

错在哪里

—— 数学



儿童出版社

编著者

顾忠德

徐来星

毛良德

少年儿童出版社

错在哪里

—— 数学

CUOZANALI



内 容 提 要

这是一本有趣的书。它要求读者将里面各个数学题中的解答错误找出来,并加以改正。通过找错和改错,读者可以加深对于数学基本知识的理解,提高分析和解答数学题的能力。

本书适合正在初中学习的少年阅读,也可供初中学生开展数学课外小组活动、出版“数学园地”等参考。

错 在 哪 里

——数 学

顾忠德 徐方瞿 毛之价 编著

庄俊豪 顾忠德 绘图

侯强华 甘晓培 装帧

少年儿童出版社出版

(上海延安西路 1538 号)

新华书店上海发行所发行

上海市印刷十二厂排版 上海市印刷十二厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 6.625 插页 1 字数 140,000

1982 年 11 月第 1 版 1982 年 11 月第 1 次印刷

印数 1—130,000

统一书号: R 13024·155 定价: (科二) 0.46 元

开 头 的 话

许多同学在解数学题时，常常会发生这样或那样的解答错误。分析其原因，有的是对于数学基本知识的理解不很正确、深刻；有的是对于解题的方法没有掌握或者掌握得不很好；也有的是在解题时思考不够细致、全面……

题目解答错了，你心里当然会感到不快，甚至感到懊丧。然而，俗话说得好，“吃一堑，长一智”。如果你能从中吸取教训，认真地分析错误的所在和产生的原因，研究出正确的解题方法，却会使你感到“豁然开朗”，加深对于基本知识的理解，增长解题的才能。所以，从这个意义上说，善于从错误的解答中找出错误所在，并加以订正，也是学习数学，提高分析问题、解决问题能力的一种有效方法。

正是根据上述这个道理，我们选择初中同学在学习数学时常发生的一部分解答错误，编写成本书，以供正在初中学习的少年课外练习参考。

要使学习得到更多的收益，必须善于进行独立的思考。在这本书里，我们有意地将每一篇（每篇一题或若干题）都排成两页，前一页为有错误的解答，后一页为对错误的分析及正确的解答。其目的，就是为了便于读者先对错误的解答作出自己的分析和订正，然后再与后页的分析与解答加以比较。应当指出，我们所作的分析不一定很恰当，所提供的解题方法也不一定是最好的，读者完全可以发挥自己的聪明才智，作出更

好的分析和解答。

另外，本书的各部分内容，大致上是按代数、几何的顺序编排的。少年读者可以结合课内学习的内容选阅。

本书在编写中曾得到薛福田、严华祥、余应龙、康士凯、潘祖容、沈树楷等同志的热情帮助，有些同志提供了部分素材，谨在此表示深切的感谢！

编著者

一九八一年十一月

目 录

- “咬文嚼字”(12篇) 1
“不一定”与“一定不”(3) 填箭头(5) 请作判断(7) 一字之差(9) 大熊猫与小花狗(11) $\sqrt{2}$ (13) 请你评分(15) 小测验(17) 你会应用等量公理吗?(19) 述理要准确(21) 逆否命题的叙述(23) 谁在说谎?(25)
- “0”的纠纷(9篇) 27
“绕口令”(29) 0与1(31) $2=-1$ (33) 答数怎么少了?(35) 直角三角形都是等腰三角形(37) 任意三角形三边都相等(39) 梯形两底之和等于零(41) 线段与它的部分相等(43) 是真是假?(45)
- “差之毫厘,失之千里”(10篇) 47
 $0=1$ (49) 加1不变(51) $-2=2$ (53) $3 \geq 4$ (55) $\ln(-1)=0$ (57) 任意三角形都是等腰三角形(59) 底角不等的等腰三角形(61) 任意三角形的三个角都相等(63) 直角 $=45^\circ$ (65) 钝角 $=90^\circ$ (67)
- 多余和失落(14篇) 69
答数相同不保险(71) “不速之客”从何处来?(73) 他们都没有说对(75) 如法炮制(77) 顾此失彼(79) 方法简便,然而……(81) $x^x=x$ (83) 一解还是两解?(85) 奇怪的“增解”

- (87) 小糊涂(89) 寻找失去的解(91) 解不等式常见病诊断
(93) 取“交”还是取“并”?(95) 步步谨慎(97)

眼睛受骗(10篇)..... 99

441=442(101) 图象中的错误(103) 图中的缺陷(105) 两
线平行(107) 容易忽略的错误(109) 如此“全等”(111) 任
意角的三等分(113) 推广中的不足(115) 翻折(117) 是不
是平行四边形?(119)

因和果(12篇)..... 121

哪一种证法错了?(123) 请辨真伪(125) 关于一道数学题的
通信(127) 似是而非(129) 证明逆命题(131) 同样的毛病
(133) 三点共线(135) 四点共线(137) 四圆共点(139) 九
点共圆(141) 一道附加题(143) 调和点列(145)

粗心出错(14篇)..... 147

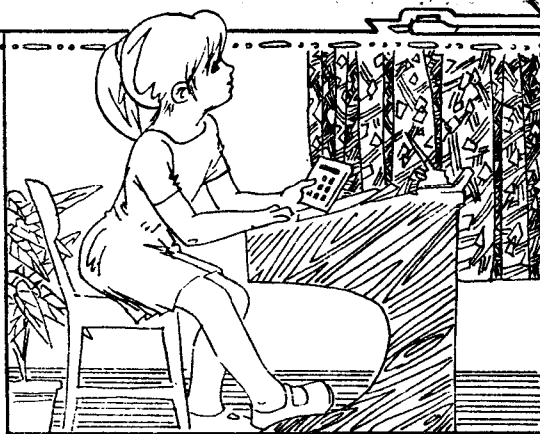
幂运算(149) 根号下的过失(151) log后面的错误(153) 小
粗心解题(155) 因式分解错误种种(157) 哪个极值对?(159)
能达到吗?(161) 挂一漏万(163) 一道智力竞赛题(165) 梯
形面积之比(167) 对答案(169) 莫名其妙的结论(171) 从
第一变成最末(173) 谁是谁非?(175)

漏洞(15篇)..... 177

找漏洞(179) 出乎意料(181) 错题(183) 考虑不周的后果
(185) 何时唯有唯一组解?(187) 功亏一篑(189) 一道竞赛题
(191) 图形的位置关系(193) 小华的发现(195) 小莉的证
明(197) 轨迹图(一)(199) 轨迹图(二)(201) 对一道轨迹
题的讨论(203) 美中不足(205) 解斜三角形(207)



“咬文嚼字”



“咬文嚼字”，本意是过分地斟酌字句。我们在这里借用这个词，并加上引号，目的是为了强调在解数学题时斟酌字句和数学符号的重要性。

数学上的每一个概念、判断及其推理，都是用语言文字和数学符号来表达的。所以，不论是运算求解，还是作图论证，细细地斟酌字句和符号的含义，正确地理解和运用它们，都是十分必要的。有些同学没有注意到这一点，因而发生了许多解答错误。通过下面各篇的分析，你一定会尝到其中的“滋味”，并从中获得许多有益的启示。

“不一定”与“一定不”

数学老师也象语文老师那样，常常喜欢“咬文嚼字”。有一次，老师用“不一定”与“一定不”两个词，就数与数之间的关系，口述了一长串命题，要同学作出判断：哪些是错误的？哪些是正确的？

- (1) 质数一定不是偶数。
- (2) 合数一定不是奇数。
- (3) 自然数不一定有约数。
- (4) 正整数不一定可以因数分解。
- (5) 一个数的相反数不一定是负数。
- (6) 一个数的倒数一定不大于1。
- (7) 一个数的绝对值不一定是它自己。
- (8) 分数不一定可化为有限小数。
- (9) 无限小数一定不可以化为分数。
- (10) 两个自然数的和与积一定仍是自然数，而它们的差与商不一定仍是自然数。
- (11) 两个整数的和、差、积仍是整数，而它们的商不一定仍是整数。
- (12) 两个有理数的和、差、积、商仍是有理数；两个无理数的和、差、积、商不一定仍是无理数。
- (13) 有理数开平方不一定是有理数；无理数开平方不一定是无理数。

现在请你也试着判断一下，尝尝“咬文嚼字”的滋味。

【分析】

(1) 错的。质数 2 是偶数。其他所有质数都不是偶数。

(2) 不对。例如奇数 9 就是一个合数。

(3) 也不对。1 有唯一的正约数 1, 此外, 每一个自然数至少有两个当然约数——本身与 1。

(4) 不对。正整数不一定可以质因数分解。

(5) 对。负数的相反数是正数。

(6) 错的。例如 $\frac{1}{2}$ 的倒数是 2, 它大于 1。

(7) 对的。正数和 0 的绝对值才是它们自己, 而负数的绝对值等于它的相反数。

(8) 对。例如 $\frac{1}{3} = 0.333\dots$, 就是一个无限小数。

(9) 不对。无限不循环小数不可以化为分数, 如 $\pi = 3.141592659\dots$, 不能用分数表示。而无限循环小数一定可以用分数来表示, 例如 $0.232323\dots = \frac{23}{99}$ 。

(10) 和 (11) 都是正确的。

(12) 正确的。前一句, “商”的情形, 除数当然不能为零。后一句举例如下: $\sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) = 1$, $\sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) = 1$, $(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 1$, $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 1$ 。

(13) 前一句正确。例如, $\sqrt{4} = 2$ 是有理数; $\sqrt{5}$ 就是无理数。后一句不对。无理数开平方一定仍是无理数。可用反证法证明: 设 a 是无理数。如果 \sqrt{a} 不是无理数, 即 \sqrt{a} 是有理数, 记 $\sqrt{a} = b$ ——有理数, 两边平方得 $a = b^2$ 。由于 b^2 是有理数, 而 a 是无理数, 两者不能相等。

填 箭 头

下面是一份答卷。试卷要求学生从三种箭头：“ \implies ”、“ \impliedby ”、“ \iff ”中适当地选一个，填在圆括号（ ）内；如果没有适当的，就不填。现在请你批改，哪些做对？哪些做错？做对的，在题后方括号[]内，打上“ \checkmark ”号；做错的，替他订正在[]内。

(1) $x=y$ (\iff) $x^2=y^2$. []

(2) $x=y$ (\implies) $x^3=y^3$. []

(3) $x=y$ (\iff) $|x|=|y|$. []

(4) $x=y$ (\iff) $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}$. []

(5) $x=y$ (\implies) $\sqrt{x}=\sqrt{y}$. []

(6) $x=y$ (\iff) $\lg x=\lg y$. []

(7) $x=y$ (\implies) $\sin x=\sin y$. []

(8) $x=y$ (\implies) $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} y$. []

(9) $x=y$ (\iff) $\frac{x}{y}=1$. []

(10) $x^2=y^2$ (\iff) $x=y$ 或 $x=-y$. []

(11) $x^2=y^2$ (\iff) $|x|=|y|$. []

(12) $x^3=y^3$ (\iff) $x=\sqrt[3]{y}$. []

(13) $x=y^2$ (\implies) $x^2=y^4$. []

(14) $x=y=z$ (\iff) $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$. []

【分析】

(1) 错。应改为“ \implies ”。例， $(-2)^2=2^2$ ，但 $-2 \neq 2$ 。

(2) 错。应改为“ \iff ”。因为，

$$x^2 + xy + y^2 = x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2 + \frac{3}{4}y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0,$$

$$x = y \iff x - y = 0 \iff (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 0$$

$$\iff x^3 - y^3 = 0 \iff x^3 = y^3.$$

(3) 错。应改为“ \implies ”。例， $|-2| = |2|$ ，但 $-2 \neq 2$ 。

(4) 错。应改为“ \iff ”。例，当 $x=0, y=0$ 时，右边无意义，左边仍然成立。

(5) 错。应改为“ \iff ”。例，当 $x=-1, y=-1$ 时，左边成立，右边无意义。

(6) 错。应改为“ \iff ”。例，当 $x=-1, y=-1$ 时，左边成立，右边无意义。

(7) 对。

(8) 错。应该不填。 $90^\circ = 90^\circ$ ，但是 $\operatorname{tg}90^\circ$ 无意义。

(9) 错。应改为“ \iff ”。 $0=0$ ，但 $\frac{0}{0}$ 无意义。

(10)、(11)、(13) 对。(12) 错。这道题应改为“ \iff ”。

(14) 对。证明如下：显然，“ \implies ”成立。再证“ \iff ”：

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$$

$$\implies 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2xy + 2yz + 2zx$$

$$\implies (x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2zx + x^2) = 0$$

$$\implies (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0$$

$$\implies x - y, y - z, z - x \text{ 同等于 } 0$$

$$\implies x = y = z.$$

请作判断

对于不等式性质的运用，许多同学常常出错。下列推理哪些对？哪些错？请作判断。如果是错的，举一反例说明。

$$(1) a > b \implies b < a.$$

$$(2) a > b, b > c \implies a > c.$$

$$(3) a > b \implies a \pm c > b \pm c.$$

$$(4) a > b \implies ac > bc.$$

$$(5) a > b \implies \frac{a}{c} > \frac{b}{c}.$$

$$(6) a > b \implies a^2 > b^2.$$

$$(7) a > b \implies \frac{1}{a} < \frac{1}{b}.$$

$$(8) a > b \implies \sqrt{a} > \sqrt{b}.$$

$$(9) a > b \implies |a| > |b|.$$

$$(10) a > b \implies \lg a > \lg b.$$

$$(11) \alpha > \beta \implies \sin \alpha > \sin \beta.$$

$$(12) \alpha > \beta \implies \cos \alpha < \cos \beta.$$

$$(13) \alpha > \beta \implies \operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \beta.$$

$$(14) \alpha > \beta \implies \operatorname{ctg} \alpha < \operatorname{ctg} \beta.$$

$$(15) a > b, c > d \implies a + c > b + d.$$

$$(16) a > b, c > d \implies a - c > b - d.$$

$$(17) a > b, c > d \implies ac > bd.$$

$$(18) a > b, c < d \implies \frac{a}{c} > \frac{b}{d}.$$

【分析】

(1)、(2)、(3)和下面的(15)都正确。(4)错。反例： $3 > 2$ ，但 $3 \times (-1) < 2 \times (-1)$ 。 $a > b, c > 0 \implies ac > bc$ 。

(5)错。反例： $3 > 2$ ，但 $\frac{3}{-1} < \frac{2}{-1}$ 。 $a > b, c > 0 \implies \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ 。

(6)错。反例： $3 > -4$ ，但 $3^2 < (-4)^2$ 。 $a > b > 0 \implies a^2 > b^2$ 。

(7)错。反例： $3 > -2$ ，但 $\frac{1}{3} > \frac{1}{-2}$ 。 $a > b > 0 \implies \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 。

(8)错。反例：当 $b = -1$ 时， $\sqrt{-1}$ 无意义。 $a > b > 0 \implies \sqrt{a} > \sqrt{b}$ 。

(9)错。反例： $3 > -4$ ，但 $|3| < |-4|$ 。

(10)错。反例：取 $b = -1$ ， $\lg(-1)$ 无意义。 $a > b > 0 \implies \lg a > \lg b$ 。

(11)错。反例： $150^\circ > 60^\circ$ ，但 $\sin 150^\circ < \sin 60^\circ$ 。

(12)错。反例： $350^\circ > 30^\circ$ ，但 $\cos 350^\circ > \cos 30^\circ$ 。

(13)错。反例： $120^\circ > 30^\circ$ ，但 $\operatorname{tg} 120^\circ < \operatorname{tg} 30^\circ$ 。

(14)错。反例： $210^\circ > 60^\circ$ ，但 $\operatorname{ctg} 210^\circ > \operatorname{ctg} 60^\circ$ 。只有当 $90^\circ > \alpha > \beta > 0^\circ$ 时，(11)~(14)的推理才是正确的。

(16)错。反例： $4 > 3, 2 > -1$ ，但 $4 - 2 < 3 - (-1)$ 。

(17)错。反例： $5 > 2, -1 > -2$ ，但 $5 \times (-1) < 2 \times (-2)$ 。

(18)错。反例： $10 > 4, -2 < -1$ ，但 $\frac{10}{-2} < \frac{4}{-1}$ 。当 a 、

b 、 c 、 d 都大于 0 时，(18)的推理是正确的。

一字之差

题：不解方程 $2x^2 + x - 1 = 0$,

求作一个一元二次方程，使它的一个根是上述方程两根差的倒数，另一个根为上述方程两根的立方和。

解：设方程 $2x^2 + x - 1 = 0$ 的两根为 x_1, x_2 ，则

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{2}, \quad x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2}.$$

又设所求方程为 $ax^2 + bx + c = 0$ ，它的两根为 α_1, α_2 。则

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}} = \frac{2}{3};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) \\ &= (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2] \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = -\frac{7}{8}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{又} \quad -\frac{b}{a} &= \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{2}{3} + \left(-\frac{7}{8}\right) = -\frac{5}{24}, \\ \frac{c}{a} &= \alpha_1 \cdot \alpha_2 = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{7}{8}\right) = -\frac{14}{24}.\end{aligned}$$

因而所求方程为 $24x^2 + 5x - 14 = 0$ 。

上述解答，思路清晰，条理清楚，计算正确。可惜！就在一个字上，有概念性的错误。

【分析】

对于“差”的概念，可以理解为 $x_1 - x_2$ ，也可以理解为 $x_2 - x_1$ 。因此，在求 α_1 的值时应为

$$|\alpha_1| = \frac{1}{|x_1 - x_2|} = \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2}} = \frac{2}{3}。$$

如果 $\alpha_1 = \frac{2}{3}$ ，所求方程为 $24x^2 + 5x - 14 = 0$ 。

如果 $\alpha_1 = -\frac{2}{3}$ ，那末

$$-\frac{b}{a} = \alpha_1 + \alpha_2 = \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{7}{8}\right) = -\frac{37}{24}，$$

$$\frac{c}{a} = \alpha_1 \cdot \alpha_2 = \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{7}{8}\right) = \frac{14}{24}，$$

所求方程为 $24x^2 + 37x + 14 = 0$ 。

本题有两解，这两个方程都符合题意。

还应当指出，解题者由于对“差”的概念理解不全面，以致表达形式上也发生了谬误。

上页中的
$$\alpha_1 = \frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2}}，$$

两个等式都有问题。前一个等式中忽略了

$$\alpha_1 = \frac{1}{x_2 - x_1}，$$

从而最终答案中少掉了一个方程。后一个等式

$$\frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2}}，$$

表示出解题者对于算术根的概念也未正确掌握。上式仅当 $x_1 - x_2 > 0$ 才成立；当 $x_1 < x_2$ 时，上式并不成立。

数学中“差”这个字，初学者应用起来可要当心哪！