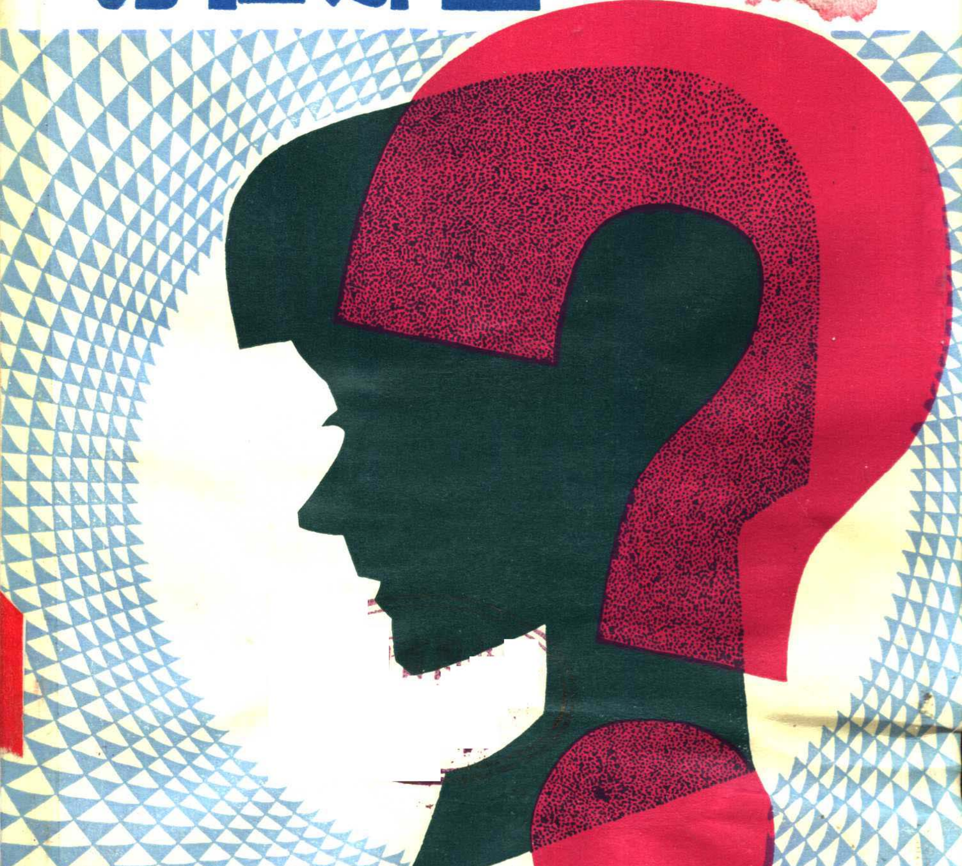
错在哪里——数学



年儿童出版社

编著者

顾忠德

徐[illegible]星

毛之[illegible]

少年儿童出版社

错在哪里——数学

CUOZAINALI

内 容 提 要

这是一本有趣的书。它要求读者将里面各个数学题中的解答错误找出来，并加以改正。通过找错和改错，读者可以加深对于数学基本知识的理解，提高分析和解答数学题的能力。

本书适合正在初中学习的少年阅读，也可供初中学生开展数学课外小组活动、出版"数学园地"等参考。

错 在 哪 里

——数 学

顾忠德 徐方瞿 毛之价 编著

庄俊豪 顾忠德 绘图

侯强华 甘晓培 装帧

少年儿童出版社出版

(上海延安西路 1538 号)

新华书店上海发行所发行

上海市印刷十二厂排版 上海市印刷十二厂印刷

开本787×1092 1/32 印张6.625 插页1 字数140,000

1982年11月第1版 1982年11月第1次印刷

印数1—130,000

统一书号：R13024·155 定价：(科二)0.46元

开头的话

许多同学在解数学题时，常常会发生这样或那样的解答错误。分析其原因，有的是对于数学基本知识的理解不很正确、深刻；有的是对于解题的方法没有掌握或者掌握得不很好；也有的是在解题时思考不够细致、全面……

题目解答错了，你心里当然会感到不快，甚至感到懊丧。然而，俗话说得好，“吃一堑，长一智”。如果你能从中吸取教训，认真地分析错误的所在和产生的原因，研究出正确的解题方法，却会使你感到“豁然开朗”，加深对于基本知识的理解，增长解题的才能。所以，从这个意义上说，善于从错误的解答中找出错误所在，并加以订正，也是学习数学，提高分析问题、解决问题能力的一种有效方法。

正是根据上述这个道理，我们选择初中同学在学习数学时常发生的一部分解答错误，编写成本书，以供正在初中学习的少年课外练习参考。

要使学习得到更多的收益，必须善于进行独立的思考。在这本书里，我们有意地将每一篇(每篇一题或若干题)都排成两页，前一页为有错误的解答，后一页为对错误的分析及正确的解答。其目的，就是为了便于读者先对错误的解答作出自己的分析和订正，然后再与后页的分析与解答加以比较。应当指出，我们所作的分析不一定很恰当，所提供的解题方法也不一定是最好的，读者完全可以发挥自己的聪明才智，作出更

好的分析和解答。

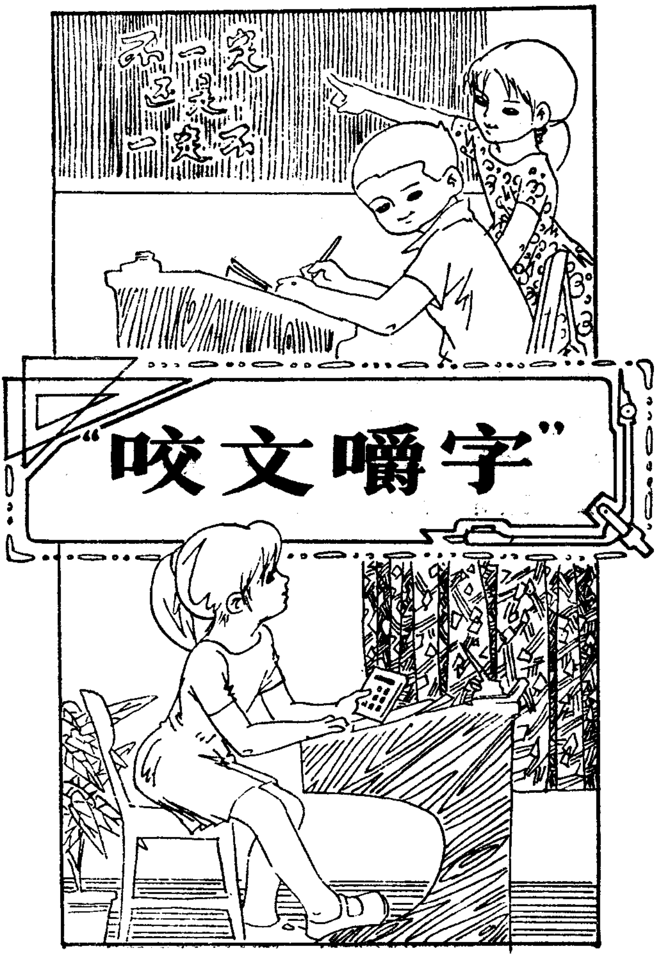
另外，本书的各部分内容，大致上是按代数、几何的顺序编排的。少年读者可以结合课内学习的内容选阅。

本书在编写中曾得到薛福田、严华祥、余应龙、康士凯、潘祖容、沈树楷等同志的热情帮助，有些同志提供了部分素材，谨在此表示深切的感谢！

编著者

一九八一年十一月

目　　录


不一定
还是
一定不
“咬文嚼字”

“咬文嚼字”，本意是过分地斟酌字句。我们在这里借用这个词，并加上引号，目的是为了强调在解数学题时斟酌字句和数学符号的重要性。

数学上的每一个概念、判断及其推理，都是用语言文字和数学符号来表达的。所以，不论是运算求解，还是作图论证，细细地斟酌字句和符号的含义，正确地理解和运用它们，都是十分必要的。有些同学没有注意到这一点，因而发生了许多解答错误。通过下面各篇的分析，你一定会尝到其中的“滋味”，并从中获得许多有益的启示。

“不一定”与“一定不”

数学老师也象语文老师那样，常常喜欢“咬文嚼字”。有一次，老师用“不一定”与“一定不”两个词，就数与数之间的关系，口述了一长串命题，要同学作出判断：哪些是错误的？哪些是正确的？

（1）质数一定不是偶数。

（2）合数一定不是奇数。

（3）自然数不一定有约数。

（4）正整数不一定可以因数分解。

（5）一个数的相反数不一定是负数。

（6）一个数的倒数一定不大于1。

（7）一个数的绝对值不一定是它自己。

（8）分数不一定可化为有限小数。

（9）无限小数一定不可以化为分数。

(10) 两个自然数的和与积一定仍是自然数，而它们的差与商不一定仍是自然数。

(11) 两个整数的和、差、积仍是整数，而它们的商不一定仍是整数。

(12) 两个有理数的和、差、积、商仍是有理数；两个无理数的和、差、积、商不一定仍是无理数。

(13) 有理数开平方不一定是有理数；无理数开平方不一定是无理数。

现在请你也试着判断一下，尝尝“咬文嚼字”的滋味。

【分析】

（1）错的。质数 2 是偶数。其他所有质数都不是偶数。

（2）不对。例如奇数 9 就是一个合数。

（3）也不对。1 有唯一的正约数 1；此外，每一个自然数至少有两个当然约数——本身与 1。

（4）不对。正整数不一定可以质因数分解。

（5）对。负数的相反数是正数。

（6）错的。例如$\frac{1}{2}$的倒数是 2，它大于 1。

（7）对的。正数和 0 的绝对值才是它们自己，而负数的绝对值等于它的相反数。

（8）对。例如$\frac{1}{3}=0.333\cdots$，就是一个无限小数。

（9）不对。无限不循环小数不可以化为分数，如 $\pi=3.141592659\cdots$，不能用分数表示。而无限循环小数一定可以用分数来表示，例如 $0.232323\cdots=\frac{23}{99}$。

(10)和(11)都是正确的。

(12) 正确的。前一句，“商”的情形，除数当然不能为零。后一句举例如下：$\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})=1$，$\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)=1$，$(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})=1$，$\sqrt{2}\div\sqrt{2}=1$。

(13) 前一句正确。例如，$\sqrt{4}=2$ 是有理数；$\sqrt{5}$ 就是无理数。后一句不对。无理数开平方一定仍是无理数。可用反证法证明：设 a 是无理数。如果$\sqrt{a}$不是无理数，即$\sqrt{a}$是有理数，记$\sqrt{a}=b$——有理数，两边平方得 $a=b^2$。由于 b^2 是有理数，而 a 是无理数，两者不能相等。

填 箭 头

下面是一份答卷。试卷要求学生从三种箭头："$\Longrightarrow$"、"$\Longleftarrow$"、"$\Longleftrightarrow$"中适当地选一个，填在圆括号(　)内；如果没有适当的，就不填。现在请你批改，哪些做对？哪些做错？做对的，在题后方括号[　]内，打上"$\surd$"号；做错的，替他订正在[　]内。

(1) $x=y$ $(\Longleftrightarrow)$ $x^2=y^2$。 [　]

(2) $x=y$ $(\Longrightarrow)$ $x^3=y^3$。 [　]

(3) $x=y$ $(\Longleftrightarrow)$ $|x|=|y|$。 [　]

(4) $x=y$ $(\Longleftrightarrow)$ $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}$。 [　]

(5) $x=y$ $(\Longrightarrow)$ $\sqrt{x}=\sqrt{y}$。 [　]

(6) $x=y$ $(\Longleftrightarrow)$ $\lg x=\lg y$。 [　]

(7) $x=y$ $(\Longrightarrow)$ $\sin x=\sin y$。 [　]

(8) $x=y$ $(\Longrightarrow)$ $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} y$。 [　]

(9) $x=y$ $(\Longleftrightarrow)$ $\frac{x}{y}=1$。 [　]

(10) $x^2=y^2$ $(\Longleftrightarrow)$ $x=y$ 或 $x=-y$。 [　]

(11) $x^2=y^2$ $(\Longleftrightarrow)$ $|x|=|y|$。 [　]

(12) $x^3=y$ $(\Longleftarrow)$ $x=\sqrt[3]{y}$。 [　]

(13) $x=y^2$ $(\Longrightarrow)$ $x^2=y^4$。 [　]

(14) $x=y=z$ $(\Longleftrightarrow)$ $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$。 [　]

【分析】

（1）错。应改为“$\Longrightarrow$”。例，$(-2)^2=2^2$，但$-2\neq 2$。

（2）错。应改为“$\Longleftrightarrow$”。因为，

$$x^2+xy+y^2=x^2+xy+\frac{1}{4}y^2+\frac{3}{4}y^2=\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2>0,$$

$$x=y\Longleftrightarrow x-y=0\Longleftrightarrow(x-y)(x^2+xy+y^2)=0$$

$$\Longleftrightarrow x^3-y^3=0\Longleftrightarrow x^3=y^3。$$

（3）错。应改为“$\Longrightarrow$”。例，$|-2|=|2|$，但$-2\neq 2$。

（4）错。应改为“$\Longleftarrow$”。例，当$x=0$，$y=0$时，右边无意义，左边仍然成立。

（5）错。应改为“$\Longleftarrow$”。例，当$x=-1$，$y=-1$时，左边成立，右边无意义。

（6）错。应改为“$\Longleftarrow$”。例，当$x=-1$，$y=-1$时，左边成立，右边无意义。

（7）对。

（8）错。应该不填。$90°=90°$，但是$\mathrm{tg}90°$无意义。

（9）错。应改为“$\Longleftarrow$”。$0=0$，但$\frac{0}{0}$无意义。

(10)、(11)、(13) 对。 (12) 错。这道题应改为“$\Longleftrightarrow$”。

(14) 对。证明如下：显然，“$\Longrightarrow$”成立。再证“$\Longleftarrow$”：

$$x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$$

$$\Longrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2=2xy+2yz+2zx$$

$$\Longrightarrow(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)=0$$

$$\Longrightarrow(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$$

$\Longrightarrow x-y$、$y-z$、$z-x$ 同等于 0

$\Longrightarrow x=y=z$。

请作判断

对于不等式性质的运用，许多同学常常出错。下列推理哪些对？哪些错？请作判断。如果是错的，举一反例说明。

(1) $a>b \Longrightarrow b<a$。

(2) $a>b$，$b>c \Longrightarrow a>c$。

(3) $a>b \Longrightarrow a\pm c>b\pm c$。

(4) $a>b \Longrightarrow ac>bc$。

(5) $a>b \Longrightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{c}$。

(6) $a>b \Longrightarrow a^2>b^2$。

(7) $a>b \Longrightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$。

(8) $a>b \Longrightarrow \sqrt{a}>\sqrt{b}$。

(9) $a>b \Longrightarrow |a|>|b|$。

(10) $a>b \Longrightarrow \lg a>\lg b$。

(11) $\alpha>\beta \Longrightarrow \sin\alpha>\sin\beta$。

(12) $\alpha>\beta \Longrightarrow \cos\alpha<\cos\beta$。

(13) $\alpha>\beta \Longrightarrow \mathrm{tg}\,\alpha>\mathrm{tg}\,\beta$。

(14) $\alpha>\beta \Longrightarrow \mathrm{ctg}\,\alpha<\mathrm{ctg}\,\beta$。

(15) $a>b$，$c>d \Longrightarrow a+c>b+d$。

(16) $a>b$，$c>d \Longrightarrow a-c>b-d$。

(17) $a>b$，$c>d \Longrightarrow ac>bd$。

(18) $a>b$，$c<d \Longrightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{d}$。

【分析】

(1)、(2)、(3)和下面的(15)都正确。(4) 错。反例：$3>2$，但$3\times(-1)<2\times(-1)$。$a>b, c>0 \Longrightarrow ac>bc$。

(5) 错。反例：$3>2$，但$\frac{3}{-1}<\frac{2}{-1}$。$a>b, c>0 \Longrightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{c}$。

(6) 错。反例：$3>-4$，但$3^2<(-4)^2$。$a>b>0 \Longrightarrow a^2>b^2$。

(7) 错。反例：$3>-2$，但$\frac{1}{3}>\frac{1}{-2}$。$a>b>0 \Longrightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$。

(8) 错。反例：当$b=-1$时，$\sqrt{-1}$无意义。$a>b>0 \Longrightarrow \sqrt{a}>\sqrt{b}$。

(9) 错。反例：$3>-4$，但$|3|<|-4|$。

(10) 错。反例：取$b=-1$，$\lg(-1)$无意义。$a>b>0 \Longrightarrow \lg a>\lg b$。

(11) 错。反例：$150°>60°$，但$\sin150°<\sin60°$。

(12) 错。反例：$350°>30°$，但$\cos350°>\cos30°$。

(13) 错。反例：$120°>30°$，但$\operatorname{tg}120°<\operatorname{tg}30°$。

(14) 错。反例：$210°>60°$，但$\operatorname{ctg}210°>\operatorname{ctg}60°$。只有当$90°>\alpha>\beta>0°$时，(11)～(14)的推理才是正确的。

(16) 错。反例：$4>3, 2>-1$，但$4-2<3-(-1)$。

(17) 错。反例：$5>2, -1>-2$，但$5\times(-1)<2\times(-2)$。

(18) 错。反例：$10>4, -2<-1$，但$\frac{10}{-2}<\frac{4}{-1}$。当$a$、$b$、$c$、$d$都大于0时，(18)的推理是正确的。

一 字 之 差

题：不解方程 $$2x^2+x-1=0,$$
求作一个一元二次方程，使它的一个根是上述方程两根差的倒数，另一个根为上述方程两根的立方和。

解：设方程 $2x^2+x-1=0$ 的两根为 x_1、x_2，则

$$x_1+x_2=-\frac{1}{2},\quad x_1\cdot x_2=-\frac{1}{2}。$$

又设所求方程为 $ax^2+bx+c=0$,它的两根为 α_1、α_2。则

$$\alpha_1=\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{1}{\sqrt{(x_1-x_2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}}=\frac{2}{3};$$

$$\alpha_2=x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)$$

$$=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=-\frac{7}{8}。$$

又 $$-\frac{b}{a}=\alpha_1+\alpha_2=\frac{2}{3}+\left(-\frac{7}{8}\right)=-\frac{5}{24},$$

$$\frac{c}{a}=\alpha_1\cdot\alpha_2=\frac{2}{3}\times\left(-\frac{7}{8}\right)=-\frac{14}{24}。$$

因而所求方程为 $$24x^2+5x-14=0。$$

上述解答，思路清晰，条理清楚，计算正确。可惜！就在一个字上，有概念性的错误。

【分析】

对于"差"的概念，可以理解为 x_1-x_2，也可以理解为x_2-x_1。因此，在求 α_1 的值时应为

$$|\alpha_1|=\frac{1}{|x_1-x_2|}=\frac{1}{\sqrt{(x_1-x_2)^2}}=\frac{2}{3}。$$

如果$\alpha_1=\frac{2}{3}$，所求方程为 $24x^2+5x-14=0$。

如果$\alpha_1=-\frac{2}{3}$，那末

$$-\frac{b}{a}=\alpha_1+\alpha_2=\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{7}{8}\right)=-\frac{37}{24},$$

$$\frac{c}{a}=\alpha_1\cdot\alpha_2=\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{7}{8}\right)=\frac{14}{24},$$

所求方程为 $$24x^2+37x+14=0。$$

本题有两解，这两个方程都符合题意。

还应当指出，解题者由于对"差"的概念理解不全面，以致表达形式上也发生了谬误。

上页中的 $$\alpha_1=\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{1}{\sqrt{(x_1-x_2)^2}},$$

两个等式都有问题。前一个等式中忽略了

$$\alpha_1=\frac{1}{x_2-x_1},$$

从而最终答案中少掉了一个方程。后一个等式

$$\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{1}{\sqrt{(x_1-x_2)^2}},$$

表示出解题者对于算术根的概念也未正确掌握。上式仅当 $x_1-x_2>0$ 才成立；当 $x_1<x_2$ 时，上式并不成立。

数学中"差"这个字，初学者应用起来可要当心哪！