{1-y}$.

$\because e^x>0$，$\therefore\dfrac{1+y}{1-y}>0$，解得 $-1<y<1$.

$\therefore$ 所求函数的值域为 $(-1, 1)$.

评估测试

（一）基础巩固

1. 选择题.

(1) 函数 $y=\sqrt{x^2-1}-\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是（　　）.

A. $-1\leqslant x\leqslant 1$　　　B. $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1$

C. $0\leqslant x\leqslant 1$　　　D. $\{-1, 1\}$

(2) 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$，则函数 $f(x+a)+f(x-a)$ $\left(\text{其中 } 0<a<\dfrac{1}{2}\right)$ 的定义域是（　　）.

A. $\varnothing$　　　B. $[a, 1-a]$

C. $[-a, 1+a]$　　　D. $[0, 1]$

(3) 已知函数 $f(x)=\sqrt{mx^2+mx+1}$ 的定义域是一切实数，则 m 的取值范围是（　　）.

A. $0<m\leqslant 4$　　　B. $0\leqslant m\leqslant 1$

C. $m\geqslant 4$　　　D. $0\leqslant m\leqslant 4$

(4) 下列函数中，值域为 $(0, +\infty)$ 的是（　　）.

A. $y=3^{\frac{1}{2-x}}$　　　B. $y=(x+1)^{-\frac{2}{3}}$

C. $y=\sqrt{1-2^x}$　　　D. $[0, 1]$

2. 填空题.

(1) 函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ 的定义域为________.

(2) 函数 $y=\sqrt{x^2+x+1}$ 的定义域为______，值域为________.

(3) 函数 $y=x+\dfrac{1}{x-3}$ $(x>3)$ 的值域为________.

(4) 函数 $y=x^2(3-2x)$ $\left(0<x<\frac{3}{2}\right)$ 的值域为＿＿＿＿.

3. 简答题.

(1) 求函数 $y=|x+1|+|x-2|$ 的值域.

(2) 周长为 l 的铁丝被弯成下部为矩形，上部为半圆形的框架. 若矩形底边长为 $2x$，求此框架围成图形的面积 y 与 x 的函数式 $y=f(x)$，并写出它的定义域.

（二）能力提升

1. 设函数 $f(x)=x^2+x+\frac{1}{2}$ 的定义域为 $[n,\ n+1]$（n 为自然数），那么在 $f(x)$ 的值域中共有＿＿＿＿个整数.

2. 已知函数 $f(x)=\lg[(a^2-1)x^2+(a+1)x+1]$.

(1) 若 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,\ +\infty)$，求实数 a 的取值范围.

(2) 若 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,\ +\infty)$，求实数 a 的取值范围.

第四单元　函数的单调性

考点剖析

重点：理解函数的单调性.

难点：掌握判断一些简单函数的单调性的方法.

例题精选

例 1　已知 $f(x)=e^x+\frac{1}{e^x}$，证明 $f(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上为单调增函数.

证法 1：设 $0<x_1<x_2<+\infty$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=e^{x_1}+\frac{1}{e^{x_1}}-e^{x_2}-\frac{1}{e^{x_2}}=e^{x_1}-e^{x_2}+\frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{e^{x_1}e^{x_2}}$$

$$=(e^{x_1}-e^{x_2})\left(1-\frac{1}{e^{x_1}e^{x_2}}\right)=(e^{x_1}-e^{x_2})\frac{e^{x_1+x_2}-1}{e^{x_1+x_2}}.$$

由 $x_1>0$，$x_2>0$，$x_2>x_1$，$e>1$，得 $e^{x_1}-e^{x_2}<0$，$e^{x_1+x_2}-1>0$.

$\therefore f(x_1)-f(x_2)=(e^{x_1}-e^{x_2})\frac{e^{x_1+x_2}-1}{e^{x_1+x_2}}<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上为单调增函数.

证法 2：由 $f(x)=e^x+\frac{1}{e^x}=e^x+e^{-x}$，得 $f'(x)=e^x-e^{-x}$.

当 $x\in(0,\ +\infty)$ 时，得 $e^x>e^{-x}$，此时 $f'(x)=e^x-e^{-x}>0$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上为单调增函数.

例 2　已知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，$A(0,\ -1)$，$B(3,\ 1)$ 是其图象上的两个点，那么 $|f(x+1)|<1$ 的解集是＿＿＿＿.

解：$|f(x+1)|<1$，即 $-1<f(x+1)<1$，

$\therefore f(0)<f(x+1)<f(3)$.

$\because f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

$\therefore 0<x+1<3$.

$\therefore -1<x<2$.

$\therefore$ 正确答案是 $\{-1<x<2\}$.

例 3　设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$，其中 $a\geq1$，判断函数 $f(x)$ 在 $[0,\ +\infty)$ 上为单调性.

解：任取 $x_1,\ x_2\in[0,\ +\infty)$ 且 $x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}-a(x_1-x_2)$$

$$=\frac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a(x_1-x_2)$$

$$=(x_1-x_2)\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a\right).$$

$\because a\geq1$，而 $\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}<1$，

又 $\because x_1-x_2<0$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$.

$\therefore a\geq1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\ +\infty)$ 上为减函数.

例 4　设 $y=f(x)$ 是定义在区间 $(-1,\ 1)$ 上的减函数，且 $f(1-a)<f(a^2-1)$，求 a 的取值范围.

解：由题意可得 $-1<a^2-1<1-a<1$，

即 $\begin{cases}1-a<1,\\ a^2-1<1-a,\\ -1<a^2-1.\end{cases}$ 解得 $0<a<1$.

$\therefore a$ 的取值范围是 $0<a<1$.

评估测试

（一）基础巩固

1. 选择题.

(1) 下列函数中，在 $(-\infty,\ 0)$ 上是增函数的是（　　）.

A. $y=1-x^2$　　B. $y=x^2+2x$

C. $y=\frac{1}{1+x}$　　D. $y=\frac{x}{x-1}$

(2) 设 $f(x)$，$g(x)$ 都是单调函数，有如下命题：

①若 $f(x)$ 单调递增，$g(x)$ 单调递增，则 $f(x)-g(x)$ 单调递增；

②若 $f(x)$ 单调递增，$g(x)$ 单调递减，则 $f(x)-g(x)$ 单调递增；

③若 $f(x)$ 单调递减，$g(x)$ 单调递增，则 $f(x)-g(x)$ 单调递减；

④若 $f(x)$ 单调递减，$g(x)$ 单调递减，则 $f(x)-g(x)$ 单调递减.

其中正确的命题是（　　）.

A. ①③　　B. ①④　　C. ②③　　D. ②④

(3) 设 $f(x)>0$ 是定义在区间 I 上的减函数，则下列函数中：①$y=3-2f(x)$；②$y=1+\frac{2}{f(x)}$；③$y=[f(x)]^2$；④$y=1-\sqrt{f(x)}$. 其中增函数的个数是（　　）.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

(4) 已知函数 $y=\log_a(x^2+2x-3)$，当 $x=2$ 时，$y>0$，则此函数的单调递减区间是（　　）.

A. $(-\infty,\ -3)$　　B. $(1,\ +\infty)$

C. $(-\infty,\ -1)$　　D. $(-1,\ +\infty)$

2. 填空题.

(1) 函数 $f(x)=4x^2-mx+5$ 在区间 $[-2, +\infty)$ 上是增函数，则 $f(1)$ 的取值范围是________.

(2) 若函数 $y=ax$ 与 $y=-\frac{b}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上都是减函数，则函数 $y=ax^2+bx$ 在 $(0, +\infty)$ 上是单调递______函数.

(3) 已知点 $(-2, y_1)$, $\left(\frac{4}{3}, y_2\right)$, $\left(\frac{6}{5}, y_3\right)$ 在函数 $y=2x^2+8x+c$ 的图象上，则 y_1, y_2, y_3 从小到大依次为________.

(4) 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-6x+8)$ 的单调递增区间是________；单调递减区间是________.

3. 简答题.

(1) 求函数 $y=\frac{2}{x-1}$ 在区间 $[2, 6]$ 上的最大值和最小值.

(2) 讨论函数 $f(x)=\frac{ax}{x^2-1}$ 在 $x\in(-1, 1)$ 上的单调性.

(二) 能力提升

1. 若二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ 的图象关于 y 轴对称，且 $f(-2)>f(3)$，设 $m>-n>0$，试比较 $f(m)$ 和 $f(n)$ 的大小，并说明理由.

2. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且对 $m, n\in\mathbf{R}$，恒有 $f(m+n)=f(m)+f(n)-1$，且 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$. 当 $x>-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)>0$.

(1) 求证：$f(x)$ 是单调递增函数.

(2) 试举出具有这种性质的一个函数，并加以验证.

第五单元　函数的最大（小）值

考点剖析

重点：理解函数最大（小）值的概念；会求函数的最大（小）值.

难点：掌握求函数的最大（小）值的方法：配方法、判别式法、不等式法、换元法、数形结合法、函数单调性法、利用导数法等.

例题精选

例 1　函数 $f(x)=\frac{1}{1-x(1-x)}$ 的最大值是（　　）.

A. $\frac{4}{5}$　　B. $\frac{5}{4}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{3}$

解：$f(x)=\frac{1}{1-x(1-x)}=\frac{1}{x^2-x+1}=\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\leqslant\frac{4}{3}$，

所以正确答案是 D.

例 2　实数 x, y 满足 $x^2+y^2-2x+4y=0$，则 $x-2y$ 的最大值是（　　）.

A. $\sqrt{5}$　　B. $5+2\sqrt{5}$　　C. 9　　D. 10

解：将 $x^2+y^2-2x+4y=0$ 化为 $(x-1)^2+(y+2)^2=5$.

方法 1：设 $x-1=\sqrt{5}\cos\theta$, $y+2=\sqrt{5}\sin\theta$，则

$x-2y=\sqrt{5}\cos\theta+1-2\sqrt{5}\sin\theta+4=5\cos(\theta+\varphi)+5$,

故 $x-2y$ 的最大值为 10.

方法 2：设 $x-2y=P$，由于 x, y 满足 $x^2+y^2-2x+4y=0$，于是圆 $(x-1)^2+(y+2)^2=5$ 与直线 $x-2y-P=0$ 有交点.

则 $\frac{|1-2\times(-2)-P|}{\sqrt{5}}\leqslant\sqrt{5}$，解得 $0\leqslant P\leqslant 10$.

例 3　已知函数 $f(x)=\frac{x^2+2x+a}{x}$, $x\in[1, +\infty)$.

(1) 当 $a=\frac{1}{2}$ 时，求函数 $f(x)$ 的最小值.

(2) 若对任意 $x\in[1, +\infty)$, $f(x)>0$ 恒成立，试求实数 a 的取值范围.

解：(1) 当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=x+\frac{1}{2x}+2$.

$\because f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上为增函数，

$\therefore f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上的最小值为 $f(1)=\frac{7}{2}$.

(2) 在区间 $[1, +\infty)$ 上，$f(x)=\frac{x^2+2x+a}{x}>0$ 恒成立 $\Leftrightarrow x^2+2x+a>0$ 恒成立.

设 $y=x^2+2x+a$, $x\in[1, +\infty)$,

$\because y=x^2+2x+a=(x+1)^2+a-1$ 递增，

$\therefore$ 当 $x=1$ 时，$y_{\min}=3+a$,

当且仅当 $y_{\min}=3+a>0$ 时，函数 $f(x)>0$ 恒成立，故 $a>-3$.

例 4　设曲线 $y=e^{-x}(x\geqslant 0)$ 在点 $M(t, e^{-t})$ 处的切线 l 与 x 轴、y 轴所围成的三角形面积为 $S(t)$.

(1) 求切线 l 的方程.

(2) 求 $S(t)$ 的最大值.

解：(1) $\because f'(x)=(e^{-x})'=-e^{-x}$,

$\therefore$ 切线 l 的斜率为 $-e^{-t}$,

故切线 l 的方程为 $y-e^{-t}=-e^{-t}(x-t)$，即 $e^{-t}x+y-e^{-t}(t+1)=0$.

(2) 令 $y=0$，得 $x=t+1$. 又令 $x=0$，得 $y=e^{-t}(t+1)$.

$\therefore S(t)=\frac{1}{2}(t+1)\cdot e^{-t}(t+1)=\frac{1}{2}(t+1)^2e^{-t}$.

从而 $S'(t)=\frac{1}{2}e^{-t}(1-t)(1+t)$.

$\because$ 当 $t\in(0, 1)$ 时，$S'(t)>0$，当 $t\in(1, +\infty)$ 时，$S'(t)<0$,

$\therefore S(t)$ 的最大值为 $S(1)=\frac{2}{e}$.

评估测试

(一) 基础巩固

1. 选择题.

(1) 下列命题正确的是（　　）.

A. 函数 $y=-x-\frac{1}{x}$ 的最大值是 -2

B. 函数 $y=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}$ 的最小值是 2

C. 函数 $y=\sin^2x\cos x$ 的最大值是 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

D. 函数 $y=\sin^2x\cos x$ 的最大值是 $\frac{1}{2}$

(2) 若函数 $y=x^2-2x+1$ 在区间 $[a, a+2]$ 上的最大值为4，则 a 的值为（　　）.

A. 0或1　　B. 1或2

C. -1 或2　　D. 1或-1

(3) 已知 $3x^2+2y^2=6x$，则 $u=x^2+y^2-1$ 的最大值是（　　）.

A. $\frac{5}{2}$　　B. 3　　C. $\frac{7}{2}$　　D. 4

(4) 函数 $y=2x^3-3x^2-12x+5$ 在区间 $[0, 3]$ 的最大值和最小值分别是（　　）.

A. 5，-15　　B. 5，-4

C. -4，-15　　D. 5，-16

2. 填空题.

(1) 若 $x\geq 1$，则函数 $f(x)=4^x+\log_2 x+x^2$ 的值域为________.

(2) 已知坐标平面内两点 $A(x, \sqrt{2}-x)$ 和 $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$，那么这两点之间距离的最小值是________.

(3) 设 $x>0$，$y>0$ 且 $3x+2y=12$，则 xy 的最大值是________.

(4) 函数 $y=x^2-2x+3$ 在闭区间 $[0, m]$ 上有最大值3，最小值2，则 m 的取值范围是________.

3. 简答题.

(1) 有甲、乙两种商品，经营销售这两种商品所能获得的利润依次是 P 和 Q（万元），它们与投入资金 x（万元）的关系有经验公式：$P=\frac{1}{5}x$，$Q=\frac{3}{5}\sqrt{x}$. 今有3万元资金投入经营甲、乙两种商品，为获得最大利润，对甲、乙两种商品的资金投入分别应为多少？能获得的最大利润是多少？

(2) 已知 $2(\log_{\frac{1}{2}}x)^2+7\log_{\frac{1}{2}}x+3\leq 0$，求函数 $y=\left(\log_2\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\log_2\frac{x}{4}\right)$ 的最大值和最小值.

(二) 能力提升

1. 某租赁公司拥有汽车100辆，当每辆车的月租金为3000元时，可全部租出；当每辆车的月租金每增加50元时，未租出的车将会增加一辆. 租出的车每辆每月需维护费150元，未租出的车每辆每月需要维护费50元.

(1) 当每辆车的月租金定为3600元时，能租出多少辆车？

(2) 当每辆车的月租金定为多少元时，租赁公司的月收益最大？最大月收益是多少？

2. 已知函数 $f(x)=x^2e^{ax}$，其中 $a\leq 0$，e为自然对数的底数.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值.

第六单元　函数的奇偶性

考点剖析

重点：理解函数的奇偶性概念.

难点：掌握判断一些简单函数的奇偶性的方法.

例题精选

例1 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=(x+1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

(2) $f(x)=\frac{\lg(1-x^2)}{|x^2-2|-2}$.

解：(1) 由 $\frac{1-x}{1+x}\geq 0$，可得定义域 $(-1, 1]$，关于原点不对称，故 $f(x)$ 是非奇非偶函数.

(2) 由 $\begin{cases}1-x^2>0,\\ |x^2-2|-2\neq 0,\end{cases}$ 可得定义域 $(-1, 0)\cup(0,1)$.

这时 $f(x)=\frac{\lg(1-x^2)}{-(x^2-2)-2}=\frac{\lg(1-x^2)}{x^2}$.

$\because f(-x)=\frac{\lg[1-(-x)^2]}{(-x)^2}=\frac{\lg(1-x^2)}{x^2}=f(x)$，

$\therefore f(x)$ 是偶函数.

例2 已知定义域为 $(-1, 1)$ 的奇函数，$y=f(x)$ 又是减函数，且 $f(a-3)+f(9-a^2)<0$，则 a 的取值范围是（　　）.

A. $(2\sqrt{2}, 3)$　　B. $(3, \sqrt{10})$

C. $(2\sqrt{2}, 4)$　　D. $(-2, 3)$

解：$\because f(x)$ 是定义在 $(-1, 1)$ 上的奇函数又是减函数，且 $f(a-3)+f(9-a^2)<0$，

$\therefore f(a-3)<f(a^2-9)$.

$\therefore \begin{cases}-1<a-3<-1,\\ -1<a^2-9<1,\\ a-3>a^2-9.\end{cases}$ $\therefore a\in(2\sqrt{2}, 3)$.

$\therefore$ 正确的答案是A.

例3 已知 $f(x)=x\left(\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}\right)$.

(1) 判断 $f(x)$ 函数的奇偶性.

(2) 求证：$f(x)>0$.

解：(1) 由 $2^x-1\neq 0$，得 $x\neq 0$，$\therefore f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$.

又 $f(-x)=-x\left(\frac{1}{2^{-x}-1}+\frac{1}{2}\right)=-x\left(\frac{2^x}{1-2^x}+\frac{1}{2}\right)$

$=-x\cdot\frac{2^x+1}{2(1-2^x)}=x\left(\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}\right)=f(x)$，

$\therefore f(x)$ 是偶函数.

(2) 当 $x>0$ 时，$\frac{1}{2^x-1}>0$，

$\therefore f(x)=x\left(\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}\right)>0$；

当 $x<0$ 时，$-x>0$，于是 $f(-x)>0$，由 $f(x)$ 是偶函数，有 $f(x)=f(-x)>0$.

综合可得 $f(x)>0$.

例 4　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 **R**，对任意的实数 x，y 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，当 $x>0$ 时，$f(x)<0$，且 $f(2)=-1$.

（1）求证：$f(x)$ 是奇函数.

（2）求 $f(x)$ 在区间 $[-6, 6]$ 上的最大值和最小值.

（1）证明：在 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 中，令 $x=y=0$，得 $f(0)=f(0)+f(0)$，所以 $f(0)=0$.

令 $y=-x$，得 $0=f(0)=f(x)+f(-x)$，于是 $f(-x)=-f(x)$.

又 $y=f(x)$ 的定义域为 **R**，所以 $f(x)$ 是奇函数.

（2）解：设 $-6\leqslant x_1<x_2\leqslant 6$，在 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 中，令 $x_1<x_2$，$y=-x_1$，则

$f(x_2-x_1)=f(x_2)+f(-x_1)=f(x_2)-f(x_1)$.

由 $x_1<x_2$，$x_2-x_1>0$，于是 $f(x_2-x_1)<0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，

此时 $f(x)$ 在区间 $[-6, 6]$ 上为减函数.

又 $f(6)=f(4+2)=f(4)+f(2)=f(2)+f(2)+f(2)=3f(2)=-3$，

$\therefore f(-6)=-f(6)=3$.

$\therefore f(x)$ 在区间 $[-6, 6]$ 上的最大值为 $f(-6)=3$，最小值为 $f(6)=-3$.

评估测试

（一）基础巩固

1. 选择题.

（1）下列判断正确的是（　　）.

A. $f(x)=\frac{x^2-2x}{x-2}$ 是奇函数

B. $f(x)=(1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 是偶函数

C. $f(x)=\lg(x+\sqrt{x^2-1})$ 是非奇非偶函数

D. $f(x)=1$ 既是奇函数又是偶函数

（2）设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数，$f(x+2)=-f(x)$，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x$，则 $f(7.5)=$（　　）.

A. 0.5　　B. -0.5　　C. 1.5　　D. -1.5

（3）已知 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，当 $x<0$ 时，$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$，那么 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 的值是（　　）.

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $-\sqrt{3}$

（4）$f(x)$ 是定义在 **R** 上的以 3 为周期的偶函数，且 $f(2)=0$，则方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0, 6)$ 内解的个数的最小值是（　　）.

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

2. 填空题.

（1）设 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\frac{2}{2^x-1}-a$ 是奇函数，则 $a=$______.

（2）已知 $f(x)=ax^2+bx+3a+b$ 是定义在区间 $[a-1, 2a]$ 上的偶函数，则 $a=$______，$b=$______.

（3）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义，下列函数中：①$y=-|f(x)|$；②$y=xf(x^2)$；③$y=-f(-x)$；④$y=f(x)-f(-x)$. 必为奇函数的有________（填序号）.

（4）设奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-5, 5]$. 若当 $x\in[0, 5]$ 时，$f(x)$ 的图象如图 1-4 所示，则不等式 $f(x)<0$ 的解是________.

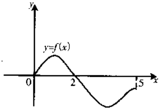


图 1-4

3. 简答题.

（1）设 $a\in\mathbf{R}$，讨论函数 $f(x)=x|x-a|$ 的奇偶性.

（2）已知函数 $y=f(x)=\frac{ax^2+1}{bx+c}$（$a$，$b$，$c\in\mathbf{R}$，$a>0$，$b>0$）是奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)$ 有最小值 2，其中 $b\in\mathbf{N}$，且 $f(1)<\frac{5}{2}$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）问函数 $f(x)$ 图象上是否存在关于点 $(1, 0)$ 对称的两点？若存在，求出点的坐标；若不存在，说明理由.

（二）能力提升

1. 已知 $f(x)$ 是偶函数而且在 $(0, +\infty)$ 上是减函数，判断 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上的增减性并加以证明.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上满足 $f(2-x)=f(2+x)$，$f(7-x)=f(7+x)$，且在闭区间 $[0, 7]$ 上，只有 $f(1)=f(3)=0$.

（1）试判断函数 $y=f(x)$ 的奇偶性.

（2）试求方程 $f(x)=0$ 在闭区间 $[-2005, 2005]$ 上的根的个数，并证明你的结论.

第七单元　二次函数

考点剖析

重点：熟练掌握二次函数的性质，并能灵活运用这些性质去解决问题.

难点：求二次函数的解析式，就是确定函数式 $f(x)=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）中 a，b，c 的值. 二次函数也可以表示为 $y=a(x-h)^2+k$ 或 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$（$b^2-4ac\geqslant 0$）等形式，应根据题设条件选用适当的表示形式，用待定系数法确定相应字母的值.

例题精选

例 1　二次函数 $y=ax^2+bx+c(x\in\mathbf{R})$ 的部分对应值如下表：

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

则不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是____________.

解：由表可知 $y=a(x+2)(x-3)$，又 $x=0$，$y=-6$，代入可知 $a=1$. $\therefore y=(x+2)(x-3)$.

$\therefore$ 正确答案是 $\{x|x>3$ 或 $x<-2\}$.

例 2　设 x，y 是关于 m 的方程 $m^2-2am+a+6=0$ 的两个实根，则 $(x-1)^2+(y-1)^2$ 的最小值是（　　）.

A. $-12\frac{1}{4}$　　B. 18　　C. 8　　D. $\frac{3}{4}$

解：由 $\Delta=(-2a)^2-4(a+6)\geqslant 0$，得 $a\leqslant -2$ 或 $a\geqslant 3$.

于是有 $(x-1)^2+(y-1)^2=x^2+y^2-2(x+y)+2=(x+y)^2-2xy-2(x+y)+2=(2a)^2-2(a+6)-4a+2=4a^2-6a-10=4\left(a-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{49}{4}$.

由此可知，当 $a=3$ 时，$(x-1)^2+(y-1)^2$ 取最小值 8. 所以正确答案是 C.

例 3　若函数 $y=x^2+(a+2)x+3$，$x\in[a,\ b]$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，则 b=_______.

解法 1：二次函数 $y=x^2+(a+2)x+3$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，说明二次函数的对称轴为 1，即 $-\frac{a+2}{2}=1$. $\therefore a=-4$. 而 $f(x)$ 是定义在 $[a,\ b]$ 上的，即 a，b 关于 $x=1$ 也是对称的，$\therefore \frac{a+b}{2}=1$. $\therefore b=6$.

解法 2：$\because$ 二次函数 $y=x^2+(a+2)x+3$ 的对称轴为 $x=1$，$\therefore f(x)$ 可表示为 $f(x)=(x-1)^2+c$，与原二次函数的表达式比较对应项系数，可得 $a+2=-2$. $\therefore a=-4$. b 的计算同解法 1.

解法 3：$\because$ 二次函数的对称轴为 $x=1$，$\therefore$ 有 $f(x)=f(2-x)$.

比较对应项系数，$\therefore a=-4$. b 的计算同解法 1.

$\therefore$ 正确答案是 6.

例 4　若 $a^{2x}+\frac{1}{2}\cdot a^x-\frac{1}{2}\leqslant 0$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$，求 $y=2a^{2x}-3a^x+4$ 的值域.

解：由 $a^{2x}+\frac{1}{2}\cdot a^x-\frac{1}{2}\leqslant 0$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 可知 $0<a^x\leqslant\frac{1}{2}$.

令 $a^x=t$，则 $0<t\leqslant\frac{1}{2}$，$y=2t^2-3t+4$. 借助二次函数图象可知 $y\in[3,\ 4)$.

评估测试

（一）基础巩固

1. 选择题.

（1）已知偶函数 $f(x)=ax^2+3a-b$ 的定义域为 $[a-1,\ 2a]$，则 a 的值是（　　）.

A. $\frac{1}{3}$　　B. 1　　C. $b-1$　　D. 0

（2）若函数 $f(x)=x^2+|x+b|+c$ 在区间 $[0,\ +\infty)$ 上是增函数，则 b 的取值范围是（　　）.

A. $[0,\ +\infty)$　　B. $(-\infty,\ 0)$

C. $(0,\ +\infty)$　　D. $(-\infty,\ 0]$

（3）函数 $y=x^2-1(x\leqslant 0)$ 的反函数是（　　）.

A. $y=\sqrt{x+1}$ $(x\geqslant -1)$

B. $y=-\sqrt{x+1}$ $(x\geqslant -1)$

C. $y=\sqrt{x+1}$ $(x\geqslant 0)$

D. $y=-\sqrt{x+1}$ $(x\geqslant 0)$

（4）如图 1-5 所示，P 是球 O 的直径 AB 上的动点，$PA=x$，过 P 点与 AB 垂直的截面面积为 y，则 $y=f(x)$ 的大致图象是（　　）.

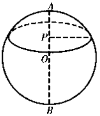
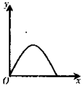
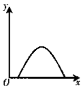


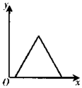
图 1-5



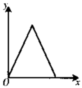
A.



B.



C.



D.

2. 填空题.

（1）函数 $y=-\sqrt{-x^2+6x-5}$ $(1\leqslant x\leqslant 4)$ 的值域是____________.

（2）把函数 $y=2x^2-2x$ 的图象向右平移 2 个单位，再向下平移 3 个单位，所得图象的函数解析式是____________.

（3）若 $f(x)=(m-1)x^2+mx+3$ $(x\in\mathbf{R})$ 是偶函数，则 $f(x)$ 的单调递增区间为__________.

（4）在函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 中，若 a，b，c 成等比数列，且 $f(0)=-4$，则 $f(x)$ 有最______（填“大”或“小”）值，且该值为______.

3. 简答题.

（1）实数 a，b，c 满足 $a\neq 0$，$a+b+2c=0$，试证明二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相异实根，且其中至少有一个正根.

（2）已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a,\ b,\ c\in\mathbf{R})$ 满足 $f(1)=1$，且 $f(-1)=0$，对于任何实数 x，都有 $f(x)\geqslant x$.

（Ⅰ）求证：$a>0$，$c>0$；

（Ⅱ）设函数 $g(x)=f(x)-mx$ $(x\in\mathbf{R})$，若函数 $g(x)$ 在区间 $[-1,\ 1]$ 上是单调函数，求 m 的取值范围.

（二）能力提升

1. 一家星级旅馆有 150 个标准房，经过一段时间的经营，经理得到一些定价和住房率的数据如下表：

房价/元	住房率/%
160	55
140	65
120	75
100	85

欲使每天的营业额最高，应如何定房价？

2. 已知二次函数 $f(x)$ 的二次项系数为 a，且不等式 $f(x)>-2x$ 的解集为（1，3）.

（1）若方程 $f(x)+6a=0$ 有两个相等的根，求 $f(x)$ 的解析式.

（2）若 $f(x)$ 的最大值为正数，求 a 的取值范围.

第八单元　幂函数、指数函数与对数函数

考点剖析

重点与难点：指数函数的图象和性质的应用及对数函数图象和性质的运用.

对可化为 $a^{2x}+b\cdot a^x+c=0$ 或 $a^{2x}+b\cdot a^x+c\geqslant 0(\leqslant 0)$ 的指数方程或不等式，常借助换元法解决，但应注意换元后"新元"的范围.

由于在对数式中真数必须大于 0，底数必须大于 0 且不等于 1.

例题精选

例 1　已知幂函数 $f(x)$ 的图象经过点（8，2），那么 $f^{-1}(-8)=($　　$)$.

A. -2　　B. 64

C. 512　　D. -512

解：根据反函数定义，有 $f^{-1}(2)=8=2^3$，易知 $f^{-1}(-8)=-8^3$，所以正确答案是 D.

例 2　函数 $y=-e^x$ 的图象（　　）.

A. 与 $y=e^x$ 的图象关于 y 轴对称

B. 与 $y=e^x$ 的图象关于坐标原点对称

C. 与 $y=e^{-x}$ 的图象关于 y 轴对称

D. 与 $y=e^{-x}$ 的图象关于坐标原点对称

解：用图象法可知正确答案是 D.

例 3　图 1-6 是指数函数①$y=a^x$；②$y=b^x$；③$y=c^x$；④$y=d^x$ 的图象，则 a，b，c，d 与 1 的大小关系是（　　）.

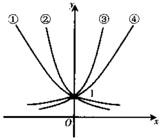


图 1-6

A. $a<b<1<c<d$　　B. $b<a<1<d<c$

C. $1<a<b<c<d$　　D. $a<b<1<d<c$

解：可先分两类，即③、④的底数一定大于 1，①、②的底数小于 1，然后再从③、④中比较 c、d 的大小，从①、②中比较 a、b 的大小.

解法 1：当指数函数底数大于 1 时，图象上升，且当底数越大，图象向上越靠近于 y 轴；当底数大于 0 小于 1 时，图象下降，底数越小，图象向右越靠近于 x 轴. $\therefore b<a<1<d<c$.

解法 2：令 $x=1$，由图知 $c^1>d^1>a^1>b^1$，

$\therefore b<a<1<d<c$.

$\therefore$ 正确答案是 B.

例 4　已知 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}[3-(x-1)^2]$，求 $f(x)$ 的值域及单调区间.

解：$\because$ 真数 $3-(x-1)^2\leqslant 3$，

$\therefore \log_{\frac{1}{3}}[3-(x-1)^2]\geqslant \log_{\frac{1}{3}}3=-1$，即 $f(x)$ 的值域是 $[-1,+\infty)$.

又 $3-(x-1)^2>0$，得 $1-\sqrt{3}<x<1+\sqrt{3}$，

$\therefore$ 当 $x\in(1-\sqrt{3},1]$ 时，$3-(x-1)^2$ 单调递增，从而 $f(x)$ 单调递减；当 $x\in[1,1+\sqrt{3})$ 时，$f(x)$ 单调递增.

评估测试

（一）基础巩固

1. 选择题.

（1）若幂函数 $y=x^{m^2-m-1}$（$m\in\mathbf{Z}$）为奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，则 $m=($　　$)$.

A. 2　　B. 1　　C. 0　　D. 0 或 1

（2）函数 $y=\lg\left(\dfrac{2}{1-x}-1\right)$ 的图象关于（　　）.

A. x 轴对称　　B. y 轴对称

C. 原点对称　　D. 直线 $y=x$ 对称

（3）函数 $y=2^{1-x}+3$（$x\in\mathbf{R}$）的反函数的解析表达式为（　　）.

A. $y=\log_2\dfrac{2}{x-3}$　　B. $y=\log_2\dfrac{x-3}{2}$

C. $y=\log_2\dfrac{3-x}{2}$　　D. $y=\log_2\dfrac{2}{3-x}$

(4) 已知命题 p：函数 $y=\log_{0.5}(x^2+2x+a)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，命题 q：函数 $y=-(5-2a)^x$ 是减函数. 若 p 或 q 为真命题，p 且 q 为假命题，则实数 a 的取值范围是（　　）.

A. $a\leqslant 1$

B. $a<2$

C. $1<a<2$

D. $a\leqslant 1$ 或 $a\geqslant 2$

2. 填空题.

(1) 设 $f(x)=(m-1)x^{m^2-2}$，如果 $f(x)$ 是正比例函数，则 $m=$________. 如果 $f(x)$ 是反比例函数，则 $m=$________.

(2) 如图 1-7 所示，曲线是幂函数 $y=x^a$ 在第一象限内的图象，已知 a 分别取 -1，1，$\frac{1}{2}$，2 四个值，则相应的图象依次为________.

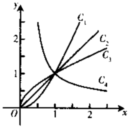


图 1-7

(3) 函数 $f(x)=1+2^x+4^x\cdot k$ 在 $(-\infty, 1]$ 上的图象总在 x 轴的上方，则实数 k 的取值范围是________.

(4) 已知函数 $f(x)$ 的图象与 $g(x)=2^x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，令 $h(x)=f(1-|x|)$，则关于函数 $h(x)$ 有下列命题：

①$h(x)$ 的图象关于原点 $(0, 0)$ 对称；②$h(x)$ 的图象关于 y 轴对称；③$h(x)$ 的最小值为 0；④$h(x)$ 在区间 $(-1, 0)$ 上单调递增.

其中正确的命题是________.

3. 简答题.

(1) 设 $a\in\mathbf{R}$，$f(x)$ 为奇函数，且 $f(2x)=\dfrac{a\cdot 4^x+a-2}{4^x+1}$. 求：

(Ⅰ) 函数 $f(x)$ 的解析式；

(Ⅱ) $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 及其定义域.

(2) 若函数 $f(x)=x^2-x+b$，且 $f(\log_2 a)=b$，$\log_2[f(a)]=2(a\neq 1)$.

(Ⅰ) 求 $f(\log_2 x)$ 的最小值及对应的 x 值；

(Ⅱ) 当 x 取何值时，$f(\log_2 x)>f(1)$ 且 $\log_2[f(x)]<f(1)$.

(二) 能力提升

1. 某工厂 1 月、2 月、3 月生产某产品分别为 1 万件、1.2 万件、1.3 万件，为了估计以后每月的产量，以这三个月为依据，用一个函数模拟产品的月产量 y 与月份 x 的关系，模拟函数可以选用二次函数或函数 $y=a\cdot b^x+c$（a，b，c 为常数）. 已知 4 月份该产品的产量为 1.37 万件，请问用以上哪个函数作为模拟函数较好？说明理由.

2. 设函数 $f(x)=x\log_2 x+(1-x)\log_2(1-x)$（$0<x<1$），求 $f(x)$ 的最小值.

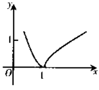
第九单元　函数的图象

考点剖析

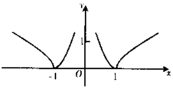
重点与难点：掌握描绘函数图象的两种基本方法——描点法和图象变换法；会利用函数图象，进一步研究函数的性质，解决方程、不等式中的问题；用数形结合的思想、分类讨论的思想和转化变换的思想分析解决数学问题；掌握知识之间的联系，进一步培养观察、分析、归纳、概括和综合分析能力.

例题精选

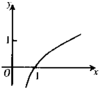
例 1　函数 $f(x)=|\log_2 x|$ 的图象是（　　）.



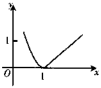
A.



B.



C.



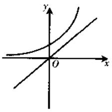
D.

解：$f(x)=\begin{cases}\log_2 x, & x\geqslant 1,\\ -\log_2 x, & 0<x<1.\end{cases}$ ∴ 正确答案是 A.

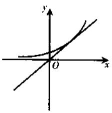
例 2　若直线 $y=2a$ 与函数 $y=|a^x-1|$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）的图象有两个公共点，则 a 的取值范围是________.

解：（数形结合）由图象可知 $0<2a<1$，$0<a<\frac{1}{2}$. ∴ 正确答案是 $0<a<\frac{1}{2}$.

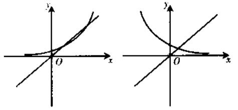
例 3　函数 $y=2^{\frac{x}{3}}$ 的图象与直线 $y=x$ 的位置关系是（　　）.



A.



B.



C.　　　　D.

解：$y=2^{\frac{x}{3}}=(\sqrt[3]{2})^x$，$\because \sqrt[3]{2}>1$，$\therefore$ 不可能选 D.

又 $\because$ 当 $x=1$ 时，$2^{\frac{x}{3}}>x$，而当 $x=3$ 时，$2^{\frac{x}{3}}<x$，$\therefore$ 不可能选 A、B. $\therefore$ 正确答案是 C.

例 4　作出下列函数的图象.

（1）$y=|x-2|(x+1)$.

（2）$y=10^{|\lg x|}$.

分析：显然直接用已知函数的解析式列表描点会有些困难，除去对其函数性质分析外，我们还应想到对已知解析式进行等价变形.

解：（1）当 $x\geqslant 2$，即 $x-2\geqslant 0$ 时，

$y=(x-2)(x+1)=x^2-x-2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$；

当 $x<2$，即 $x-2<0$ 时，

$y=-(x-2)(x+1)=-x^2+x+2=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$.

$$\therefore y=\begin{cases}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4} & (x\geqslant 2),\\ -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4} & (x<2).\end{cases}$$

这是分段函数，每段函数图象可根据二次函数图象作出，如图 1-8 所示.

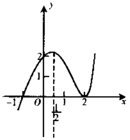


图 1-8

（2）当 $x\geqslant 1$ 时，$\lg x\geqslant 0$，$y=10^{|\lg x|}=10^{\lg x}=x$；

当 $0<x<1$ 时，$\lg x<0$，$y=10^{|\lg x|}=10^{-\lg x}=10^{\lg\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$.

$$\therefore y=\begin{cases}x & (x\geqslant 1),\\ \frac{1}{x} & (0<x<1).\end{cases}$$

这是分段函数，每段函数可根据正比例函数或反比例函数作出，如图 1-9 所示.

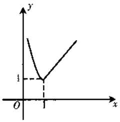


图 1-9

说明：作不熟悉的函数图象，可以变形成基本函数再作图，但要注意变形过程是否等价，还要特别注意 x，y 的变化范围. 因此必须熟记基本函数的图象，如一次函数、反比例函数、二次函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数的图象.

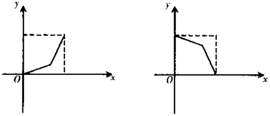
在变换函数解析式中，可运用转化变换和分类讨论的思想.

评估测试

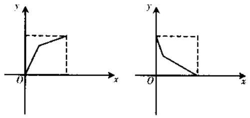
（一）基础巩固

1. 选择题.

（1）某学生离家去学校，一开始跑步前进，跑累了再走余下的路程. 下列图中的纵轴表示离校的距离，横轴表示出发后的时间，则较符合该学生走法的图象是（　　）.



A.　　　　B.



C.　　　　D.

（2）已知函数 $f(x)$ 及函数 $g(x)$ 的图象分别如图 1-10、图 1-11 所示，则函数 $y=f(x)\cdot g(x)$ 的图象大致是（　　）.

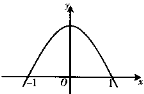


图 1-10

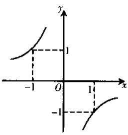
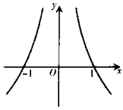
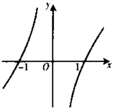


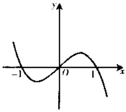
图 1-11



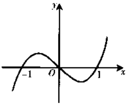
A.



B.



C.



D.

(3) 将奇函数 $y=f(x)$ 的图象沿 x 轴的正方向平移 2 个单位，所得的图象为 C，又设图象 C' 与 C 关于原点对称，则图象 C' 对应的函数为（　　）.

A. $y=-f(x-2)$　　B. $y=f(x-2)$

C. $y=-f(x+2)$　　D. $y=f(x+2)$

(4) 在同一平面直角坐标系中，函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称. 现将 $y=g(x)$ 的图象沿 x 轴向左平移 2 个单位，再沿 y 轴向上平移 1 个单位，所得的图象是由两条线段组成的折线，如图 1-12 所示，则函数 $f(x)$ 的表达式为（　　）.

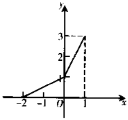


图 1-12

A. $f(x)=\begin{cases}2x+2 & (-1\leqslant x\leqslant 0),\\ \dfrac{x}{2}+2 & (0<x\leqslant 2)\end{cases}$

B. $f(x)=\begin{cases}2x-2 & (-1\leqslant x\leqslant 0),\\ \dfrac{x}{2}-2 & (0<x\leqslant 2)\end{cases}$

C. $f(x)=\begin{cases}2x-2 & (1\leqslant x\leqslant 2),\\ \dfrac{x}{2}+1 & (2<x\leqslant 4)\end{cases}$

D. $f(x)=\begin{cases}2x-6 & (1\leqslant x\leqslant 2),\\ \dfrac{x}{2}-3 & (2<x\leqslant 4)\end{cases}$

2. 填空题.

(1) 曲线 $y=x^2-3x$ 关于 x 轴的对称图形所对应的函数是 ________.

(2) 把函数 $y=f(x)$ 的图象向左、向下分别平移 2 个单位，得到函数 $y=2^x$ 的图象，则 $f(x)=$ ________.

(3) 函数 $y=f(x)$ 的图象与 $y=\log_{\frac{1}{2}}(1-x)(x<1)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，则函数 $f(x)=$ ________.

(4) 设函数 $f(x)$ 的图象关于点 (1, 2) 对称，且存在反函数 $f^{-1}(x)$，$f(4)=0$，则 $f^{-1}(4)=$ ________.

3. 简答题.

(1) 已知函数 $f(x)=-2-x^2$，$g(x)=x$，若 $f(x)\cdot g(x)=\min\{f(x), g(x)\}$，那么 $f(x)\cdot g(x)$ 的最大值是多少？（min 表示最小值）

(2) 已知 $f(x)$ 是一次函数，对任意实数 x 有 $f[f(x)]=4x-3$，且 $f(2)=3$.

(Ⅰ) 求 $f(x)$；

(Ⅱ) 设 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，为了得到函数 $y=\dfrac{4x+3}{x+1}$ 的图象，可以将函数 $y=g(x)$ 的图象如何变换？

(二) 能力提升

1. 已知定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称，且当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-2x+2$，求函数 $f(x)$ 的解析式，并指出它的单调区间.

2. 已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象关于原点对称，且 $f(x)=x^2+2x$. 求函数 $g(x)$ 的解析式.

第十单元　导数的概念及其运算

考点解析

重点与难点：了解导数概念在某些实际问题中产生的背景，掌握函数在某一点处的导数的定义及其几何意义，理解导函数概念；熟记基本导数公式，掌握两个函数的和、差、积、商的求导法则和复合函数的求导法则，会求某些简单函数的导数.

例题精选

例 1　设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$（　　）.

A. $f'(x_0)$　　B. $-f'(x_0)$

C. $f'(-x_0)$　　D. 不一定存在

解：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}=-f'(x_0)$，所以正确答案是 B.

例 2　求下列函数的导数.

(1) $y=\log_2(2x^2+3x+1)$.

(2) $y=\ln\sqrt{x^2+1}$.

(3) $y=e^{\sin(ax+b)}$.

分析：对于比较复杂的函数求导，除了利用指数、对数函数的求导公式外，还需要考虑应用复合函数的求导法则来进行. 在求导过程中，可以先适当进行变形化简，将

对数函数的真数位置转化为有理函数的形式后再求导数.

解：(1) 可看成由 $y=\log_2 u$，$u=2x^2+3x+1$ 复合而成，$y'=\frac{(4x+3)\log_2 e}{2x^2+3x+1}$.

(2) 先将原函数化简为 $y=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$ 后，再使用复合函数的求导法则求导数，其结果为 $y'=\frac{x}{x^2+1}$.

(3) 可看成由 $y=e^v$，$u=\sin v$，$v=ax+b$ 复合而成，$y'=a\cos(ax+b)\cdot e^{\sin(ax+b)}$.

例 3　已知函数 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 的图象过点 $P(0,\ 2)$，且在点 $M(-1,\ f(-1))$ 处的切线方程为 $6x-y+7=0$，求函数 $y=f(x)$ 的解析式.

解：$\because f(x)$ 的图象经过 $P(0,\ 2)$，$\therefore d=2$，$\therefore f(x)=x^3+bx^2+cx+2$，$f'(x)=3x^2+2bx+c$.

$\because$ 在 $M(-1,\ f(-1))$ 处的切线方程是 $6x-y+7=0$，

$\therefore -6-f(-1)+7=0$，即 $f(-1)=1$，$f'(-1)=6$.

$\therefore \begin{cases}3-2b+c=6,\\-1+b-c+2=1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2b-c=3,\\b-c=0,\end{cases}$ 解得 $b=c=-3$.

故所求的解析式是 $f(x)=x^3-3x^2-3x+2$.

例 4　如果圆的半径以 2 cm/s 的等速度增加，求圆半径 $R=10$ cm 时，圆面积增加的速度.

解：$\because S=\pi R^2$，$R=f(t)$，$f'(t)=2$，

$\therefore S_t'=S_R'\cdot R_t'=2\pi R\cdot 2=4\pi R$，

$\therefore$ 当 $R=10$ cm 时，$S_t'=40\pi\ \text{cm}^2/\text{s}$.

$\therefore$ 圆面积的增加速度为 $40\pi\ \text{cm}^2/\text{s}$.

评估测试

(一) 基础巩固

1. 选择题.

(1) 函数 $y=2x^3+\sqrt[3]{x}+\cos x$，则 $y'=($　　$)$.

A. $6x^2+\sqrt[3]{x^2}-\sin x$　　B. $2x^2+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\sin x$

C. $6x^2+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\sin x$　　D. $6x^2+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\sin x$

(2) 对任意 x，有 $f'(x)=4x^3$，$f(1)=-1$，则此函数为(　　).

A. $f(x)=x^4$　　B. $f(x)=x^4-2$

C. $f(x)=x^4+1$　　D. $f(x)=x^4+2$

(3) 若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{3\Delta x}=1$，则 $f'(x_0)=($　　$)$.

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. 3　　D. 2

(4) 函数 $y=ax^2+1$ 的图象与直线 $y=x$ 相切，则 a 的值是(　　).

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

2. 填空题.

(1) 垂直于直线 $2x-6y+1=0$，且与曲线 $y=x^3+3x^2-5$ 相切的直线方程是________.

(2) 质点运动方程是 $s=t^2(1+\sin t)$，则当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时，瞬时速度为________.

(3) 曲线 $y=\frac{1}{3}x^3-2$ 在点 $\left(-1,\ -\frac{7}{3}\right)$ 处切线的倾斜角的大小为________.

(4) 曲线 $y=x^3$ 在点 (1, 1) 处的切线与 x 轴、直线 $x=2$ 所围成的三角形的面积为________.

3. 简答题.

(1) 求下列函数的导数.

(Ⅰ) $y=\sin^3 x+\sin x^3$;

(Ⅱ) $y=(\sin 5x-\cos 5x)^5$;

(Ⅲ) $y=\sqrt[3]{(x^3+2x^2+3)^2}$;

(Ⅳ) $y=\frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}$.

(2) 已知抛物线 $y=x^2+bx+c$ 在点 (1, 2) 处的切线与直线 $y=x-2$ 平行，求 b，c 的值.

(二) 能力提升

1. 偶函数 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 的图象过点 $P(0,\ 1)$，且在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=x-2$，求 $y=f(x)$ 的解析式.

2. 已知函数 $y=xf'(x)$ 的图象如图 1-13 所示，其中 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数，下列图象中，属于 $y=f(x)$ 的图象的是(　　).

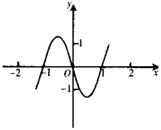
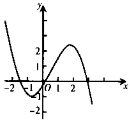
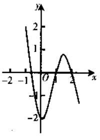


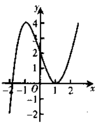
图 1-13



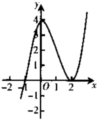
A.



B.



C.



D.

第十一单元　导数在研究函数中的应用

考点剖析

重点与难点：了解可导函数的单调性与其导数的关系；了解可导函数在某点取得极值的必要条件和充分条件（导数要极值点两侧异号）；会求一些实际问题（一般指单峰函数）的最大值和最小值.

例题精选

例 1　设$f'(x)$是函数$f(x)$的导函数，$y=f'(x)$的图象如图 1–14 所示，则$y=f(x)$的图象最有可能的是（　　）.

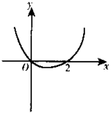
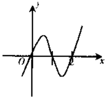
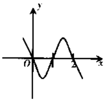


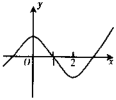
图 1–14



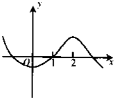
A.



B.



C.



D.

解：根据图 1–14 可知，$f(x)$ 在 $x=0$，$x=2$ 处取得极值，在区间 $(-\infty,0)$ 上，$f'(x)>0$，$f(x)$是增函数；在区间 $(0,2)$ 上，$f'(x)<0$，$f(x)$ 是减函数；在区间 $(2,\infty)$ 上，$f'(x)>0$，$f(x)$ 是增函数. ∴正确答案是 C.

例 2　函数$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，过曲线$y=f(x)$上的点$P(1,f(1))$的切线方程为$y=3x+1$.

(1) 若$y=f(x)$在$x=-2$时有极值，求$f(x)$的表达式.

(2) 在 (1) 的条件下，求$y=f(x)$在$[-3,1]$上的最大值.

(3) 若函数$y=f(x)$在区间$[-2,1]$上单调递增，求b的取值范围.

解：(1) 由$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$求导数，得$f'(x)=3x^2+2ax+b$.

过$y=f(x)$上点$P(1,f(1))$的切线方程为$y-f(1)=f'(1)(x-1)$，

即$y-(a+b+c+1)=(3+2a+b)(x-1)$.

而过$y=f(x)$上，$P(1,f(1))$的切线方程为$y=3x+1$.

$$\therefore\begin{cases}3+2a+b=3,\\ a+b+c+1-3-2a-b=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}2a+b=0, & ①\\ c-a=3. & ②\end{cases}$$

∵ $y=f(x)$在$x=-2$时有极值，故$f'(-2)=0$，

∴ $-4a+b=-12$.　　③

由①、②、③式联立解得，$a=2$，$b=-4$，$c=4$，∴$f(x)=x^3+2x^2-4x+4$.

(2) $f'(x)=3x^2+2ax+b=3x^2+4x-4=(3x-2)(x+2)$，在$[-3,1]$上：

x	$[-3,-2)$	-2	$\left(-2,\frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3},1\right]$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大	↘	极小	↗

$f(x)_{极大}=f(-2)=(-2)^3+2(-2)^2-4(-2)+4=12$，

$f(1)=1^3+2\times1-4\times1+4=3$，∴$f(x)$在$[-3,1]$上的最大值为 12.

(3) ∵ $y=f(x)$在区间$[-2,1]$上单调递增，又$f'(x)=3x^2+2ax+b$，

由 (1) 可知$2a+b=0$，∴$f'(x)=3x^2-bx+b$.

依题意，$f'(x)$在$[-2,1]$上恒有$f'(x)\geqslant0$，即$3x^2-bx+b\geqslant0$在$[-2,1]$上恒成立.

①当$x=\frac{b}{6}\geqslant1$时，$f'(x)_{小}=f'(1)=3-b+b>0$，∴$b\geqslant6$；

②当$x=\frac{b}{6}\leqslant-2$时，$f'(x)_{小}=f'(-2)=12+2b+b\geqslant0$，∴$b\in\varnothing$；

③当$-2\leqslant\frac{b}{6}\leqslant1$时，$f'(x)_{小}=\frac{12b-b^2}{12}\geqslant0$，∴$0\leqslant b\leqslant6$.

综合上述讨论可知，所求参数b的取值范围是$b\geqslant0$.

例 3　求下列函数单调区间.

(1) $y=f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+5$.

(2) $y=\frac{x^2-1}{x}$.

(3) $y=\frac{k^2}{x}+x\ (k>0)$.

(4) $y=2x^2-\ln\alpha$.

解：(1) $y'=3x^2-x-2=(3x+2)(x-1)$，$x\in\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)\cup(1,+\infty)$时，$y'>0$；

$x\in\left(-\frac{2}{3},1\right)$时，$y'<0$. ∴在$\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$，$(1,+\infty)$上单调递增，在$\left[-\frac{2}{3},1\right]$上单调递减.

(2) $y'=\frac{x^2+1}{x^2}$，∴在$(-\infty,0)$，$[0,+\infty)$上单调递增.

(3) $y'=1-\frac{k^2}{x^2}$,

∴ $x\in(-\infty,-k)\cup(k,+\infty)$, $y'>0$; $x\in(-k,0)\cup(0,k)$, $y'<0$.

∴在 $(-\infty,-k)$, $(k,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-k,0)$, $(0,k)$ 上单调递减.

(4) $y'=4x-\frac{1}{x}=\frac{4x^2-1}{x}$，定义域为 $(0,+\infty)$.

$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $y'<0$; $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$, $y'>0$.

∴在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减.

例 4　求证下列不等式.

(1) $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2(1+x)}$, $x\in(0,+\infty)$.

(2) $\sin x>\frac{2x}{\pi}$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

(3) $x-\sin x<\tan x-x$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

证明：(1) 令 $f(x)=\ln(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)$, $f(0)=0$, $f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{x+1}>0$,

∴ $y=f(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 上单调递增，∴ $x\in(0,+\infty)$ 有 $f(x)>0$ 恒成立.

∴ $\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$. 令 $g(x)=x-\frac{x^2}{2(1+x)}-\ln(1+x)$, $g(0)=0$,

$g'(x)=1-\frac{4x^2+4x-2x^2}{4(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}=\frac{2x^2}{4(1+x^2)}>0$,

∴ $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，∴ $x\in(0,+\infty)$ 有 $x-\frac{x^2}{2(1+x)}-\ln(1+x)>0$ 恒成立.

(2) 原式⇔ $\frac{\sin x}{x}>\frac{2}{\pi}$，令 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$,

∵ $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 有 $\cos x>0$, $x-\tan x<0$,

∴ $f'(x)=\frac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}$，∴ $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $f'(x)<0$, 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减.

∵ $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}$，∴ $\sin x>\frac{2x}{\pi}$.

(3) 令 $f(x)=\tan x-2x+\sin x$, $f(0)=0$,

$f'(x)=\sec^2x-2+\cos x=\frac{(1-\cos x)(\cos x+\sin^2x)}{\cos^2x}$,

∵ $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $f'(x)>0$，∴ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增.

∴ $\tan x-x>x-\sin x$.

例 5　已知函数 $f(x)=ax^3+3x^2-x+1$ 在 **R** 上是减函数，求 a 的取值范围.

分析：本题主要考查求导法研究函数单调区间的问题，利用 $f(x)$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 时为减函数等价于 $f'(x)<0$ 恒成立来解决此类问题.

解：$f'(x)=3ax^2+6x-1$.

(1) 当 $f'(x)<0$ 时，$f(x)$ 为减函数，

$3ax^2+6x-1<0\Leftrightarrow a<0$,

且 $\Delta=36+12a<0\Leftrightarrow a<-3$,

∴当 $a<-3$ 时，由 $f'(x)<0$ 可知 $f(x)$ 是减函数.

(2) 当 $a=-3$ 时，$f(x)=-3x^3+3x^2-x+1=-3\left(x-\frac{1}{3}\right)^3+\frac{8}{9}$,

由函数 $y=x^3$ 在 **R** 上的单调性可知，当 $a=-3$ 时，$f(x)$ 是减函数.

(3) 当 $a>-3$ 时，在 **R** 上存在一个区间，其上有 $f'(x)>0$，故当 $a>-3$ 时，$f(x)$ 不是减函数.

综上所述，所求 a 的取值范围是 $(-\infty,-3]$.

例 6　在 100 千米长的铁路线 AB 旁的 C 处有一间工厂，工厂与铁路的距离 CA 是 20 千米. 由铁路上的 B 处向工厂提供原料，公路与铁路每吨·千米的货物运价比为 5:3. 为节约运费，在铁路的 D 处修一货物转运站，设 AD 的距离为 x 千米，沿 CD 直线修一条公路，如图 1-15 所示.

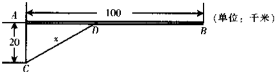


图 1-15

(1) 将每吨货物运费 y（元）表示成 x 的函数.

(2) 当 x 为何值时，运费最省？

解：(1) 设公路与铁路每吨·千米的货物运价分别为 $5k$、$3k$（元）（k 为常数），$AD=x$，则 $DB=100-x$.

$CD=\sqrt{AD^2+AC^2}=\sqrt{x^2+20^2}=\sqrt{x^2+400}$.

∴每吨货物的运费 $y=(100-x)\cdot3k+\sqrt{x^2+400}\cdot5k$（元）.

(2) 令 $y'=-3k+5k\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+400}}=\frac{5x-3\sqrt{x^2+400}}{\sqrt{x^2+400}}\cdot k=0$,

∴ $5x-3\sqrt{x^2+400}=0$.

∵ $x>0$，∴解得 $x=15$.

当 $0<x<15$ 时，$y'<0$；当 $x>15$ 时，$y'>0$.

∴当 $x=15$ 时，y 有最小值.

∴当 x 为 15 千米时，运费最省.

评估测试

（一）基础巩固

1. 选择题.

(1) $f'(x_0)=0$ 是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取极值的（　）.

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

(2) 函数 $f(x)=x^3-3x+1$ 在闭区间 $[-3,0]$ 上的最大值和最小值分别是（　）.

A. 1, −1　　B. 1, −17

C. 3, −17　　D. 9, −19

(3) 设函数 $f(x)=kx^3+3(k-1)x^2-k^2+1$ 在区间 $(0,4)$ 上是减函数，则 k 的取值范围是（　）.

A. $k<\frac{1}{3}$　　B. $0<k\le\frac{1}{3}$