高职高专
基础类课程规划教材

新世纪

高等数学（上册）

GAOZHI GAOZHUAN
JICHULEI KECHENG GUIHUA JIAOCAI

新世纪高职高专教材编审委员会组编
主编 黄顺发 胡明

大连理工大学出版社

新世纪

高职高专基础类课程规划教材

高等数学

(上册)

新世纪高职高专教材编审委员会组编

主编 黄顺发 胡 明 副主编 吴健辉 郑春玲 曾园根

GAO DENG SHU XUE(SHANG CE)

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上册) / 黄顺发，胡明主编 .— 大连：大连理工大学出版社，2006.8
高职高专基础类课程规划教材
ISBN 7-5611-3320-0

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①黄… ②胡… Ⅲ. 高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 092213 号

大连理工大学出版社出版
地址：大连市软件园路 80 号 邮政编码：116023
发行：0411-84708842 传真：0411-84701466 邮购：0411-84703636
E-mail：dutp@dutp.cn URL：http://www.dutp.cn
大连业发印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸：185mm × 260mm 印张：13.25 字数：295 千字
印数：1 ~ 3 000
2006 年 8 月第 1 版 2006 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑：张 丽 李大鹏 责任校对：王 礼
封面设计：波 朗

定 价：19.00 元

总　　序

我们已经进入了一个新的充满机遇与挑战的时代，我们已经跨入了21世纪的门槛。

20世纪与21世纪之交的中国，高等教育体制正经历着一场缓慢而深刻的革命，我们正在对传统的普通高等教育的培养目标与社会发展的现实需要不相适应的现状作历史性的反思与变革的尝试。

20世纪最后的几年里，高等职业教育的迅速崛起，是影响高等教育体制变革的一件大事。在短短的几年时间里，普通中专教育、普通高专教育全面转轨，以高等职业教育为主导的各种形式的培养应用型人才的教育发展到与普通高等教育等量齐观的地步，其来势之迅猛，发人深思。

无论是正在缓慢变革着的普通高等教育，还是迅速推进着的培养应用型人才的高职教育，都向我们提出了一个同样的严肃问题：中国的高等教育为谁服务，是为教育发展自身，还是为包括教育在内的大千社会？答案肯定而且惟一，那就是教育也置身其中的现实社会。

由此又引发出高等教育的目的问题。既然教育必须服务于社会，它就必须按照不同领域的社会需要来完成自己的教育过程。换言之，教育资源必须按照社会划分的各个专业（行业）领域（岗位群）的需要实施配置，这就是我们长期以来明乎其理而疏于力行的学以致用问题，这就是我们长期以来未能给予足够关注的教育目的问题。

如所周知，整个社会由其发展所需要的不同部门构成，包括公共管理部门如国家机构、基础建设部门如教育研究机构和各种实业部门如工业部门、商业部门，等等。每一个部门又可作更为具体的划分，直至同它所需要的各种专门人才相对应。教育如果不能按照实际需要完成各种专门人才培养的目标，就不能很好地完成社会分工所赋予它的使命，而教育作为社会分工的一种独立存在就应受到质疑（在市场经济条件下尤其如此）。可以断言，按照社会的各种不同需要培养各种直接有用人才，是教育体制变革的终极目的。

随着教育体制变革的进一步深入,高等院校的设置是否会同社会对人才类型的不同需要一一对应,我们姑且不论。但高等教育走应用型人才培养的道路和走研究型(也是一种特殊应用)人才培养的道路,学生们根据自己的偏好各取所需,始终是一个理性运行的社会状态下高等教育正常发展的途径。

高等职业教育的崛起,既是高等教育体制变革的结果,也是高等教育体制变革的一个阶段性表征。它的进一步发展,必将极大地推进中国教育体制变革的进程。作为一种应用型人才培养的教育,它从专科层次起步,进而应用本科教育、应用硕士教育、应用博士教育……当应用型人才培养的渠道贯通之时,也许就是我们迎接中国教育体制变革的成功之日。从这一意义上说,高等职业教育的崛起,正是在为必然会取得最后成功的教育体制变革奠基。

高等职业教育还刚刚开始自己发展道路的探索过程,它要全面达到应用型人才培养的正常理性发展状态,直至可以和现存的(同时也正处在变革分化过程中的)研究型人才培养的教育并驾齐驱,还需要假以时日;还需要政府教育主管部门的大力推进,需要人才需求市场的进一步完善发育,尤其需要高职教学单位及其直接相关部门肯于做长期的坚忍不拔的努力。新世纪高职高专教材编审委员会就是由全国100余所高职高专院校和出版单位组成的旨在以推动高职高专教材建设来推进高等职业教育这一变革过程的联盟共同体。

在宏观层面上,这个联盟始终会以推动高职高专教材的特色建设为己任,始终会从高职高专教学单位实际教学需要出发,以其对高职教育发展的前瞻性的总体把握,以其纵览全国高职高专教材市场需求的广阔视野,以其创新的理念与创新的运作模式,通过不断深化的教材建设过程,总结高职高专教学成果,探索高职高专教材建设规律。

在微观层面上,我们将充分依托众多高职高专院校联盟的互补优势和丰裕的人才资源优势,从每一个专业领域、每一种教材入手,突破传统的片面追求理论体系严整性的意识限制,努力凸现高职教育职业能力培养的本质特征,在不断构建特色教材建设体系的过程中,逐步形成自己的品牌优势。

新世纪高职高专教材编审委员会在推进高职高专教材建设事业的过程中,始终得到了各级教育主管部门以及各相关院校相关部门的热忱支持和积极参与,对此我们谨致深深谢意,也希望一切关注、参与高职教育发展的同道朋友,在共同推动高职教育发展、进而推动高等教育体制变革的进程中,和我们携手并肩,共同担负起这一具有开拓性挑战意义的历史重任。

新世纪高职高专教材编审委员会

2001年8月18日

前　言

进入21世纪，我国高等教育的发展以“质量”为重点，高职高专教育是高等教育发展和提高的一个重要组成部分。但适合高职高专各专业的《高等数学》专门教材在我国还为数不多。本书就是在我校全面进行教育改革以适应现代数学教育发展的需要，由数学与计算机系“高等数学”优质课题组成员在结合多年来的“高等数学”教学实践与教学科研成果的基础上精心编写而成的。

本书的内容基本上包含了高职、高专理工类各专业所需的高等数学内容，在编写的过程中既注意了数学的逻辑性和严谨性，又通俗易懂，说理浅显、简洁、明了，便于读者自学。教师在教学过程中可以根据各专业的特点选择所需内容。

本书在编写过程中主要有以下特点：

(1)我们在理论上坚持数学的科学性和系统性，“以实用为目的，以够用为度”的原则，注重学生的数学思想、数学思维方法的培养，概念理论部分尽量用通俗、简单、明了的语言描述。与此同时简介了概念在数学上的逻辑语言的叙述，这部分不要求学生有更深入的理解。

(2)对定积分、多元函数的重积分、级数等所涉及理论性比较强的定理、性质没有给出严格的证明，只是简单介绍了证明的思路或非严格意义上的证明。

(3)强调了对概念、性质的应用，对方法以及技巧的掌握，在举例的过程中对解题的思路和方法作了归纳总结，使读者对知识灵活应用。

(4)在内容的安排上尽量照顾到各个专业不同的特点，增加了“线性代数初步”、“概率与统计初步”知识。

我们在编写的过程中参考了国内许多版本的《高等数学》教材，吸收了他们很多优点，力图使本书能够反映高职高专自身的特点。

本书由黄顺发、胡明任主编，吴健辉、郑春玲、曾国根任副主编。具体编写分工如下：第一章的第一节、第七章由黄顺发副教授编写，第四、五、六章由胡明副教授编写，第一章(除第一节)由吴健辉副教授编写，第三章由郑春玲副教授编写，第二章由曾国根副教授编写，胡明负责了本书的全部插图与校订工作，吴健辉负责了附录Ⅰ、Ⅱ及习题编写与审核，全书由黄顺发统筹主编。

由于编者在编写的过程中时间仓促，水平有限，所以存在疏漏在所难免，恳请广大读者和专家同行批评指正。

所有意见、建议请发往：gzjckfb@163.com
联系电话：0411-84707492

编　者
2006 年 8 月

目 录

第一章 函数极限与连续 …… 1
第一节 函数的概念 …… 1
习题 1-1 …… 7
第二节 数列的极限 …… 9
习题 1-2 …… 15
第三节 函数极限 …… 15
习题 1-3 …… 22
第四节 无穷小量与无穷大量 …… 24
习题 1-4 …… 26
第五节 两个重要极限 …… 27
习题 1-5 …… 31
第六节 函数的连续性 …… 32
习题 1-6 …… 38
第七节 无穷小量的比较 …… 39
习题 1-7 …… 41
第二章 导数和微分 …… 43
第一节 导数的概念 …… 43
习题 2-1 …… 49
第二节 求导法则 …… 49
习题 2-2 …… 56
第三节 高阶导数 …… 57
习题 2-3 …… 60
第四节 微分 …… 60
习题 2-4 …… 64
第三章 导数的应用 …… 65
第一节 微分中值定理 …… 65
习题 3-1 …… 68
第二节 洛必达法则 …… 69
习题 3-2 …… 73
第三节 函数的单调性与函数的极值 …… 74
习题 3-3 …… 79
第四节 函数的作图 …… 79
习题 3-4 …… 84
第五节 导数在经济分析上的应用 …… 84
习题 3-5 …… 89

第四章　不定积分 ………………………………………… 90
　第一节　不定积分的概念 ………………………………… 90
　习题 4-1 ………………………………………………… 96
　第二节　不定积分的换元积分法 ………………………… 97
　习题 4-2 ………………………………………………… 104
　第三节　分部积分法 ……………………………………… 105
　习题 4-3 ………………………………………………… 110
　第四节　几类特殊函数的不定积分 ……………………… 110
　习题 4-4 ………………………………………………… 119
第五章　定积分 ……………………………………………… 121
　第一节　定积分概念 ……………………………………… 121
　习题 5-1 ………………………………………………… 125
　第二节　定积分的性质 …………………………………… 125
　习题 5-2 ………………………………………………… 129
　第三节　微积分学基本定理 ……………………………… 129
　习题 5-3 ………………………………………………… 132
　第四节　定积分的基本积分法 …………………………… 133
　习题 5-4 ………………………………………………… 138
　第五节　广义积分 ………………………………………… 140
　习题 5-5 ………………………………………………… 147
第六章　定积分的应用 ……………………………………… 148
　第一节　定积分的微元法 ………………………………… 148
　第二节　平面图形的面积 ………………………………… 149
　习题 6-2 ………………………………………………… 155
　第三节　空间几何体体积 ………………………………… 155
　习题 6-3 ………………………………………………… 160
　第四节　平面曲线的弧长 ………………………………… 161
　习题 6-4 ………………………………………………… 163
　第五节　定积分的物理应用 ……………………………… 164
　习题 6-5 ………………………………………………… 170
第七章　常微分方程 ………………………………………… 171
　第一节　微分方程的基本概念 …………………………… 171
　习题 7-1 ………………………………………………… 173
　第二节　一阶微分方程 …………………………………… 174
　习题 7-2 ………………………………………………… 179
　第三节　可降阶的高阶微分方程 ………………………… 180
　习题 7-3 ………………………………………………… 183
　第四节　二阶线性微分方程解的结构 …………………… 183
　习题 7-4 ………………………………………………… 186
　第五节　二阶常系数线性微分方程 ……………………… 186
　习题 7-5 ………………………………………………… 192
附录Ⅰ　初等数学常用公式 ………………………………… 194
附录Ⅱ　积分表 ……………………………………………… 196

第一章

函数极限与连续

高等数学可以说是变量数学，它的研究对象、研究方法与初等数学相比都有相当大的差异。它的主要研究对象是函数，它的主要内容是微积分学，它的主要手段是以极限为工具，并在实数范围内研究函数的变化率及其规律性，从而产生微积分的基本概念及性质。本章主要介绍函数的概念及其基本性质；数列与函数的极限及其基本性质；连续函数的概念及其基本性质，为进一步学好函数的微积分打下一个良好的基础。

第一节　函数的概念

一、几个基本概念

1.常量与变量

在日常生活或生产实践中，观察某一个事件的结果往往是用一个量的形式来表现的，在观察的某一个过程中始终保持不变的量称之为常量，经常变化的量称之为变量。通常用小写字母 a、b、c……表示常量，用小写字母 x、y、z……表示变量。

例如：圆周率 π 是永远不变的量，它是一个常量；某商品的价格在一定的时间段内是不变的，所以，在这段时间内它也是常量；又如一天中的气温、工厂在生产过程中的产量都是不断变化的量，这些量都是变量。

注意：

(1)常量和变量是相对的，它们依赖于所研究的过程和所研究的对象。在不同的过程中常量和变量是可以转化的。如商品的价格，某段时间是常量，另一段时间就有可能是变量了。

(2)从几何意义上来表示，常量对应数轴上的定点，变量对应数轴上的动点。

2.集合、区间

集合是表示具有同一种属性的全体。

例如：某班的全体学生组成一个集合；长虹集团 2005 年度的所有产品组成一个集合；所有正有理数组成一个集合等等。

有关集合的运算、集合的表示等方面的基本知识，中学数学已有介绍，这里就不一一

赘述了。

下面向读者介绍高等数学中常用的数集及其简明表示符号:

开区间:$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$;

闭区间:$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$;

左半开区间(或右半闭区间):$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$;

右半开区间(或左半闭区间):$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$。

上述四个区间的长度都是有限长的,因此把它们统称为有限区间。

无穷区间有:

$(-\infty,+\infty)=\mathrm{R}$;$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$;$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$;

$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$;$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$。

如无特别声明,可用如下符号表示一些常用数集:

R——实数集;Q——有理数集;Z——整数集;N——自然数集。

有时需要讨论数轴上某点附近的性质,为此引入邻域的概念。

定义 1 设 a 是一个实数,δ 是正数(通常是指很小的数),数轴上到点 a 的距离小于 δ 的点的全体,称为点 a 的 δ - 邻域,记为 $U(a,\delta)$。即

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}。$$

数集 $\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的去心 δ - 邻域,记为 $U^{\circ}(a,\delta)$。

二、函数的概念

定义 2 设 x,y 是两个变量,D 是 R 上的非空数集,对任意的 $x\in D$,通过某一个确定对应关系(或对应法则)f,在实数集 R 上有惟一的一个 y 与之对应,则称 f 是从 D 到 R 上的一个函数(也称为定义在 D 上的函数),记为

$$f:D\rightarrow \mathrm{R},x\rightarrow y,$$

简记为:$y=f(x)$。

通常把 x 称为自变量,y 称为因变量(或 x 的函数),x 的取值范围称为函数的定义域(就是本定义中的 D)。一般情况下,用 D_f 表示函数的定义域。当取 $x=x_0$ 时,按照对应法则 f 有 $y_0=f(x_0)$ 与之相对应,并称其为函数在点 x_0 处的函数值;当 x 在区域 D 上取遍时,所对应的函数值的全体称为函数的值域,记为 R_f。即

$$R_f=\{y\mid y=f(x),x\in D_f\}。$$

对于函数概念,以下几点需要注意:

(1)以上函数定义基本上是按照初等数学中所描述的方式给出的,它指的是单值函数;

(2)函数的实质是对应关系(或对应法则),只要两个变量之间能找到一种对应,我们就说它们之间确定了一个函数;

(3)确定函数有两个要素,即定义域与对应关系;

(4)函数之间可以定义加、减、乘、除等运算,但是运算必须在所有函数都有意义的公共范围内进行。

有关函数的相等,函数的定义域、值域,函数的四则运算等概念在中学数学课本中已

有介绍，这里就不再复述了。

下面我们来看几个具体的例子。

【例 1】 由关系式 $x^2+y^2=1$ 能确定两个变量 x 与 y 之间的一种对应关系，可以说是一个函数关系，但它不是我们所指的函数。比如 $x=0$ 时，相应的 y 可以等于 1，也可以等于 -1。其实它们是 $y=+\sqrt{1-x^2}$，$y=-\sqrt{1-x^2}$ 这样的两段函数，这类函数我们称为多值函数。

【例 2】 函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

的定义域为 R，值域为 $[0,+\infty)$，它称为绝对值函数，其图形如图 1-1 所示。通常这类函数称为分段函数。

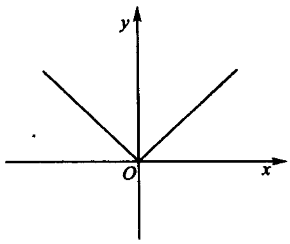

图 1-1

所谓分段函数是指：函数在定义域的不同范围内其函数表达式不同，它实质上是一个函数，不能理解为两个或多个函数。

【例 3】 函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

称为符号函数，这也是分段函数，记为 $\operatorname{sgn}x$，它的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{-1,0,1\}$，它的图形如图 1-2 所示。对任何实数 x 都有下列关系式：$x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$ 成立，所以它起着一个符号的作用。

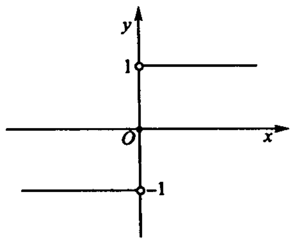

图 1-2

【例 4】 狄立克莱函数(Dirchlet)

$$y=\begin{cases} 1, & x\text{ 为有理数时} \\ 0, & x\text{ 为无理数时} \end{cases}$$

的定义域是 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域是 $R_f=\{0,1\}$。

三、函数的表示法

1. 解析法(公式法)：把两个变量之间的关系直接用数学式子表示出来，必要的时候还可以注明函数的定义域、值域，这种表示函数的方法称之为解析法。这在高等数学中是最常见的函数表示法，它便于我们进行理论研究。如例 1、例 2 等。

2. 表格法：就是把自变量和因变量的对应值用表格形式列出。这种表示法有较强的实用价值，比如三角函数表、常用对数表等等。

3. 图示法：用某坐标系下的一条曲线反映自变量与因变量的对应关系的方法。比如，气象台自动温度计记录了某地区的一昼夜气温的变化情况，这条曲线在直角坐标系下反映出来的就是一个函数关系。这种方法几何直观性强，函数的基本性态一目了然，看图就基本上都知道了，但它不利于理论研究。

四、函数的初等性质

微积分学的主要研究对象是函数,既然要对函数进行研究,自然要对函数有哪些基本几何性质有一定的了解,下面我们将逐一进行介绍。

定义3(函数的单调性) 设$f(x)$在区间I上有定义,若对任意的$x,y\in I$,当$x<y$时,有$f(x)\leqslant f(y)$(或$f(x)\geqslant f(y)$),则称$f(x)$在区间I上为单调递增函数(或单调递减函数)。

若对任意的$x,y\in I$,当$x<y$时,有$f(x)<f(y)$(或$f(x)>f(y)$),则称$f(x)$在区间I上为严格单调递增函数(或严格单调递减函数)。

单调递增函数(或单调递减函数)、严格单调递增函数(或严格单调递减函数)统称为单调函数(也称函数具有单调性)。

在几何上,单调递增(或递减)函数的图形是沿x轴的正向渐升的(或渐降的)。如图1-3和图1-4所示。

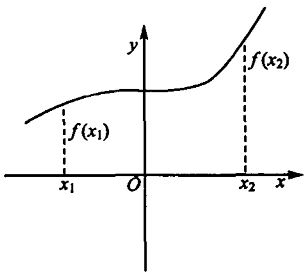

图1-3

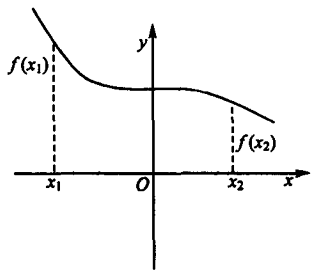

图1-4

【例5】 函数$y=x^2$在区间$(-\infty,0]$上严格单调递减,而在区间$[0,+\infty)$上却严格单调递增,这在考虑函数的单调性时,是要特别注意的问题。函数的单调性是函数在一个有定义区间内的特征性质,在不同的区间上可能有不同的单调性。即便在各个不同的区间内单调性相同,但在整个定义域内仍有可能不单调。

例如,函数$y=\dfrac{1}{x}$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,函数如图1-5所示,它不是单调函数,但它在$(-\infty,0)$或$(0,+\infty)$上分别单调递减。

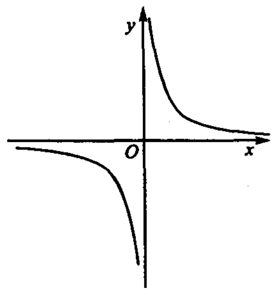

图1-5

定义4(函数的有界性) 设函数$f(x)$在区间I上有定义,若存在$M>0$,使得对任意$x\in I$,恒有$|f(x)|\leqslant M$,则称函数$f(x)$在区间I上有界,否则称为无界。

如果存在M使得对任意$x\in I$,恒有$f(x)\leqslant M$(或者$f(x)\geqslant M$),那么称函数$f(x)$在区间I上有上界(或下界)。其几何特征如图1-6所示。

显然,$f(x)$在区间I上有界等价于它在区间I上既有上界又有下界。

例如,三角函数$y=\sin x$,$y=\cos x$是有界函数。因为对任意的$x\in \mathrm{R}$都有$|\sin x|\leqslant 1$,

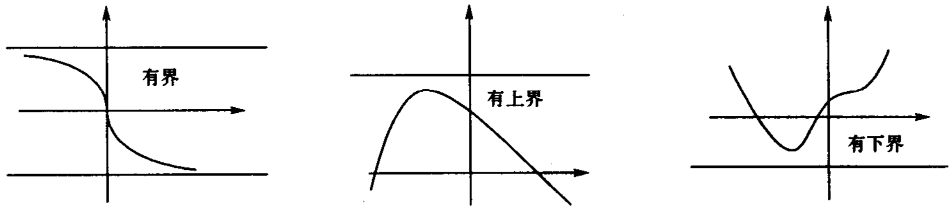

图 1-6

$|\cos x| \leqslant 1$,因此它们在整个数轴上有界。

函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内无上界,但有下界(0 为一个下界);而在 $(-\infty,0)$ 内无下界,但有上界(0 为一个上界)。它在定义域内是无界的。但是它在任何不包含原点的闭区间上是有界的。

定义 5(函数的奇偶性) 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,即对 $\forall x \in D$,有 $-x \in D$。(如图 1-7 所示)

(1)若对 $\forall x \in D$,有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数;

(2)若对 $\forall x \in D$,有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数。

从几何特征来说,偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称。

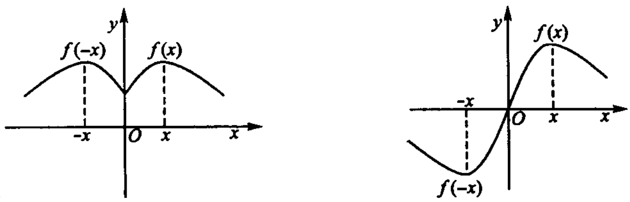

图 1-7

例如:$y=x^2, y=x^4, y=\cos x$ 等都是偶函数;而 $y=x^3, y=\sin x$ 等都是奇函数。

对于定义域相同的函数来说,有如下结论:

偶(奇)函数的和仍为偶(奇)函数;

两个偶(奇)函数的积为偶函数;

一偶一奇两个函数的积为奇函数。

但是,不是任何函数都有奇偶性的,如:$y=x+1$ 既不是奇函数也不是偶函数。

定义 6(函数的周期性) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在常数 $T>0$,使得对 $\forall x \in D$,有 $x \pm T \in D$,并且有 $f(x \pm T)=f(x)$ 成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,并称 T 是函数 $f(x)$ 的一个周期。

值得注意的是:一个函数如果是周期函数的话,它就有无穷多个周期。我们通常所说的周期,是指它的最小正周期。

周期函数一定存在一个周期,它的几何特征是:以一个周期为跨度,把曲线划断,各段曲线再移到一起,它们完全重合。

可是,周期函数不一定存在最小正周期。比如:$y=2$ 就是一个以任意正实数为一个

周期的周期函数,由于不存在最小正实数,所以 $y=2$ 不存在最小正周期。

五、初等函数

(一) 基本的初等函数

所谓基本初等函数就是指如下函数:

常量函数:$y=c$;

幂函数:$y=x^{a}(a\neq 0)$;

指数函数:$y=a^{x}(0<a$ 且 $a\neq 1)$;

对数函数:$y=\log_{a}x$ $(0<a$ 且 $a\neq 1)$;

三角函数:$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$;

反三角函数:$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\text{arccot}\, x$。

上述函数的基本性质和几何特征在中学数学已有比较透彻的讨论,这里就不再一一复述了。

(二)复合函数

在日常生活或生产实践中,事物之间的关系往往是错综复杂的,因此在数学中表示自然规律、生产规律的函数结构也是复杂的。通常情况下,我们遇到的函数往往不是基本初等函数,而是由这些基本初等函数所构造的较为复杂的函数。也就是说需要把两个或两个以上的函数组合成另一个新的函数。

例如,有 $y=\sqrt{u}, u=1-x^{2}$,当$|x|\leqslant 1$ 时,通过变量 u 就建立了变量 x 与变量 y 之间的对应关系,即 $y=\sqrt{1-x^{2}},|x|\leqslant 1$,这时称 y 是 x 的复合函数。

定义 7 设函数 $y=f(u)$的定义域为 D_{f},函数 $u=\varphi(x)$的定义域为 D_{φ},值域为 R_{φ},当 $D_{f}\cap R_{\varphi}\neq\varnothing$时,$\forall x\in D_{f\cdot\varphi}=\{x\mid x\in D_{\varphi},\varphi(x)\in D_{f}\}$,有函数 $\varphi(x)$的值在 D_{f} 的范围内,这样通过变量 u 就得到 y 与 x 之间的对应关系,称为复合函数。记为

$$y=f\{\varphi(x)\},\ x\in D_{f\cdot\varphi}。$$

其中,y 是因变量,u 是中间变量,x 是自变量。

按定义的要求可知,构建复合函数的前提条件就是:内层函数的值域与外层函数的定义域的交集非空。也就是说,内层函数必须有函数值落在外层函数的定义域内,否则就会成为无意义的函数。

例如,$y=\sqrt{u}, u=\sin x-2$,复合起来 $y=\sqrt{\sin x-2}$在实数范围内就无意义了。

【例 6】 设$f(x)=\dfrac{2}{2-x}$,求 $f[f(x)]$。

解 $f[f(x)]=\dfrac{2}{2-f(x)}=\dfrac{2}{2-\dfrac{2}{2-x}}=\dfrac{2-x}{1-x}$,

它的定义域是$(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$。

【例 7】 $y=\sqrt{2+\sin(1+\ln x)}$是由简单函数 $y=\sqrt{u}, u=2+\sin v, v=1+\ln x$ 复合而成的。

有时在实际应用中既要知道如何将简单函数构造成复合函数,同时也要会从复合函数中分解出简单函数。

(三)反函数

函数反映的是因变量随着自变量的变化而变化的规律,用另一种语言来说,就是:有两个变量,一个是主动变量(自变量 x),另一个是被动变量(因变量 y),主动变量一旦确定了,被动变量也相继惟一确定。但是变量之间的制约是相互的,在我们研究的不同领域里,经常需要更换这两个变量的主次关系,当这种主次关系对换后,仍然成为函数关系,这就是我们所要介绍的反函数。

定义 8　设函数 $y=f(x)$的定义域是 D_f,值域是 R_f,若对 $\forall y\in R_f$,有惟一的一个 $x\in D_f$,使得 $f(x)=y$。这就定义了 R_f 上的一个函数,此函数称为 $y=f(x)$的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$, $y\in R_f$。这时 $y=f(x)$称为直接函数。

由反函数的定义不难发现,$y=f(x)$存在反函数当且仅当 f 是 D_f 到 R_f 的一一对应关系,并且反函数的定义域是直接函数的值域,反函数的值域是直接函数的定义域。

在数学上,我们总习惯用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,为了满足习惯记法的需要,最后我们会把反函数 $x=f^{-1}(y)$记为 $y=f^{-1}(x)$。

既然这样,在几何上,直接函数与其反函数有何关系呢? 其实它们的图像关于直线 $y=x$ 对称。

通常把反函数记为 $y=f^{-1}(x)$, $y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$互为反函数。它们在同一直角坐标系下是关于直线 $y=x$ 对称的。

例如:

$y=f(x)=x^2, x\in[0,+\infty)$,

$y=f^{-1}(x)=\sqrt{x}, x\in[0,+\infty)$ (如图 1-8 所示)。

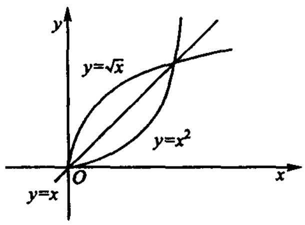

图 1-8

(四)初等函数

前面已经说过,在实际问题中我们遇到的不仅是基本初等函数,而且往往是较为复杂的函数,也就是指初等函数。

定义 9　由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算得到的,并能用一个解析式表示的函数称为初等函数。

例如:$y=\sqrt[3]{x^2-1}+\lg(1+x)-\sin[\ln(x^3-2)]$。

在高等数学中讨论的函数主要是初等函数。

习　题　1-1

1. 下列函数中哪组函数是相等的?

(1)$y=x, y=\dfrac{x^2}{x}$;　　(2)$f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=|x|$;

(3)$y=x, y=e^{\ln x}$;　　(4)$f(x)=x, g(x)=\sin(\arcsin x)$;

(5)$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}, g(x)=e^{-\frac{1}{2}\ln x}$;　　(6)$f(x)=1, h(x)=\sec^2x-\tan^2x$;

(7)$y=2x+1, x=2y+1$;　　(8)$y=\sqrt{1+\cos 2x}, y=\sqrt{2}\cos x$。

2.求下列函数的定义域。

(1)$y=\ln\sin x$;　　(2)$y=\dfrac{\sqrt{\ln x-x^2}}{x-1}$;

(3)$y=\sqrt{1-x}-\arcsin\dfrac{x+1}{x}$;

(4)若 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$,分别求函数 $f(x^2)$、$f(\cos x)$ 以及 $f(x+1)-f(x-1)$ 的定义域。

3.若 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ x, & |x|>1\end{cases}$,$g(x)=e^x$,求 $f[g(x)]$,$g[f(x)]$,并画出它们的图形。

4.设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$,求 $f[f(x)]$。

5.设 $f(x+1)=x^2-3x+2$,求 $f(x)$。

6.判断下列函数的周期性,若是周期函数,求出其最小正周期。

(1)$y=A\sin(\lambda x+\alpha)+B\cos(\lambda x+\beta)$;　　(2)$y=x\sin 2x$;

(3)$y=1-\cos\pi x$;　　(4)$y=\cos^2 x$。

7.将下列复合函数分解成几个基本初等函数。

(1)$y=\arcsin^2(x+1)$;　　(2)$y=\ln^2\sqrt{x^2-1}$;

(3)$y=\sqrt{1+\log_a^2\tan x}$;　　(4)$y=e^{\tan\frac{1}{x}}$;

(5)$y=3\arctan(1+x)^2$;　　(6)$y=\dfrac{1}{3}\sqrt{\ln\sqrt{x^2+x}}$。

8.判断下列函数中哪些是偶函数,哪些是奇函数,哪些是非奇非偶函数。

(1)$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;　　(2)$y=0$;

(3)$y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$;　　(4)$y=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$。

9.设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数,若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调递增,证明:$f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也是单调递增。

10.求下列函数的反函数及其定义域。

(1)$y=\sqrt{x-1}$;　　(2)$y=2\sin 3x$;

(3)$y=1+\ln(x+1)$;　　(4)$y=\begin{cases}x^2+1, & x>0\\ 0, & x=0\\ x^2-1, & x<0\end{cases}$。

11.证明:$y=x\cos x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是无界函数。

12.把一圆形铁片自圆心处剪去中心角为 θ 的一扇形后围成一个无底圆锥,试将圆锥的体积表示为 θ 的函数。