小波有限元理论及其工程应用

何正嘉　陈雪峰
李　兵　向家伟　著

科学出版社
www.sciencep.com

中国科学院科学出版基金资助出版

小波有限元理论及其工程应用

何正嘉 陈雪峰 李 兵 向家伟 著

科学出版社
北 京

内 容 简 介

本书论述了小波有限元的基础理论，介绍了小波多分辨分析，以及Daubechies小波、区间B样条小波和第二代小波的基本性质；探讨了小波多分辨分析对于有限元解空间逐层嵌套逼近的本质，构造了一系列一维和二维Daubechies小波、区间B样条小波以及第二代小波有限元单元；运用小波有限元方法进行了非线性几何大变形、温度场大梯度和结构裂纹定量辨识等问题的理论与实验研究，应用于办公机械送纸机构改进设计、印刷包装行业烫金模切机和铁路运输轨道转辙机裂纹故障诊断工程实践。

本书可作为机械、能源、航空航天等专业的大学本科生和研究生的参考书或教学用书，也可供相关领域从事有限元动态分析与动态设计、机械监测诊断的科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

小波有限元理论及其工程应用/何正嘉等著. —北京：科学出版社，2006
ISBN 7-03-016560-8

I. 小… II. 何… III. 小波分析-有限元法-应用-工程技术 IV. TB115

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第142888号

责任编辑：鄢德平 于宏丽/责任校对：赵桂芬
责任印制：安春生/封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006年4月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2006年4月第一次印刷 印张：20 1/2
印数：1—2 500 字数：387 000

定价：50.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈科印〉)

前 言

有限元法自问世以来，在工程数值分析中发挥了重要的作用，其应用范围已拓展到机械、能源、航空航天和国防等许多工程技术领域。进入21世纪，有限元法在不断扩大应用范围的同时，自身的理论和方法也在不断地发展。广义协调元、理性有限元、复合单元、无单元等新型有限元方法被相继提出，这些方法解决了工程实践中的许多疑难问题。然而，如何高效精确地求解工程中诸如裂纹局部应力集中、突变温度边界条件等奇异性问题，仍然是一类尚未很好解决的难题。法国综合理工大学和美国纽约大学教授S. Mallat在2001年指出："小波理论的形成是数学家、物理学家和工程师们多学科共同努力的结果，他们认识到他们一直在不同的领域内发展着相同的思想。在信号处理中，这种联系汇聚成思想的河流，它不仅带来了新的基和变换，而且还在向前奔腾。"小波理论的强劲发展势头也无例外地进入到有限元法领域，本书作者致力于将信息科学领域中的小波理论与有限元变分原理相互交叉融合，以期产生新的生长点，丰富有限元基础理论，并为工程奇异性问题提供新的分析工具。美国MIT学者Amaratunga在2003年预言"不久的将来，凡用到有限元的地方就会用到小波"，小波有限元是未来有限元发展中具有潜力的方向之一。

小波有限元法是一种优于传统单元网格加密和插值函数阶次升高的自适应有限元算法，它最大的长处是利用小波函数具有的多尺度(multiscale)、多分辨(multiresolution)与紧支性(compact support)这些善于分析非平稳信号的特性，用来求解有限元分析中的奇异性等问题，可以根据实际需要任意改变分析尺度，使在变化梯度小的求解域用大的分析尺度，而变化梯度大的求解域则采用小的分析尺度，算法的数值稳定性好、运算速度快、求解精度高，在处理工程奇异性等问题中具有诱人的优越性。近十年来小波有限元法的研究受到了国内外学者的高度重视，已成为国际数值计算领域研究的热点之一。

目前，小波有限元的研究还处于起步阶段，研究论文主要散见于各类期刊和会议论文集，尚缺乏一本系统而又较详尽地反映当前研究状况的书籍，使读者可以在较短的时间里对小波有限元有一个概括的了解，以便在现有基础上做出新的努力和贡献。2003年，法国学者Cohen出版的专著*Numerical Analysis of Wavelet Methods*，从逼近论和函数空间角度阐明了小波多分辨数值分析的本质，并对算法的收敛性给出了严格的数学证明。然而，书中给出的应用仅集中在偏微分方程求解领域，对于机械、能源、航空航天和国防等工程实际中存在的问题尚未涉及。

本书作者长期从事机械信号处理及结构有限元分析领域的研究，对不同的小波基，如Daubechies、Laplace、Hermitian、谐波小波、样条小波等的构造方法及函数特性开展了深入研究；掌握了基于插值细分原理计算第二代小波提升算法中预测系数与更新系数的方法，并将它们与有限元理论紧密结合，发展了新型小波有限元。

本书总结了作者近十年关于小波有限元理论的研究及应用实践，广泛吸取了国内外学者在小波数值分析领域的研究成果，论述了小波多分辨分析理论、有限元变分原理及其相互关系，重点讨论了小波基函数作为有限元插值函数的小波基单元构造方法，及其在办公设备纸张运动分析和裂纹故障诊断等工程实际问题中的应用效果。本书旨在抛砖引玉地将作者所研究的小波有限元的原理和方法全面、详细和系统地介绍给广大科技工作者，期望他们能够更好地了解小波有限元、广泛应用小波有限元、深入发展小波有限元。

全书共分 9 章。第 1 章和第 2 章阐述了构造新型小波有限元的背景、目的和思路，介绍了小波分析的基本原理和有限元空间，是后续章节的基础；第 3 章和第 5 章分别构造了一维 Daubechies 小波、区间 B 样条小波单元；第 4 章和第 6 章进一步构造了相应的二维 Daubechies 小波、二维区间 B 样条小波单元；为了构造更丰富的小波基单元，吸取了小波理论的最新进展，第 7 章利用第二代小波提升方法和插值细分原理，介绍了所研究的第二代小波自适应有限元算法；第 8 章和第 9 章利用小波有限元适宜高精度计算和奇异性求解的优越性，分别介绍了小波有限元分析办公纸张几何非线性大变形、温度场突变大梯度问题，以及裂纹奇异性建模和定量识别，成功地应用于办公机械送纸机构改进设计、烫金模切机分度凸轮轴和铁路轨道转辙机驱动螺杆裂纹故障诊断。

为了便于读者的理解，用经典有限元考题和工程实例分析来阐述基本原理和作者的观点，努力使本书在以下几个方面形成特点：

(1) 立足学科前沿，吸取国内外的最新研究成果，总结作者在小波有限元研究和应用中的新进展，内容具有先进性和新颖性。

(2) 从基本概念入手，讨论了计算数学、力学、故障诊断等课题中的奇异性问题，重点放在小波单元的构造方法与工程应用上。作者用大量的例题来说明小波有限元法的原理和方法。本书具有实用性，特别适合希望能尽快掌握小波有限元法以便解决各种实际问题的科技工作者和工程师们。

(3) 本书内容由浅入深、循序渐进，具有可读性，各章内容既相互关联，又各成体系，便于读者根据需要参考使用。

作者自 1992 年开始，在国内开展小波理论及其工程应用研究，取得了一定的研究成果。其中，“大型机械设备变工况非平稳监测诊断关键技术”获 1999 年国家科技进步三等奖，已发表与本书有关的研究论文 150 余篇，出版论著 4 部。本书是基于前期的研究基础撰写而成，作者深深地感到所做的工作只是小波有限元

大山上的一筐土。孔子说："譬如平地，虽覆一篑，进，吾往也。"本书的问世，如同在平地上用土堆山，虽然只倒下了一筐土，但立志前进，持之以恒。作者决心在今后将继续深入研究和探索，与本领域的志士同仁共同堆起小波有限元理论和方法的大山。

所研究课题得到了国家自然科学基金重点项目(50335030：大型复杂机电系统早期故障智能预示的理论与技术)、国家重点基础研究发展计划(973 计划，2005CB724100：数字化制造基础研究)、自然科学基金面上项目(50505033：第二代小波有限元理论与转子裂纹定量识别的研究)、面上项目(59775023：特征波形混合基信号分解理论和应用研究)、高校博士点基金(20040698026：小波有限元理论与转子横向裂纹故障诊断)和国际合作项目"办公设备运动纸张的动态分析与动态仿真"课题的资助。本书的出版又得到中国科学院科学出版基金的资助。对这些宝贵的资助，作者由衷地表示感谢！

感谢西门子铁路信号公司、西安科达机器人技术股份有限公司、河北玉田印刷机械公司、西固热电厂、济南炼油厂、日本理光公司、日本九州工业大学和三重大学等有关单位的支持与配合。

作者忘不了赵纪元博士、訾艳阳博士在小波理论及实用诊断技术和马军星博士在 Daubechies 小波有限元构造及工程应用方面为作者所在研究室做出的开创性贡献。感谢杨胜军博士在样条小波有限元及其应用取得的突破性进展，感谢薛继军博士在小波有限元及钻机井架分析中取得的实用研究成果，感谢段晨东博士、姜洪开博士在第二代小波理论与应用方面所做出的显著成绩。作者还必须感谢博士生何育民、董洪波在第二代小波有限元和裂纹分析诊断等方面取得了承前启后的研究进展，以及为书稿完成的文字工作。作者对科学出版社为本书的出版做出的辛勤劳动表示诚挚的谢意！

本书可作为大学本科生和研究生的参考书或教学用书，也可供从事有限元动态分析与动态设计、机械监测诊断的科技工作者参考。由于作者水平所限，书中难免会有疏漏和不妥之处，殷切希望读者给予批评和指正。

作　者

2005 年 9 月

目　　录

第1章　绪　　论

1.1　有限元法的发展

信息化技术和经济全球化给制造业带来了空前的挑战。企业必须应对快速、严峻、多变的市场竞争，必须提高产品设计和制造能力并获得用户满意，这不仅依赖于产品设计制造信息化、数字化，而且依赖于给用户提供保证产品性能的全生命周期智能维护的能力。以有限元为基础的数值分析、仿真等技术能够为产品开发、运行和维护的各个环节(即从概念设计、虚拟原型、性能确认到监测诊断和运行维护)提供集成解决方案以及快速高效的信息化、数字化开发平台，从而提高产品质量，降低新产品成本并缩短上市时间。

在科学研究上，有限元方法实际已成为探知复杂对象本质规律的定量分析手段。有限元方法的概念是由 Turner 与 Clough 最早提出的[1]，1952 年美国加利福尼亚大学伯克利分校的学者 Clough 应邀参加了波音航空公司夏季开发小组，在波音公司结构振动分析专家 Turner 的带领下开展了三角形机翼结构分析，在经历了运用传统一维梁分析失败后，1953 年 Clough 在 Turner 的建议下，运用直接刚度位移法，成功地给出了用三角单元求得平面应力问题的正确答案[2,3]，所获得的结果于 1956 年公开发表[1]，这篇文章通常被认为是有限元提出的标志；1960 年 Clough 进一步研究了弹性问题的应力分析，并首次使用“有限元(finite element)”这一术语[4]，他选择这一术语主要用意是为了与虚功原理等经典分析方法中无穷小量的概念明确区分。

此后，很多力学家、工程师、数学家投入到有限元方法的研究与应用中。在近半个世纪里，为有限元这一博大精深理论体系做出过卓越贡献的人不胜枚举。从工程计算领域来说，Zienkiewicz 是需要提到的一位学者，他是英国威尔士(Wales)大学土木工程学院教授，担任联合国教科文组织工程数值计算委员会主席，他在等参元、板壳元列式、减缩积分、罚函数格式、误差估计和自适应有限元等方面做出了卓越贡献，这些贡献主要体现在他的 600 多篇论文与 25 部专著中。他的有限元专著从最早(1967 年)与香港大学张佑启(Y. K. Cheung)合著的《结构力学中的有限元方法》[5]，到最近(2000 年)与美国加利福尼亚大学伯克利分校 Taylor 合著的《有限元方法》第五版[6]，被译为包括中文在内的多种语言，这些专著以及他于 1968 年创办的杂志 *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 有力地推动了有限元在工程计算中的应用，为此，Zienkiewicz 获得了包括美国机械

工程学会颁发的 Timoshenko 勋章在内的多项荣誉。

我国科学家对有限元这一方法的创立和发展功不可没。冯康院士在 1957 年遵照华罗庚先生的建议由纯粹数学转入计算数学研究，于 1964 年独立于西方创立了数值求解偏微分方程的有限元方法，形成了标准的算法形态，编制了通用的计算程序，是数学机械化思想的一种生动体现[7]，部分地做到了一切问题数学化，一切数学问题代数化，一切代数问题变化为代数方程求解。及时地解决了当时我国最大的刘家峡水坝的应力分析问题[8]。首次论证了有限元方法的可靠性，给出了有限元近似解收敛性分析与最优误差估计[9]。

有限元的科技地位，由力学家和工程师奠基，由计算数学家巩固。结构力学家的努力使得有限元方法像桁架结构一样简单明了，计算程序统一规范。广大的工程师认识到有限元方法对有限与无限、连续与离散、局部与整体、简单与复杂、理论与实践等各种矛盾都处理得很恰当，因此必然在解决实际工程问题方面表现卓越。数学家的努力揭示了有限元方法的普适性，是 Ritz-Galerkin 方法的理论基础，使得有限元不局限于结构力学问题，而是求解连续体偏微分方程的一种离散化通用方法。

有限元方法在国民经济建设中发挥了重大作用。经过几十年的发展，有限元法的应用已由弹性力学平面问题扩展到空间问题、板壳问题，由静力平衡问题扩展到稳定问题、动力问题和波动问题。分析的对象从弹性材料扩展到塑性、黏弹性、黏塑性和复合材料等，从固体力学扩展到流体力学、传热学、电磁学、声学等连续介质领域。在工程分析中的作用已从分析和校核扩展到优化设计，并和计算机辅助设计相结合。在短短的几十年里，有限元方法已在机械、航天、船舶、建筑、地震、热传导、化学反应中物质的传递和扩散，以及流体和结构相互作用等科学技术领域得到了广泛的应用。文献[10]为了设计高性能宇航器的新型材料，利用有限元开展了材料的动态特性仿真分析；文献[11]利用有限元分析了铁路桥梁在火车运行工况下的振动特性，为桥梁的设计和监测提供了基础；文献[12]指出压力容器广泛应用于化工军事等行业，有限元方法为压力容器的设计和使用提供了重要理论基础；文献[13]应用变截面梁单元分析了连铸机四偏心式多连杆振动机构运动弹性动力学特性，获得了系统谐振现象的成因；文献[14]应用三维有限元分析了焊接变压器的磁场分布和损耗分布，为焊机优化设计提供了指导；文献[15]利用有限元法分析了光固化快速成形过程中零件变形的趋势，揭示了成形过程中零件变形的本质问题；文献[16]应用有限元模拟了北京地铁王府井至东单区段复杂洞群的五种工况，解决了一系列施工中的难题；文献[17]应用有限元研究了复杂油藏问题，取得了很好的效果；文献[18]建立了重力坝-库水-淤砂-地基系统动力分析的二维时域显式有限元模型，分析淤砂层饱和度及厚度对坝顶加速度反应的影响。

随着应用需求的不断增加，国际上已涌现出大批功能强大的商用有限元软件，如 ANSYS，NASTRAN，ADINA，ADKA，MARC 等。1970 年，J. A. Swanson 博士洞察到计算机模拟工程应该商品化，于是创建了 ANSYS 公司，以优化产品研发过程为目的，开发基于有限元为基础的仿真技术，这项技术领导着有限元技术的发展，博得了世界上几十万用户的钟爱，解决了生产实际中的许多问题。太原理工大学土木系在李珠教授领导下的课题组采用 ANSYS 软件成功地对我国国家大剧院进行了结构分析[19,20]，国家大剧院是我国最高级别的艺术中心，建筑面积 14 万平方米，总高度 55.73 米，地基埋深 26.10 米。课题组采用 ANSYS 软件开展了静力分析、多种载荷组合工况下的变形和结构抗震分析(响应谱分析、时间历程分析)，并验证结构设计的合理性与可靠性，计算结果为工程设计及优化提供了可靠的理论依据；广州华凌空调设备有限公司、广东美的集团股份有限公司等企业选择 ANSYS 软件作为空调产品的结构分析软件[21]，在空调设计流程中加入对整机及关键零部件的结构分析，从而提高了空调产品运输及运行过程中的可靠性，进一步改善空调的振动特性，优化了产品设计；中国核动力研究设计院以反应堆压力容器、堆内构件、燃料组件、控制棒驱动机构及其支撑结构组成的反应堆系统为分析对象，利用 ANSYS 软件对秦山核电二期工程反应堆系统进行抗震分析[22]，一方面为反应堆结构设计提供地震输入，另一方面又为抗震实验提供地震激励，取得了很好的效果。清华大学机械工程系曾攀教授在 ANSYS 平台上，进行了各种新型结构的方案设计和修改，创造性地设计了新型的双向拉索结构形式的悬索桥[23]，新型结构系统较传统结构系统在静力和动力特征方面都有很大的改善，新型双向拉索悬索桥主塔内的最大弯矩较传统结构系统有显著的降低，桥面内飘浮固有振型，自振频率较传统结构系统有很大的提高。

工程实践的应用与需求进一步推动了有限元理论的发展与完善。在网格生成技术方面，文献[24]提出了一种使用背景线指示网格生成方向的网格生成技术——堆砌法，用四边形网格划分任意二维区域，生成的网格质量较好，算法结构简单，执行速度快；文献[25]提出了基于映射法的复杂三维组合曲面的有限元网格全自动生成方法，改进了曲面网格剖分布点算法，并结合局部连接、诊断交换等技术，优化了网格的整体质量。在单元构造方面，文献[26]用双参数法构造出 12 参高精度矩形板单元；文献[27]基于 Reissner-Mindilin 板弯曲理论和 Von-Karman 大挠度理论，采用单元域内和边界位移插值一致性的概念，提出了适用的带旋转自由度的四节点板壳单元；文献[28]构造了 18 节点混合应力元，能够很好地克服实体壳元剪切闭锁现象发生；文献[29]在直角坐标系下构造了四边形位移元，可以很好地通过分片实验并具有好的分析精度。

正如文献[30]中提到：传统有限元理论成熟，原理简单，并且有强大的商业软件支持，在工程问题的数值模拟中占据着重要地位。在许多大型工程建设中，

有限元数值分析发挥了至关重要的作用，因此对传统有限元方法的每一点成功改进都将会产生深远的现实意义。近年来提出的新型有限元方法主要有：

1) 广义协调元

广义协调元是龙驭球院士于 1987 年首创的新型单元[31]。协调元在构造中要求太严，而非协调元又对单元间连接性放得太宽，龙院士以追求平均意义上保证单元间的位移协调为目标，创造性地提出了广义协调元的概念。后经众多学者多年的不懈努力，广义协调元已发展出包括薄板、厚板、薄壳、等参四大类及数十种新单元[32]；直到最近还构造了克服剪切闭锁的新型广义协调四边形厚板元[33]，以及厚薄通用的三角形三节点平板壳元[34]。这一系列广义协调单元因适应性强而得到广泛的使用。

2) 基于理性有限元哲理的复合单元法

钟万勰院士于 1996 年提出了理性有限元概念[35]，认为有限元方法论是只顾数学方便，仿佛只要采用完全低幂次多项式就可以，而对于力学要求则放在从属地位；钟院士认为应该以力学需求为主导，运用相应数学方法来推导单元，有的放矢，这就是理性有限元。曾攀教授在此基础上，研究了如何在单元内把一个经典解析位移场有效地嵌入到常规有限元位移场中去，发展了一种新的单元技术——复合单元[36,37]，既具有常规有限元的灵活性又不丢失经典力学具有的高精度，从而大大地提高了数值分析精度。

3) 样条有限元

1979 年，石钟慈院士继冯康院士之后，对有限元做出了杰出贡献，创造性地提出了样条有限元，将样条逼近与有限元巧妙结合，得到了完整的误差分析和较高的计算精度[38]。随后有很多学者在这一领域内开展了研究[39]，龙驭球院士提出了样条单元法[32]；秦荣提出了样条有限点法[40]；香港大学张佑启长期从事有限元的研究，提出了样条有限条法[41]，在国际上具有很大的影响，现主办 *Journal of Sound and Vibration* 国际期刊。这一系列的样条元成功求解了工程实践中的很多问题，取得了满意的实用效果。

4) 数值流形法

20 世纪 90 年代，留美博士石根华[42]等针对传统有限元在计算非线性大位移大变形问题的不足，发展了数值流形法。它具有统一处理不连续介质和连续介质问题的能力，具有物理网格与数学网格两套网格，常选用有限元网格作为数学网格[43]，文献[44]已构造了高精度四节点四边形流形单元，这种方法主要优势在于处理如岩体力学等大位移与大变形问题。

5) 无网格法

无网格法(meshless)，又称无单元法[45]，它采用一系列无网格节点信息，及其局部支撑域上的权函数来实现局部化精确逼近，有效地克服了传统有限元网格划

分在求解随时间变化的不连续和大变形时遇到的困难。美国西北大学工程力学系学者 Belytschko 在这方面开展了大量的研究[46]，Zienkiewicz 等一批有限元学者对无网格法从不同角度开展了研究，现已出现十多种形式[47]。无网格法在求解精度与效率方面还需要开展更多的研究[48]。

上述这些新型有限元的发展，不仅为我们构造其他新型有限元提供了很好的思路，而且其发展历程体现了对客观世界的认识是一个不断扩展、逐渐深化的过程。在工程应用领域中这一过程主要表现为新问题的发现、新方法的提出和新理论的建立。每一次理论的创新总是与工程实践中遇到的具体问题密不可分，本书所著述的小波有限元理论也不例外。小波有限元主要是针对传统有限元在计算大梯度、裂纹等奇异性问题方面存在的不足而提出的。小波分析是近十几年来迅速发展起来的全新的数值分析方法，它最大的长处是具有多尺度(multiscale)、多分辨(multiresolution)的特性，能够提供多种基函数作为有限元插值函数，由此构造的小波基单元可以根据实际需要任意改变分析尺度，使在变化梯度小的求解域用大的分析尺度，而变化梯度大的求解域则采用小的分析尺度。这是一种优于传统单元网格加密和插值函数阶次升高的自适应有限元算法，这种变尺度算法数值稳定性好、运算速度快、求解精度高。此外，小波基函数还具有优良的紧支性(compact support)，使得小波基函数可以聚焦到研究对象的任意细节，被数学家和工程师们誉为“数学显微镜”，因而小波有限元用于处理工程中大梯度、裂纹局部应力集中等奇异性问题具有诱人的优越性。

1.2 小波有限元理论的发展、现状与未来

小波的形成是数学家、物理学家和工程师们多学科共同努力的结果。小波变换的概念是由法国 Elf Acquitaine 公司的 Morlet 工程师在 1982 年进行信号分析时引入的[49]。Morlet 为了给自己提出的小波变换找到精确的理论依据，与法国从事量子力学研究的理论物理学家 Grossman 合作，Grossman 随后投入这项研究并精确地推演了 Morlet 提出的积分变换[50]。随后，法国数学家 Meyer 在经典调和分析与小波变换之间架起了关键桥梁，创造性地构造出二进伸缩、平移小波基函数[51]。Mallat 将计算机视觉领域的多尺度分析的思想引入到小波分析中，巧妙地构造了小波的多分辨分析，统一了前人所提出的各类正交小波构造方法，提出了塔形快速算法[52~54]。比利时人 Daubechies 在此基础上，用迭代的方法构造出了著名的紧支规范正交 Daubechies 小波[55,56]。此后，新的具有不同性质的小波基函数不断地被提出。1995 年，美国 Bell 实验室计算科学研究中心算法研究室负责人 Sweldens 提出了一种不依赖于傅里叶变换的新的小波构造方法——提升方法(lifting scheme)，称之为第二代小波(second generation wavelet)或整数小波变换[57]。这种小波基构造方

法的特点是直接在时域完成，同时也保留了第一代小波多分辨的特性。

小波理论飞速发展的同时，对小波应用的研究也异常活跃[58~61]。现在，小波分析的应用领域十分广泛，它包括：数学领域的许多学科；信号分析、图像处理；量子力学、理论物理；军事电子对抗与武器的智能化；计算机分类与识别；音乐与语言的人工合成；医学成像与诊断；地震勘探数据处理；大型机械的故障诊断等方面。例如，在数学方面，它已用于数值分析、曲线曲面构造、微分方程求解、控制论等；在信号分析方面的滤波、降噪、压缩、传递等；在图像处理方面的图像压缩、分类、识别、诊断、去污等；在医学成像方面的减少B超、CT、核磁共振成像的时间，提高分辨率等；在故障诊断方面的时频特征分析、故障特征提取、信号奇异点检测、噪声去除与弱信号提取、振动信号压缩及系统参数辨识等。

小波在数值计算中的应用比在信号处理方面的应用稍晚。1991年左右，美国Aware 公司的几位研究人员，以及美国科罗拉多州(Colardo)州立大学应用数学系的学者 Beylkin 最早开展小波用于数值计算的研究，分别以会议论文[62]、军方 AD 报告[63]以及正式期刊[64,65]的形式体现，计算中均采用了 Daubechies 小波。随后法国数学研究所的 Jaffard 论证了小波求解偏微分方程的优越性，并构造了周期小波求解椭圆方程[66,67]。德国 IGPM 所的 Dahmen 以及美国印第安纳州大学的 Chen 开展了相关的研究[68,69]。早期的这些研究文献产生了巨大的影响，并极大地推动了小波在数值计算中的应用。

此后，有很多研究机构和大学投入到这一领域的研究。其中 Dahmen 以及他所在的 IGPM 所的研究非常活跃[70,71]，Dahmen 于 2001 年发表了求解微分方程的小波方法的研究进展[72]，文中论述了小波多分辨以及小波的紧支性、消失矩特性、范数等价特性与求解方程的优越性和普适性的关系。基于小波理论在数值计算中的重要性，欧盟 1997 年斥巨资联合 9 个研究所，其中包括意大利应用数学研究所(由 Bertoluzza S 负责)、德国 IGPM 所(由 Dahmen 负责)、法国 Jacques-Louis Lions 研究所(由 Cohen A 负责)，开展了著名的为期 5 年的 EU-TMR(training and mobility for researchers)网络研究计划，研究内容为“数值仿真中的小波多尺度方法(wavelets and multiscale methods in numerical simulation)”，研究内容主要包括基于小波的多分辨方法求解重要科学技术领域的微分方程与积分方程。在这个项目的研究过程中，有很多新颖的算法和思想是以研究报告的形式体现。其中，Bertoluzza 在小波配点法、小波数值算法的误差估计、收敛性等问题开展了研究[73~76]；Cohen 在小波有限容积法、小波多尺度算法方面开展了研究[77,78]；文献[79]研究了任意区域上的小波伽辽金法。美国 MIT 应用小波有限单元对微观尺度下的分子结构进行了研究[80,81]；美国纽约州立大学研究了离散小波伽辽金(Galerkin)方法[82]；美国 Bell 实验室计算科学研究中心算法研究室负责人 Sweldens 进行了一系列小波在数值分析中的应用研究[83]；此外美国密歇根州立大学、法国结构力学与耦合系统实验室