中国科学院研究生院教材
Textbooks of Graduate University of Chinese Academy of Sciences

科学计算中的偏微分方程有限差分法

张文生　编著

Finite Difference Methods for Partial Differential Equations in Science Computation

高等教育出版社
Higher Education Press

中国科学院研究生院教材

Textbooks of Graduate University of Chinese Academy of Sciences

科学计算中的偏微分方程有限差分法

张文生　编著

Finite Difference Methods for Partial Differential Equations in Science Computation

高等教育出版社
Higher Education Press

内容提要

本书系统介绍了偏微分方程有限差分法数值求解的基本理论方法及最新成熟成果。内容包括科学计算中典型的椭圆型方程、双曲型方程和抛物型方程的差分格式构造与理论分析，以及差分方程求解的各种经典和新型的迭代方法，对流体力学方程的差分方法也作了适度的专题介绍。全书侧重于处理问题的一般性方法阐述，又强调问题的物理解释。

本书可作为计算数学专业、应用数学专业等有关专业的研究生教科书或参考书，也可供有关科技人员、教师和高年级大学生参考。

图书在版编目（CIP）数据

科学计算中的偏微分方程有限差分法 / 张文生编著.
北京：高等教育出版社，2006.6
ISBN 7-04-019229-2

Ⅰ.科… Ⅱ.张… Ⅲ.偏微分方程 —差分法
Ⅳ.O175.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第069282号

策划编辑 郭　伟　**责任编辑** 郭　伟　**封面设计** 王凌波　**责任印制** 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800－810－0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京嘉实印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	**版　　次**	2006年6月第1版
印　　张	24.5	**印　　次**	2006年6月第1次印刷
字　　数	500 000	**定　　价**	39.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　19229－00

中国科学院研究生院教材编审委员会

主　任：白春礼

顾　问：余翔林

副主任：马石庄（常务） 刘志鹏 韩兴国 苏　刚

委　员(按姓氏笔划排列)：

石耀霖　李家春　李伯聪　李　佩　刘嘉麒　张文芝

张增顺　吴　向　汪尔康　汪寿阳　杨　乐　徐至展

阎保平　黄荣辉　黄　钧　彭家贵　裴　钢　谭铁牛

数学学科编审组

主　编：杨　乐

副主编：彭家贵

编　委：王世坤　李克正　李炳仁　陈希孺

邹国华　袁亚湘　曹礼群

总 序

在中国科学院研究生院和高等教育出版社的共同努力下，凝聚着中国科学院新老科学家、研究生导师们多年心血和汗水的中国科学院研究生院教材面世了。这套教材的出版，将对丰富我院研究生教育资源、提高研究生教育质量、培养更多高素质的科技人才起到积极的推动作用。

作为科技国家队，中国科学院肩负着面向国家战略需求，面向世界科学前沿，为国家作出基础性、战略性和前瞻性的重大科技创新贡献和培养高级科技人才的使命。中国科学院研究生教育是我国高等教育的重要组成部分，在新的历史时期，中国科学院研究生教育不仅要为我院知识创新工程提供人力资源保障，还担负着落实科教兴国战略和人才强国战略，为创新型国家建设培养一大批高素质人才的重要使命。

集成中国科学院的教学资源、科技资源和智力资源，中国科学院研究生院坚持教育与科研紧密结合的"两段式"培养模式，在突出科学教育和创新能力培养的同时，重视全面素质教育，倡导文理交融、理工结合，培养的研究生具有宽厚扎实的基础知识、敏锐的科学探索意识、活跃的思维和唯实、求真、协力、创新的良好素质。

研究生教材建设是研究生教育中重要的基础性工作。由一批活跃在科学前沿，同时又具有丰富教学经验的科学家编写的中国科

学院研究生院教材，适合在校研究生学习使用，也可作为高校教师和专业研究人员的参考书。这套研究生教材内容力求科学性、系统性、基础性和前沿性的统一，使学习者不仅能获得比较系统的科学基础知识，也能体会蕴于其中的科学精神、科学思想、科学方法，为进入科学研究的学术殿堂奠定良好的基础；优秀教材不但是体现教学内容和教学方法的知识载体、开展教学的基本条件和手段，也是深化教学改革、提高教育质量、促进科学教育与人文教育结合的重要保证。

“十年树木，百年树人”。我相信，经过若干年的努力，中国科学院研究生院一定能建设起多学科、多类型、多品种、多层次配套的研究生教材体系，为我国研究生教育百花园增添一枝新的奇葩，为我国高级科技人才的培养作出新的贡献。

中国科学院 常务副院长
中国科学院研究生院 院长
中国科学院 院士

白春礼

二〇〇六年二月二十八日

前　言

在科学计算中经常要数值求解各类偏微分方程, 有限元、有限差分法和有限体积法是最重要的常用方法. 本书是作者在多年科研实践和教学经验的基础上, 为高年级大学生和研究生学习偏微分方程有限差分方法而编写的教材或教学参考书.

全书共分八章. 第一章是预备知识, 介绍一些重要基本概念和重要定理. 第二章介绍差分近似导数的各种方法, 及差分格式的 Fourier 误差分析. 第三章介绍差分格式的收敛性、相容性和稳定性的分析, 重点介绍稳定性分析的 Fourier 级数法和矩阵分析法. 第四章介绍椭圆型方程的差分方法, 包括基于变分原理的差分方法. 第五章介绍差分方程的迭代求解, 包括经典迭代方法、Krylov 子空间的各种迭代方法和多重网格法. 第六章介绍抛物型方程的差分方法, 包括算子形式的热传导方程. 第七章介绍双曲型方程的差分方法, 包括差分格式的耗散和频散分析、基于快速 Fourier 变换的伪谱法. 最后, 第八章对流体力学方程的重要差分方法作了简要介绍.

为适应不同专业, 特别是非计算数学或应用数学专业的需要, 本书尽量避免过多的数学理论, 叙述由浅入深, 力求翔实, 特别是关键性的步骤, 并配以较多的例题, 以使读者能更好地自学和掌握. 本书强调处理问题的一般性方法, 注重方法之间的内在联系和物理解释, 努力在课程学习与将来的课题研究之间架起一座桥梁, 使所学知识得以延伸, 或直接用于自己的研究, 或引向有关前沿课题的研究, 或启发更多更大的创新. 如能达到这些目标, 那正是作者所期望的.

本书内容丰富, 在教学中可选重点章节讲解, 其余留作自学. 读者也可根据自身专业需要, 侧重阅读相关内容. 阅读本书, 只要具备大学数学分析、数值线性代数的基础就不会有实质性困难.

作者在编写本书过程中, 参考了 Thomas 等国内外有关著作 (见参考文献), 这些

文献对本书反映最新成熟的成果是重要的, 为此作者衷心感谢这些文献的作者. 此外, 作者要感谢中国科学院数学与系统科学研究院、计算数学与科学工程计算研究所、计算数学与科学工程计算国家重点实验室的领导、老师和同事们的指导和帮助, 感谢高等教育出版社的大力支持和编辑们的辛勤劳动, 感谢国家重点项目 “数理方程反问题与应用” (No.10431030) 在科研中所给予的支持. 由于作者学识和经验不足, 时间紧促, 书中不当甚至错误恐怕难免, 希望读者批评指正.

作者

2006 年 6 月

郑 重 声 明

目　录

第一章 基础知识

§1.1 偏微分方程基本概念

许多物理现象或过程受多个因素的影响而按一定规律在变化，描述这种现象或过程的数学形式常导致偏微分方程. 偏微分方程的一般形式是

$$F(x,y,\cdots,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\cdots,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\cdots)=0$$

其中 $x,y,\cdots$ 是自变量，u 是未知函数，$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\cdots$ 是 u 的偏导数. 一个偏微分方程中所出现的未知函数导数的最高阶数，称为该方程的**阶**，最高阶导数的幂次称为该方程的**次数**. 例如

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(\frac{\partial u}{\partial y})^3=2xy$$

是二阶一次偏微分方程，而

$$(\frac{\partial u}{\partial x})^2+2\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

是一阶二次偏微分方程. 当遇到的是相互依赖的几个偏微分方程时，先把所有方程合并成一个单独方程再确定. 例如下列方程中虽然每个都含有一阶导数，但是二阶的，即

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$u=\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$v=\frac{\partial w}{\partial y}$$

可以化为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial xy}$$

因而它是二阶的.

如果微分方程中各项关于未知函数及其各阶导数都是一次, 则称为**线性**的. 在线性微分方程中, 不带未知函数及其导数的项, 称为**自由项**. 当自由项不恒为零时, 方程称为**非齐次**的, 否则称为**齐次**的. 一个微分方程, 如果不是线性的, 但对未知函数的所有最高阶导数都是线性的, 则称为**拟线性**的; 不是线性又不是拟线性的方程, 称为**非线性**的. 例如考虑一阶方程

$$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}=c$$

当系数 a,b,c 为常数或 x,y 的函数时, 方程是线性的; 若系数还是未知函数 u 的函数, 则是拟线性的; 若还是未知函数 u 的一阶偏导数的函数, 则是非线性的. 例如

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+u=1$$

是二阶一次线性非齐次方程,

$$\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial y}=x^2$$

是一阶一次拟线性非齐次方程,

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=0$$

是一阶二次非线性齐次方程.

§1.1.1 方程的分类

考虑具有两个自变量的二阶偏微分方程

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+fu+g=0 \tag{1.1.1}$$

由上可知, 如果 a,b,c 是常数或只是 x 和 y 的函数, 则是线性的, 如果 a,b,c 是 $x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$ 的函数, 则是拟线性的, 其他情况都是非线性的. 下面是几个典型的二阶线性偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad \text{Laplace 方程}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y) \qquad \text{Poisson 方程}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \text{热传导方程}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \text{波动方程}$$