经全国中小学教材审定委员会
2004年初审通过

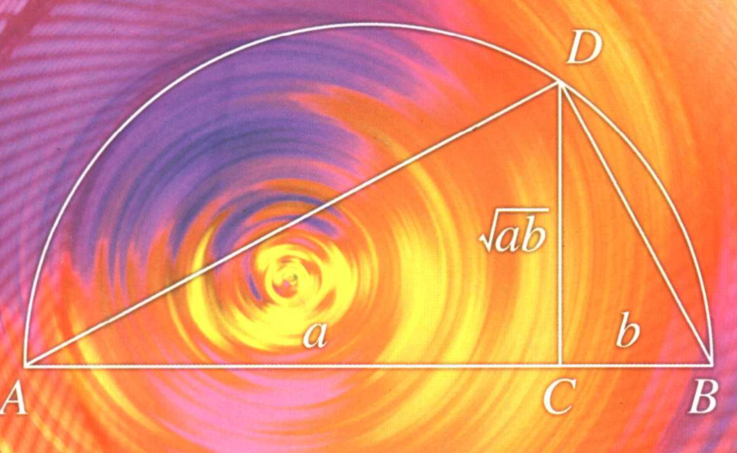
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4–5

不等式选讲

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著



人民教育出版社

B版

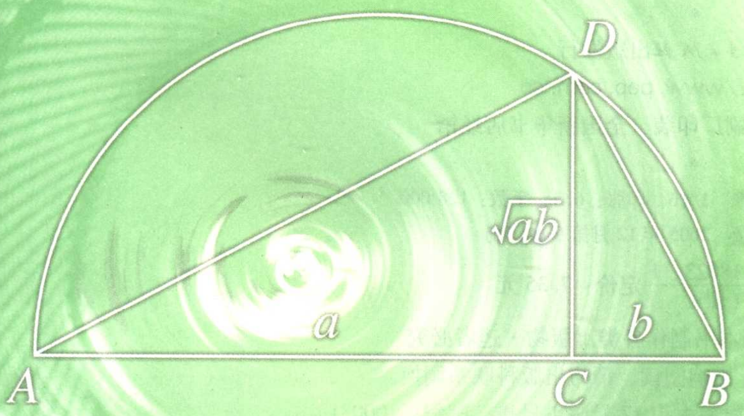
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4–5

不等式选讲

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学教材实验研究组 编著



人民教育出版社

B版

主　　编　　高存明

本册主编　　房艮孙

编　　者　　房艮孙　李迈岸

责任编辑　　王旭刚

美术编辑　　张　蓓　王　喆

绘　　图　　王　鑫

封面设计　　林荣桓

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修4-5 不等式选讲

B版

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著

*

人民教育出版社出版发行

网址：http://www.pep.com.cn

人民教育出版社印刷厂印装　全国新华书店经销

*

开本：890毫米×1 240毫米　1/16　印张：6.5　字数：128 000

2004年5月第1版　2005年12月第9次印刷

ISBN 7-107-18023-1 / G·11112（课）　定价：7.35元

如发现印、装质量问题，影响阅读，请与出版科联系调换。

（联系地址：北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼　邮编：100081）

本册导引

不等关系是客观世界中广泛存在的一个基本关系，各种类型的不等式在现代数学的各个分支及实际应用中起着十分重要的作用.

在第一章中，我们首先回顾了不等式的基本性质和基本不等式. 在学生已经掌握一元一次不等式、一元二次不等式、二元一次不等式组解法和背景的基础上，介绍了含有绝对值不等式的解法，以及绝对值的三角不等式. 我们还通过一些简单问题介绍了证明不等式的一些基本方法：比较法，综合法，分析法，放缩法和反证法.

在第二章中，我们给出了柯西不等式的几种不同形式——代数形式、向量形式、三角不等式（形式），通过实例引入了排序不等式，并用排序不等式证明了平均值不等式. 我们还运用这些不等式，通过建立适当的数学模型，解决了一些特定的优化问题. 希望由此帮助学生体验数学在解决实际问题中的价值和作用，体验利用数学解决实际问题的过程.

数学探究是高中引入的一种新的学习方式. 我们希望通过一些案例和课题，帮助学生初步理解数学概念和结构产生的过程，初步尝试研究过程.

在第二章中，我们特别强调了不等式的几何背景和物理背景，以加深学生对一些重要不等式的理解，从而有利于提高学生的逻辑思维能力.

在第三章中，我们进一步介绍了数学归纳法及其使用范围，并应用数学归纳法证明了贝努利不等式，给出了平均值不等式的归纳法证明. 此外，作为数学文化，在这一章中我们还介绍了归纳法的简单历史，介绍了完全归纳法，不完全归纳法和第二归纳法，以帮助同学们加深对数学归纳法的理解，体会数学发展、完善过程中的历史轨迹，从而提高文化素养和创新意识.

目　录

第一章 不等式的基本性质和证明的基本方法

1.1 不等式的基本性质和一元二次不等式的解法

1.1.1 不等式的基本性质

我们要研究不等式，首先要明确实数的大小关系．如何确定实数之间的大小呢？由于实数与数轴上的点之间是一一对应的，因此，在数轴上，规定点从左到右依次出现，则它们所表示的实数也从小到大依次排列，即：

设 a，b 为两个实数，它们在实轴上的点分别记为 A，B．如果 A 落在 B 的右边，则称 a 大于 b，记为 $a>b$；如果 A 落在 B 的左边，则称 a 小于 b，记为 $a<b$；如果 A 与 B 重合，则称 a 与 b 相等，记为 $a=b$.

这样，对于任何两个实数，有且只有以下三种情况之一成立：

$$a>b;\ a=b;\ a<b.$$

上述关系式的另一表达方法是

$$\boxed{\begin{gathered} a>b \Leftrightarrow a-b>0 \\ a<b \Leftrightarrow a-b<0 \\ a=b \Leftrightarrow a-b=0 \end{gathered}}$$

其中符号“$\Leftrightarrow$”（两向箭头），读作“等价于”，其意义是该符号两边的式子可以互相推出．也就是说如果左边的关系式成立，则右边的关系式成立，反过来，如果右边的关系式成立，则左边的关

系式成立.

上面的关系式沟通了实数大小的几何意义和代数意义之间的联系，是比较两个实数大小以及用比较法证明不等式的出发点. 下面我们回顾一些不等式的基本性质，它们是我们进一步学习的基础.

1. 对称性：$a>b \Leftrightarrow b<a$.

2. 传递性：$a>b$，$b>c \Rightarrow a>c$.

3. 加(减)：$a>b \Rightarrow a+c>b+c$.

4. 乘(除)：$a>b$，$c>0 \Rightarrow ac>bc$；

$a>b$，$c<0 \Rightarrow ac<bc$.

5. 乘方：$a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n$，其中 n 为正整数，且 $n\geqslant 2$.

6. 开方（取算术根）$a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$，其中 n 为正整数，且$n\geqslant 2$.

7. $a>b$，$c>d \Rightarrow a+c>b+d$.

（本性质说明两个同向不等式相加，所得的不等式和原不等式同向.）

8. $a>b>0$，$c>d>0 \Rightarrow ac>bd$.

（本性质说明两边都是正数的同向不等式两边分别相乘，所得的不等式和原不等式同向.）

事实上，以上这些基本性质是我们解不等式和证明不等式的基础和出发点. 关于不等式的推导，大多依赖于以上几条性质.

例 已知 $ab\neq 0$，$a>b$，试比较$\frac{1}{a}$与$\frac{1}{b}$的大小.

解：要比较$\frac{1}{a}$与$\frac{1}{b}$的大小，只需要考虑它们的差就可以了.

因为$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$，并且 $a>b$，即 $b<a$，所以 $b-a<0$.

分两种情况讨论：

(1) 如果 $ab>0$，则$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}<0$，即$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

(2) 如果 $ab<0$，则$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}>0$，即$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

练习

1. 判断下列各命题的真假，并说明理由.

(1) 如果 $a>b$，那么 $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$；　　(2) 如果 $ac<bc$，那么 $a<b$；

(3) 如果 $a<b$，那么 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$；　　(4) 如果 $ac^2>bc^2$，那么 $a>b$；

(5) 如果 $a>b$，那么 $a^n>b^n$.

2. 证明：如果 $a>b$，$c<d$，则 $a-c>b-d$. 对比不等式性质 7，你能得出什么结论？

3. 证明：如果 $a>b>0$，$0<c<d$，则 $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$. 对比不等式性质 8，你能得出什么结论？

4. 用“$>$”，“$<$”填空.

(1) $a<b<0$，则 $\frac{1}{a}$ ____ $\frac{1}{b}$；　　(2) $a>b>c>0$，则 $\frac{c}{a}$ ____ $\frac{c}{b}$；

(3) $0<a<b<1$，则 $\frac{1}{a^n}$ ____ $\frac{1}{b^n}$，其中 n 为正整数.

5. 设 $a>0$，$b>0$，比较下面两式的大小.

(1) $\frac{b}{a}$，$\frac{b}{a+1}$；　　(2) $\frac{b}{a}$，$\frac{b+1}{a}$.

6. 如果 $a>b>0$，$c<d<0$，$f<0$，证明：$\frac{f}{a-c}>\frac{f}{b-d}$.

1.1.2 一元一次不等式和一元二次不等式的解法

我们已经学习过一些简单的不等式解法，如一元一次不等式和一元二次不等式，下面我们作一简要回顾.

1. 一元一次不等式

含有一个未知数并且未知数最高次数是一次的不等式叫做一元一次不等式.

在初中，我们学过一元一次不等式的解法，下面我们通过一个例子复习一下.

例 1 解不等式：

$$\frac{x-4}{2}-3(x+1)<(x+2)-14.$$

解：不等式两边同时乘以 2 得

$$(x-4)-6(x+1)<2(x+2)-28,$$

即 $-5x-10<2x-24$,

移项整理，得 $-7x<-14$.

两边同时乘以 $-\frac{1}{7}$，不等号方向改变，得

$$x>2.$$

所以原不等式解集为

$$\{x \mid x>2\}.$$

2. 一元二次不等式

含有一个未知数并且未知数最高次数是二次的不等式叫做一元二次不等式.

下面我们来回顾一元二次不等式

$$ax^2+bx+c>0 \text{ 或 } ax^2+bx+c<0\ (a>0)$$

的解法. 设 $\Delta=b^2-4ac$ 为其判别式：

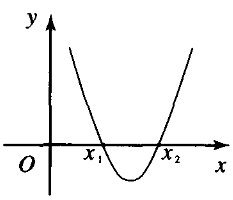


图 1-1

(1) 当 $\Delta>0$ 时，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不同实根 x_1，x_2，设 $x_1<x_2$(图 1-1)，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的图象开口向上，和 x 轴（$y=0$）相交于两个点 x_1，x_2，即函数 $y=ax^2+bx+c$ 以 x_1，x_2 为其零点.

当 $x<x_1$ 或 $x>x_2$ 时，抛物线图象在 x 轴上方，即 $ax^2+bx+c>0$；

当 $x_1<x<x_2$ 时，抛物线在 x 轴下方，即 $ax^2+bx+c<0$.

所以，不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为

$$\{x \mid x<x_1 \text{ 或 } x>x_2\},$$

不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为 $\{x \mid x_1<x<x_2\}$.

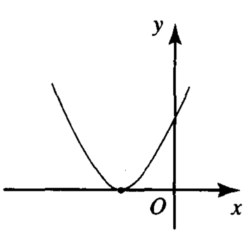


图 1-2

(2) 当 $\Delta=0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相同实根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$(图 1-2)，抛物线与 x 轴只有一个交点，即函数 $y=ax^2+bx+c$ 有一个二重零点. 当 $x\neq-\frac{b}{2a}$时，抛物线图象在 x 轴上方，即 $ax^2+bx+c>0$.

所以，不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为$\left\{x \mid x\neq-\frac{b}{2a}\right\}$.

不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为$\varnothing$(空集).

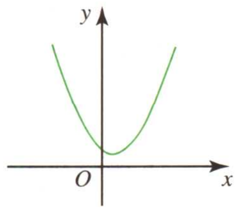


图 1-3

(3) 当 $\Delta<0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0$ 无实根(图 1-3)，抛物线与 x 轴没有交点，即函数 $y=ax^2+bx+c$ 没有实根．抛物线的图象在 x 轴上方．

因此，x 为任意实数时都有 $ax^2+bx+c>0$．

所以，不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为全体实数．
不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为 $\varnothing$（空集）．

思考与讨论

对于函数 $y=ax^2+bx+c$，如果 $a<0$，讨论相应的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 和 $ax^2+bx+c<0$ 解集的情况．

例 2 解下列一元二次不等式

(1) $4x^2+6x+2<0$；　　(2) $4x^2+4x+1<0$；

(3) $-3x^2+x-6<0$．

解：(1) 因为 $\Delta=36-4\times4\times2=4>0$，方程 $4x^2+6x+2=0$ 的解为

$$x_1=-1,\quad x_2=-\frac{1}{2}.$$

所以不等式的解集为 $\left\{x \mid -1<x<-\frac{1}{2}\right\}$．

(2) 因为 $\Delta=4^2-4\times4=0$，所以原不等式的解集为 $\varnothing$．

(3) 不等式两边同时乘以 -1，得

$$3x^2-x+6>0.$$

因为 $\Delta=(-1)^2-4\times3\times6=-71<0$，所以原不等式的解集为全体实数．

例 3 某保险公司为提高员工的计算机水平，委托一计算机培训公司培训员工．培训公司将按照课程深度的进展以及教学设备的逐步升级而提高授课费用．具体为：完成整个培训需时 70 天，将整个培训分为 7 个阶段，每阶段培训 10 天．第一阶段培训费用为 8 000 元，而后每阶段比前一阶段增加培训费 1 000 元，并且每个阶段一旦开始就要完成，不能只进行半个阶段的培训就停止．

由于保险公司考虑到员工不需要非常深入的计算机知识技能，

以及考虑培训资金有限，因而不准备完成整个培训．现保险公司为员工提供的培训资金为60 000元，则员工最多能够接受几个阶段的培训？

解：这 7 个阶段的培训费用为一个等差数列，第 x 个阶段的培训费用为$8\,000+(x-1)\cdot 1\,000$.

若员工接受培训 x 个阶段，则总的费用为

$$\frac{8\,000+[8\,000+(x-1)\cdot 1\,000]}{2}\cdot x,$$

因此，我们有不等式

$$\frac{8\,000+[8\,000+(x-1)\cdot 1\,000]}{2}\cdot x<60\,000,$$

即　$$x^2+15x-120<0,$$

解得　$$\frac{-15-\sqrt{705}}{2}<x<\frac{-15+\sqrt{705}}{2}.$$

又由于每个阶段培训必须完成，x 只能取非负整数，所以最多可培训 5 个阶段.

练习

1. 解下列一元一次不等式：

(1) $3x+2<2(x+1)-4$；　　(2) $\frac{4x+5}{3}-2(x+2)\geqslant -5(x-1)$.

2. 解下列不等式：

(1) $(x+4)(x-3)>0$；　　(2) $(x+5)(4-x)<0$；

(3) $(6x+2)(2x+1)<0$；　　(4) $\left(\frac{1}{2}x-3\right)(2x+3)\geqslant 0$.

3. 解下列关于 x 的不等式：

(1) $2x+3-x^2>0$；　　(2) $x(x+2)-1>x(3-x)$；

(3) $x^2-2\sqrt{3}x+3>0$；　　(4) $x^2+6(x+3)>3$.

4. 解不等式$(m^2+1)x^2+mx-1<0$，其中 m 为常数.

5. 解不等式 $0<x^2-x-2<4$.

6. 已知$U=\mathbf{R}$，$A=\{x\,|\,x^2-3x+2<0\}$，求 $\complement_U A$.

7. 若不等式 $ax^2-bx-6>0$ 的解是 $2<x<3$，求不等式 $x^2+ax+b+3\leqslant 0$ 的解集.

习题1—1

1. 用不等号填空：

(1) 如果 $a>b$，那么 $a-b$ ____ 0；

(2) 如果 $a<b$，那么 $-(2-4a)$ ____ $-(2-4b)$；

(3) 如果 $cx>b$，$ca^2<0$，那么 x ____ $\frac{b}{c}$.

2. 若 $a\neq b$，比较 a^2-ab 和 $ba-b^2$ 的大小.

3. 已知 $x\neq 0$，比较$(x^2+2)^2$ 与 x^4+x^2+4 的大小.

4. 证明下面的结论：

(1) 如果 $a<b<0$，$c<d<0$，那么 $ac>bd$；

(2) 如果 $a>b$，$e>f$，$c>0$，那么 $f-ac<e-bc$；

(3) 如果 $a>b>0$，$c>d>0$，那么$\frac{1}{ac}<\frac{1}{bd}$；

(4) 如果 $a>b>0$，$c>d>0$，$e>0$，那么$\frac{e}{ac}<\frac{e}{bd}$.

5. 解不等式$\sqrt{6-x^2}>\sqrt{x}$.

6. 解不等式 $2^{x^2+x-2}<1$.

7. 解不等式 $2+\log_{\frac{1}{2}}(5-x)>0$.

8. 求函数 $y=\sqrt{x+2}+\log_2(25-x^2)$的定义域.

9. 已知$-1<x<y<0$，比较$\frac{1}{x}$，$\frac{1}{y}$，x^2，y^2 的大小关系.

10. 设 x，y 为正数，比较$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$与$\frac{1}{x+y}$的大小.

11. 判断下面各组两个不等式的解集是否相同：

(1) $(x-2)(x-1)^2>(2x-4)(x-1)^2$ 与 $x-2>2x-4$；

(2) $(x-2)(x-1)^2<(2x-4)(x-1)^2$ 与 $x-2<2x-4$；

(3) $\frac{x-3}{x-1}>0$ 与$(x-3)(x-1)>0$；

(4) $\frac{x-3}{x-1}\geqslant 0$ 与$(x-3)(x-1)\geqslant 0$；

(5) $(x-2)^2(x-1)(x-4)>0$ 与$(x-1)(x-4)>0$；

(6) $(x-2)^2(x-1)(x-4)\geqslant 0$ 与$(x-1)(x-4)\geqslant 0$.

12. 解不等式：

(1) $(x-1)^2(x-2)(x-3)<0$；

(2) $(x-1)^2(x-2)(x-3)\geqslant 0$.

13*. 解不等式$\sqrt{x^2-3x+2}<x+3$.

14*. 解不等式 $a^{3x^2-2x+1}>a^{2x^2-3x+3}$ $(a>0，a\neq1)$.

15*. 解不等式 $\log_a(x^2-5x+6)<\log_a(2x-2)$，$0<a<1$.

16. 某高校教师向学校申请一个科研项目的资助基金，希望学校分五期投入资金资助项目，随着项目的深入，投入资金量应逐渐加大，具体计划为：第一期投入 3 万元，以后每期比前一期多投入 5 000 元，现学校批准在这个项目上只投入 11 万元的资金，问这些资金够资助几期的项目研究？

1.2 基本不等式

这一节我们把基本不等式写成定理的形式，并加以证明. 为加深同学对基本不等式的理解，我们给出一些几何解释，直观地说明基本不等式的几何意义.

定理 1　设 a，$b\in\mathbf{R}$，则

$$a^2+b^2\geqslant 2ab$$

当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

证明：由于

$$a^2+b^2\geqslant 2ab \Leftrightarrow a^2+b^2-2ab\geqslant 0 \Leftrightarrow (a-b)^2\geqslant 0.$$

上式中最后一个不等式对于一切 a，$b\in\mathbf{R}$ 成立，并且当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

故原不等式成立.

对上面结论作简单的恒等变形，就可以得到另一个很有意义的不等式.

定理 2　如果 a，b 为正数，则

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab},$$

当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

证明：$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$.

故上面不等式成立，并且当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

定理 2 是我们证明许多不等式的出发点，故称之为**基本不等式**或**平均值不等式**.

我们称$\frac{a+b}{2}$为正数 a，b 的**算术平均值**，$\sqrt{ab}$为正数 a，b 的**几**

何平均值. 因而这一定理可用语言叙述为：**两个正数的算术平均值大于或等于它们的几何平均值**.

几何说明 1　设 $a\geqslant b>0$，分别以 $\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$ 为长、宽作矩形 $ABCD$，作 $\angle A$ 的平分线交 CD 于 E，交 BC 的延长线于 F，则 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ABF$ 都是等腰直角三角形. 所以

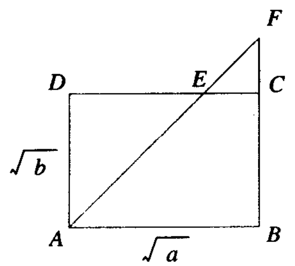


图 1-4

$$S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}AB\cdot BF=\frac{1}{2}\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=\frac{1}{2}a$$

$$S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}AD\cdot DE=\frac{1}{2}\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}=\frac{1}{2}b$$

$$S_{ABCD}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$$

从图 1-4 中可看出 $S_{\triangle ABF}+S_{\triangle ADE}\geqslant S_{ABCD}$.

即　$\frac{1}{2}(a+b)\geqslant\sqrt{ab}$，且等号成立 $\Leftrightarrow$ F 和 C 重合 $\Leftrightarrow$ $AB=BC$ $\Leftrightarrow$ 矩形 $ABCD$ 为正方形 $\Leftrightarrow$ $a=b$.

几何说明 2　如图 1-5，以 $a+b$ 为直径作半圆，记其圆心为 O，端点分别记为 A，B，在直径 AB 上取点 C，使得 $AC=a$，过 C 作 AB 的垂线交圆 O 于 D，则

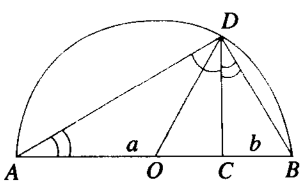


图 1-5

$$OD=\frac{1}{2}(a+b).$$

因为　$\angle A+\angle ADC=\angle BDC+\angle ADC=\frac{\pi}{2}$，

所以　$\angle A=\angle BDC$，

所以　$\mathrm{Rt}\triangle ACD\backsim\mathrm{Rt}\triangle DCB$，

所以　$\frac{CD}{b}=\frac{a}{CD}$，

所以　$CD=\sqrt{ab}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ODC$ 中斜边 $OD=\frac{1}{2}(a+b)\geqslant CD=\sqrt{ab}$，即

$$\frac{1}{2}(a+b)\geqslant\sqrt{ab},$$

当且仅当 $a=b$ 时等号成立.（C 点和圆心 O 重合）

注

将 a，b 看成两条线段的长度，以它们为边长作一长方形，则其面积为 ab，和它等面积的正方形的边长为 $\sqrt{ab}$，这解释了“几何平均值”这一名词的来源.

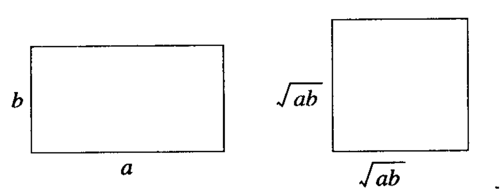


图 1-6

阅读 作为平均值不等式的应用，让我们对下面问题作出猜测和证明．考虑“在所有面积为 1 的矩形中，正方形有最小的周长”这个猜测．显然一个单位面积的“瘦长”矩形比同样面积的“短胖”矩形有更大的周长，于是自然猜想正方形有最小的周长．我们可以用基本不等式来证明这一猜测，设 a，b 为矩形的边长，其面积为 1，则 $ab=1$，故 $\sqrt{ab}=1$，于是得

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}=1.$$

当且仅当 $a=b$（为正方形）时等号成立，此时正方形的边长 $a=b=1$，周长为 4，当 $a\neq b$ 时，矩形的周长 $2(a+b)>4\sqrt{ab}=4$．即面积为 1 的矩形中，正方形有最小的周长．

例 设 a，b，c 为正数，求证：

$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$（当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立）．

证明：因为 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3-3abc\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)[a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac]\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geqslant 0.$$

由于 $a+b+c>0$ 且 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant 0$，

因而$\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geqslant 0$ 成立，且当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立．

所以原不等式成立，当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立．

定理 3 如果 a，b，c 为正数，则

$$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc},$$

当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立．

证明：$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3+(\sqrt[3]{c})^3}{3}\geqslant\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{c}.$$

由例知定理 3 成立．

我们称 $\frac{a+b+c}{3}$ 为正数 a，b，c 的算术平均值，$\sqrt[3]{abc}$为正数 a、b、c 的几何平均值．由定理 3 知，三个正数的算术平均值不小于它们的几何平均值．我们称定理 3 中的不等式为三个正数的

算术—几何平均值不等式，或简称为**平均值不等式**.

对于 n 个正数，我们同样可以定义它们的算术平均值

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

和几何平均值

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

并且这 n 个正数的算术平均值不小于它们的几何平均值.

定理 4 （一般形式的算术—几何平均值不等式）**如果 a_1，a_2，…，a_n 为 n 个正数，则**

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

并且当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，等号成立.

关于这个定理的证明，感兴趣的同学可以参看第二章第三节的相关内容.

注：在定理 1—定理 4 的不等式中，在所讨论的实数、正数相等的条件下，等号成立. 如果在某些特定条件下，一个不等式转化为等式，那么我们称这个不等式是“精确”的. 这一类不等式在现代数学中非常重要，它们为解决某些有关优化的极值问题提供了理论基础. 恒等变形是证明这类不等式的一种常用方法.

习题 1—2

1. 已知 a，b，c 是不全相等的正数，求证：
   (1) $(a+b)(b+c)(c+a)>8abc$；
   (2) $a+b+c>\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$.
2. 已知 x，y，z 为正数，求证：
   (1) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\geqslant 2$；
   (2) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}\geqslant 3$.
3. 设 a，b，c 及 x，y，z 都是正数，求证：
$$\frac{b+c}{a}x^2+\frac{c+a}{b}y^2+\frac{a+b}{c}z^2\geqslant 2(xy+yz+zx)$$
4. 求证：$a^2+b^2\geqslant 2(a+b)-2$.
5. 求证：$a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant ab+bc+cd+da$.