Textbooks Series For 21st Colleges of Business

Weijifenhegailulun

微积分和概率论

齐 毅 姜兴武 刘淑媛 主编

中国商业出版社

21 世纪高等商科系列教材

微积分和概率论

齐　毅
姜兴武　主　编
刘淑媛

中国商业出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分和概率论/齐毅,姜兴武,刘淑媛主编.—北京:中国商业出版社,2005.10

(21世纪高等商科基础理论系列教材)

ISBN 7-5044-5517-2/O·43

Ⅰ.微...　Ⅱ.①齐...　②姜...　③刘...　Ⅲ.①微积分-高等学校-教材　②概率论-高等学校-教材　Ⅳ.①O172　②O211

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第098678号

责任编辑:马一波

中国商业出版社出版发行

(100053　北京广安门内报国寺1号)

新华书店总店北京发行所经销

国防工业出版社印刷厂印刷

*

787×960毫米　16开　24.75印张　471千字

2005年10月第1版　2006年1月北京第1次印刷

定价:32.00元

*　*　*　*

编审说明

为适应我国国民经济的持续迅猛发展的形势，满足各部门对高素质管理人才的迫切需要，经全国高等商科学科建设指导组研究，在原“国内贸易部部编高等商科教材”的基础上，进一步进行系统配套建设。《微积分和概率论》是提高学生基本素质的公共课教材之一，现经审定，同意作为高等院校教材，也可作为成人高校、函授、自学考试以及在职培训用的教材。

在本书编写过程中，曾得到有关院校、部门以及编审者的大力支持，在此一并致以衷心感谢。

为提高本教材的质量，热诚希望各位读者提出宝贵意见，以便进一步修订和完善。

全国高等商科学科建设指导组

2005 年 6 月

前　言

高等数学是财经类高等学校学生的一门重要基础理论课。与其他基础理论课程相比，高等数学以其理论严谨、方法独特、思想深邃，在财经类学生的知识结构中，占据着十分重要的地位。诚然，学校开设的每一门课程都有它的理论和实际意义，都有它的价值观和方法论，然而，学习把握本门课程的知识内容，理解其分析问题的方法，不仅对学生的逻辑思维是一个锻炼，而且对后续课程的学习，对掌握现代有关经济管理理论，并用数学的观点方法解决实际问题都是至关重要的。

《微积分和概率论》是根据高等商科教材建设指导组委托编写的。在编写过程中，我们参阅了很多版本的高等数学教材及教学参考书，并结合了我们多年的教学实践。目的是力求使本教材能在内容上、结构上有所变化，使之更适用于当前在学的商贸类院校的学生使用。在内容上，我们删掉了一些定理的冗长的证明，注重了理论知识在经济问题中的应用。为使读者较快了解每一章的内容，在每章前设计了导读；为使学者对每章内容有更好的学习与巩固，在每章后都设计了小结和习题及选择题，以使读者更好地把握本课程的基本要求和重点、难点。本教材还把数学实验，利用 Matlab 求解数学问题列入正式内容，这在其他版本教材中是很少见到的，这也是为了使读者了解怎么用数学软件求解数学问题，掌握一些简单的求解数学问题的语言。在结构上，与其他版本的教材略有不同，我们把常微分方程列为一章，突出了常微分方程的重要性，并把利用 Matlab 求解数学问题列为一章，适应了应用新技术、新手

段解决数学计算问题的要求。

本书分为上下两篇，上篇是微积分，下篇是概率论。学习本教材，建议用 120 课时左右。学生使用本教材，在学习完每章后一定要注意研读后面的小结，认真完成由教师指导的作业题。本书的选择题、习题及复习题没设答案，目的是发掘学生的钻研精神和独立演练的能力。

本书在编写过程中，参阅了相关的教材和教学参考书，并得到不少院校、出版社和编审者的大力支持，在此一并致以衷心的感谢。

本书由齐毅、姜兴武和刘淑媛共同担任主编，由齐毅教授负责全书的结构设计和总纂。参加编写的还有赵景悦、国春光、郭金锥、宿金勇、万会芳、梁建国、王学武、刘芳、黄宇慧等。

由于我们水平有限，教材中还会存在疏漏或不妥之处，敬请读者批评和指正。

编　者

2005 年 6 月

目　录

下 篇 概 率 论

上篇

微积分

- 函数、极限与连续
- 导数与微分
- 中值定理与导数的应用
- 不定积分
- 定积分
- 无穷级数
- 常微分方程
- 多元函数微积分简介

第1章

函数、极限与连续

本章导读

本章作为微积分的基础知识，首先复习函数的有关知识，进而介绍极限和连续等重要概念，着重阐述极限的定义、性质及计算方法，并用极限方法讨论函数的连续性.

§1.1 函 数

函数是微积分最重要的概念之一，是微积分学研究的对象，也是研究现代科学技术和经济问题必不可少的基本知识.

1.1.1 实数的绝对值

有理数和无理数统称为实数，记为 R. 实数的特点是与数轴上的点之间建立一一对应关系，即数轴上的每一点都表示某个实数，而每个实数也都对应数轴上的某个点，因此，数轴亦称为实数轴. 以后我们将经常用到实数的绝对值、区间与邻域等概念，现扼要介绍如下.

1. 绝对值

一个实数 x 的绝对值，记为 $|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$

$|x|$ 的几何意义是：表示数轴上点 x 到原点 0 之间的距离；$|x-x_0|$ 表示数轴上点 x 到定点 x_0 之间的距离. 如图 1－1.

关于实数的绝对值有以下基本性质：

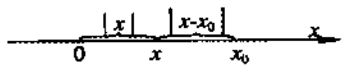

图 1-1

(1) $|x|=\sqrt{x^2}\geqslant 0$；$|x|>0 \Leftrightarrow x\neq 0$

(2) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$

(3)若 $a>0$,则

$|x|\leqslant a \Leftrightarrow -a\leqslant x\leqslant a$, $|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$

$|x|\geqslant a \Leftrightarrow x\leqslant -a$ 或 $x\geqslant a$, $|x|>a \Leftrightarrow x<-a$ 或 $x>a$

(4) $|x|\leqslant |y| \Leftrightarrow x^2\leqslant y^2$

证:由(1) $|x|=\sqrt{x^2}$, $|y|=\sqrt{y^2}$,因为 $|x|\leqslant |y|$,即 $\sqrt{x^2}\leqslant\sqrt{y^2}$,两边平方可得 $x^2\leqslant y^2$

(5) $|xy|=|x|\cdot|y|$,当 $n\in N$ 时, $|x^n|=|x|^n$;当 $y\neq 0$ 时, $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$

(6) $\big||x|-|y|\big|\leqslant |x\pm y|\leqslant |x|+|y|$

证:由 $-2|x|\cdot|y|\leqslant 2xy\leqslant 2|x|\cdot|y|$,可得

$|x|^2+|y|^2-2|x|\cdot|y|\leqslant x^2\pm 2xy+y^2\leqslant |x|^2+|y|^2+2|x|\cdot|y|$,即

$(|x|-|y|)^2\leqslant (x\pm y)^2\leqslant (|x|+|y|)^2$

从而有

$$\big||x|-|y|\big|\leqslant |x\pm y|\leqslant |x|+|y|$$

应用数学归纳法,可以证明:有限项代数和的绝对值不大于各项绝对值的和.

2. 区间与邻域

设 a、b 为任意实数,且 $a<b$,

(1)满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的全体实数 x 称为闭区间,记为 $[a,b]$,即

$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b, x\in R\}$

(2)满足不等式 $a<x<b$ 的全体实数 x 称为开区间,记为 (a,b),即

$(a,b)=\{x|a<x<b, x\in R\}$

(3)满足不等式 $a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$ 的全体实数 x 称为半开半闭区间,分别记为 $[a,b)$ 或 $(a,b]$,即

$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b, x\in R\}$

$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b, x\in R\}$

以上四种区间为有限区间,a 和 b 叫做区间的端点,量 $b-a$ 叫做区间的长度.此外,还有以下五种无限区间:

(4) $[a,+\infty)$ 表示不小于 a 的全体实数 x,即

$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x<+\infty, x\in R\}$

(5) $(a,+\infty)$ 表示大于 a 的全体实数 x,即

$(a,+\infty)=\{x|a<x<+\infty,x\in R\}$

(6)$(-\infty,+\infty)$表示全体实数 x,即

$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty,x\in R\}$

(7)$(-\infty,b]$表示不大于 b 的全体实数 x,即

$(-\infty,b]=\{x|-\infty<x\leqslant b,x\in R\}$

(8)$(-\infty,b)$表示小于 b 的全体实数 x,即

$(-\infty,b)=\{x|-\infty<x<b,x\in R\}$

这里符号“$-\infty$”,“$+\infty$”分别读作“负无穷大”、“正无穷大”,它们不是数,仅仅是个记号.

在微积分中经常用到与区间有关的邻域的概念.

点 x_0 的 $\delta(>0)$邻域是满足不等式$|x-x_0|<\delta$ 的全体实数 x. x_0 叫做邻域的中心,δ 叫做邻域的半径.如图 1-2 所示.

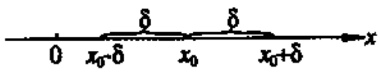

图 1-2

例如,点 $x_0=3.5$、$\delta=0.01$ 的邻域就是开区间(3.49,3.51).

而满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的全体实数 x 称为点 x_0 的 δ 空心邻域,即$\{x|0<|x-x_0|<\delta,x\in R\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$如图 1-3 所示.

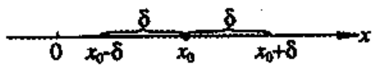

图 1-3

例如,点 $x_0=3.50$,$\delta=0.01$ 的空心邻域就是两个开区间的并集,即(3.49,3.50)∪(3.50,3.51).

1.1.2 一元函数的概念

1.一元函数的定义

定义 1.1 设有两个变量 x,y,D 是一个非空实数集.如果变量 x 在 D 内任取一个确定数值时,变量 y 按照确定的法则 f 有惟一确定的数值与之对应,则称对应法则 f 为定义在实数集 D 上的一个函数关系,简称函数,记为

$y=f(x)$

其中 x 为自变量,y 为因变量,D 为函数的定义域,记为$D(f)$.因为在 $y=f(x)$中自变量只有一个,故也称为一元函数.

若 $x_0\in D(f)$,则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处有定义;若 $x_0\overline{\in}D(f)$,则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处没有定义.对于任何一个 $x_0\in D(f)$,因变量 y 的对应值 y_0 称

为 x_0 所对应的函数值,记为 $y_0=f(x_0)$或者 $y|_{x=x_0}=y_0$

函数值的全体称为函数的值域,记为 $Z(f)$或 Z. 即:

$Z=Z(f)=\{y|y=f(x),x\in D(f)\}$

定义域和对应法则是判定函数是否相同的两个要素,即当且仅当两个函数的定义域和对应法则都相同时,它们表示同一个函数,且与变量选取无关.

例如,$y=tgx$ 与 $s=tgt$ 表示同一个函数;而 $y=log_2x^2$ 与$y=2\ log_2x$不是同一个函数,因为它们的定义域不同,前者为 0 以外的一切实数,后者是大于 0 的一切实数.

值得注意的是,值域不是判定两函数是否相同的要素,例如$y=x$ 与$y=x^3$ 的值域都是$(-\infty,+\infty)$,但它们不是同一个函数,因为对应法则 f 不同. 但是,如果两个函数的值域不同,则它们必定不是同一函数.

【例 1】 已知(1)$f(log_5x)=x^2+2x-1$

$$(2)f(\frac{1}{x})=1-f(x)log_ax,\text{求 } f(x)$$

解:(1)设$log_5x=t$,则 $x=5^t$

因为 $f(t)=5^{2t}+2\cdot5^t-1$

所以 $f(x)=5^{2x}+2\cdot5^x-1$

(2)令$\frac{1}{x}=t$,则 $x=\frac{1}{t}$

因为 $f(t)=1-f(\frac{1}{t})log_a\ \frac{1}{t}=1+f(\frac{1}{t})log_at$

所以 $f(x)=1+f(\frac{1}{x})log_ax$

因此 $f(x)=\dfrac{1+log_ax}{1+log_a^2x}$

2. 函数的表示法

常用的表示函数的方法有以下三种:

(1)表格法 就是把自变量的一系列值与对应的函数值列成表格. 例如:平方表、立方表、常用对数表、三角函数表等.

(2)图示法 就是在平面直角坐标系中,将自变量 x 和因变量y之间的对应法则用图象表示出来. 图示法的优点是简明直观,缺点是不便于理论上的分析和研究.

(3)公式法(解析法) 就是用一个或几个数学式子来表示自变量 x 和因变量 y之间的对应法则的方法. 今后我们所讨论的函数,大多数是用公式法表示的.

用公式法表示函数时,若对于自变量 x 的每一个值,因变量 y 有一个且只有一个值与其对应,则称 y 是x 的单值函数. 例如,指数函数 $y=2^x$,对数函数 $y=$

lgx 等都是单值函数;若对于自变量 x 的每一个值,因变量 y 有多于一个值与其对应,则称 y 是 x 的多值函数.例如,$y^2=x$ 便是多值函数.

在实际问题中,用公式法表示函数时,会遇到一个函数在其定义域的不同范围内用不同的数学式子来表示,用这种形式表示的函数称为分段函数.现举例如下:

【例 2】 运输部门规定:成年人乘火车携带的行李重量不超过 20 公斤的免收行李费,超过 20 公斤的部分按每公斤 a 元收费,试把行李费 y 和行李重量 x 之间的关系用公式法表示出来.

解:依题意 行李费 y 和行李重量之间的关系为

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 20\\ a(x-20), & x>20\end{cases}$$

这是个分段函数,其中点 $x=20$ 叫做函数的分段点.其图形如图 1-4 所示.

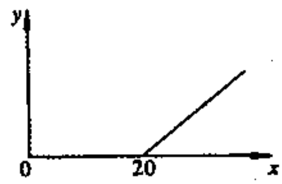

图 1-4

【例 3】 作出符号函数

$$y=sgnx=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$ 的图形.

解:当 $x>0$ 时,$y=1$,其图形是条半直线;当 $x=0$ 时,$y=0$,其图形是坐标原点;当 $y<0$ 时,$y=-1$,其图形也是条半直线.故符号函数的图形如图 1-5.

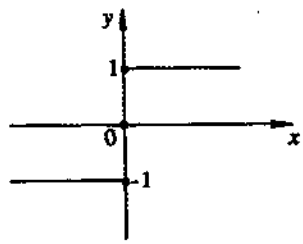

图 1-5

3.显函数与隐函数

在用公式法表示函数时,若对应法则 f 是直接用关于 x 的数学式子表示因变量 y 的,即 $y=f(x)$,称为显函数.例如 $y=sin(x+\frac{\pi}{4})$,$y=lgx+2^x$ 等都是显函数;如果对应法则 f 不是通过上述形式,而是用含有变量 x、y 的一个二元方程 $F(x,y)=0$ 或者 $F_1(x,y)=F_2(x,y)$ 给出的,称为隐函数.例如 $x^2+y^2=R^2$、$tg\frac{y}{x}=lg\sqrt{1+x}$ 等都是隐函数.有的可从方程 $F(x,y)=0$ 或者 $F_1(x,y)=F_2(x,y)$ 中解出隐函数 $y=f(x)$,称为显化,例如 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,$2x+y=4$ 等,有的则不然.例如,$3^{x^2}+lg\sqrt{1-x^2-y^2}-5=0$ 等.

4.函数的几种特性

(1)函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b)(为函数的定义域或其子集)内有定义,如果存在数 $m,M(m<M)$,使得对于任意的 $x\in(a,b)$ 所对应的函数值都满足不等式