

上海市教育委员会高校重点教材建设项目

马洪良 裴 宁 王 叶
王志坚 李 明 陆 江 编著

近代物理实验

Modern Physics Experiments

上海大学出版社

上海市教育委员会组编

近代物理实验

Modern Physics Experiments

马洪良 裴 宁 王 叶
王志坚 李 明 陆 江 编著

上海大学出版社

· 上海 ·

内 容 简 介

本书是在上海大学“近代物理实验”系列课程实验教学实践的基础上编写而成的,包括基于 Newport 光学组合仪的光学及光纤光学实验和基于德国莱宝教具公司教学仪器的综合实验.内容涉及原子分子物理、光学、薄膜制备与测试技术、微波与微弱信号测量技术、核探测技术等领域,共 31 个实验.着重阐述了每个实验的实验原理、方法和相关的背景知识,详细介绍了每个实验的实验装置和主要实验任务及要求.

本书适合作为高等学校理工科本科生和研究生的经典物理实验课程的教材或教学参考书,也可供其他专业和社会读者阅读和参考.

图书在版编目(CIP)数据

近代物理实验/马洪良等编著. —上海:上海大学出版社,
2005. 11

ISBN 7 - 81058 - 930 - X

I. 近... II. 马... III. 物理学-实验-高等学校-
教材 IV. 041 - 33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 126780 号

责任编辑 王悦生

封面设计 谷夫平面设计

近代物理实验

马洪良 裴 宁 王 叶
王志坚 李 明 陆 江 编著

上海大学出版社出版发行

(上海市上大路 99 号 邮政编码 200444)

(<http://www.shangdapress.com> 发行热线 66135110)

出版人:姚铁军

*

上海华业装潢印刷厂印刷 各地新华书店经销

开本 787×1092 1/16 印张 14 字数 341 千

2005 年 11 月第 1 版 2005 年 11 月第 1 次印刷

印数: 1~1 100

ISBN 7 - 81058 - 930 - X/O · 032 定价: 28.80 元

前 言

近代物理实验是综合性大学理科最基本的实验课程之一,为培养学生的创新能力、实践能力,提高学生的科学素质打下扎实的基础.当今社会正处在一个科学技术高速发展、高新技术层出不穷的时代,物理学和物理实验技术在其他各学科和领域中迅速渗透并广泛应用.近代物理实验不仅使学生生动直观地观察学习近代物理学发展过程中的重要实验,领会实验设计思想,进一步巩固和综合应用已学习的理论知识,而且使学生了解和掌握最新的现代测量技术.通过这些实验的训练,使学生了解近代物理的基本原理,学习科学实验的方法及设计思路、科学仪器的使用 and 现代实验技术,培养学生的实验动手能力和科学作风.

实验教学的重要目的是提高学生的科学素质,培养学生的动手能力,鼓励学生的创新精神.本书包括的实验突出物理思想和当代测试技术,引导学生认真观察物理现象及分析物理问题,训练学生的观察能力、判断能力、分析能力和综合应用能力,培养学生探索物理规律的热情、积极性和创新思维.本书力图展示上海大学物理实验中心近年来新开设的实验内容,结合引进的新设备开出的新实验,更多地体现和吸收当今科学研究的测量技术,使近代物理实验这门课程更加紧跟时代的发展.

本教材是上海大学物理实验中心近年来近代物理实验课程建设的总结和教学改革成果的体现,是实验室工作的教师和实验技术人员辛勤工作的结晶.本书难以一一记述对各个实验作出过贡献的人员名字,在这里只列出参加最后编写工作的作者名单.单元一:马洪良;单元二:王叶;单元三:马洪良、陆江;单元四:马洪良、裴宁、陆江;单元五:王志坚;单元六:李明;单元七:马洪良、裴宁、陆江;单元八:裴宁、王叶;书中所有插图:陆江.

在此,我们谨对所有对本书作出过贡献的教师和实验技术人员表示衷心的感谢.上海大学教务处和物理系许多教师对本教材的编写给予了极大的鼓励和支持,提出了很多指导性的意见和建议;本教材的审稿专家和上海大学出版社的编辑们都为本教材的出版付出了辛勤劳动,借此,我们谨向他们表示衷心的感谢.

由于我们的水平有限和时间紧迫,教材中不妥之处在所难免,恳请读者和同行们批评指正.

编 者

2005年8月

目 录

单元一 误差理论与数据分析	1
一、测量误差	1
二、随机变量的概率分布	3
三、随机误差的统计分析	8
四、不确定度	11
五、数据处理——最小二乘法拟合	12
单元二 基于 Newport 光学组合仪的光学及光纤光学实验	17
光纤基础知识与光学组合仪简介	17
实验一 光纤的操作与光纤数值孔径测量	26
实验二 半导体光源与光纤耦合	32
实验三 半导体激光器特性测量	39
实验四 光纤位移传感器	51
实验五 干涉式位移传感器	57
单元三 基于莱宝教具公司教学仪器的综合实验	66
实验六 X 射线衍射	66
实验七 X 射线吸收	71
实验八 X 射线电离剂量率	74
实验九 朴克尔斯效应	78
实验十 朴克尔斯效应应用——音频信号传输	83
实验十一 克尔效应	86
实验十二 法拉第效应	88
单元四 光谱仪器的基本原理和光谱测量	92
光谱仪器的基本原理	92
实验十三 氢原子光谱与里德堡常数	99
实验十四 氘同位素位移	101
实验十五 拉曼散射光谱	103
实验十六 塞曼效应	108
实验十七 核磁共振的稳态吸收	113

单元五 激光全息和光信息处理	118
实验十八 光全息摄影.....	118
实验十九 光全息干涉计量.....	127
实验二十 彩虹全息.....	139
实验二十一 阿贝成像原理和空间滤波.....	142
单元六 微波与微弱信号测量技术	148
微波技术基础知识.....	148
实验二十二 微波基本参量和传输特性.....	157
实验二十三 介电常数波导法测量.....	161
微弱信号检测技术基础知识.....	167
实验二十四 相关器原理和基本参数.....	170
实验二十五 锁相放大器原理和应用.....	175
单元七 核物理技术应用	182
核物理实验基础知识.....	182
实验二十六 半导体 α 谱仪.....	186
实验二十七 相对论效应.....	189
实验二十八 正电子湮没寿命谱测量.....	192
单元八 薄膜制备与低温制冷技术	198
实验二十九 真空镀膜.....	198
实验三十 薄膜厚度和折射率的椭圆偏振法测量.....	202
实验三十一 小型制冷装置制冷量和制冷系数的测量.....	212

单元一 误差理论与数据分析

物理学是一门实验的科学,物理规律的认识和证实都是通过观察物理现象、定量测量有关的物理量,并根据测量结果分析这些物理量之间的关系而实现的.由于各种因素的影响,使得测量值总是或多或少偏离真值,即存在误差.由于测量中总有误差,因此对一个物理量的测量,不仅在实验之后对实验数据处理时需要关于误差的知识,而且在实验的设计(实验方法和仪器选取等)以及在实验过程中对实验条件和环境的控制和监测都需要误差的知识,才能使得测量结果更接近真值.在近代物理实验中,通常要用到比较综合的实验技术和复杂的实验设备,需要掌握误差理论,才能理解好实验设计,有效地进行实验测量和数据处理,并对测量结果的可靠程度作出正确的评价和分析.

一、测量误差

1. 测量误差定义

当对某物理量进行测量时,受到测量环境、仪器以及观测者等诸多因素的影响,使得测量值偏离真值而存在测量误差:

$$\text{误差} = \text{测量值} - \text{真值} \quad (1)$$

真值是在特定条件下被测量的客观实际值,真值是一个理想的概念,实验测量中采用约定真值,有时叫最佳估计值、约定值或参考值.例如,在仪器校验中,把高一级标准器的测量值作为低一级标准器或普通仪器的约定真值.

式(1)定义的误差是绝对误差.在没有特别指明时,误差就用绝对误差来表示.设被测量的真值为 μ ,则测量值 x 的绝对误差

$$\delta = x - \mu \quad (2)$$

在实验中有些问题需要用相对误差表示,相对误差定义为绝对误差与真值(约定真值)之比.在近似情况下,相对误差也往往表示为绝对误差与测量值之比.例如,测量1 m长的物体相差1 mm与测量10 m长的物体相差1 mm,其绝对误差相同,而相对误差则相差一个量级.相对误差常用百分数表示,即

$$\text{相对误差} = \frac{\delta}{\mu} \times 100\% \approx \frac{\delta}{x} \times 100\% \quad (3)$$

2. 误差分类

根据误差出现的特点不同,误差可分为系统误差、随机误差和粗大误差.

(1) 系统误差.在一定条件下对同一被测物理量进行多次测量时,保持恒定或以预知方式

变化的测量误差称为系统误差. 它包含有两类: 一类是固定值的系统误差, 其值(包括正负号)恒定; 另一类是随条件变化的系统误差, 其值以确定的、已知的规律随某些测量条件变化.

系统误差的来源与测量装置(标准器、仪器、附件和电源的误差)、环境(温度、湿度、气压、振动和电磁辐射等影响)、方法(理论公式的近似限制或测量方法不完善), 以及测量者等方面有关. 其产生原因往往可知, 一经查明就可以消除其影响. 对未能消除的系统误差, 若它的符号和大小是确定的, 可对测量值加以修正.

(2) 随机误差. 在一定条件下对被测物理量进行多次测量时, 以不可预知的随机方式变化的测量误差称为随机误差. 这种误差值时大时小, 时正时负, 没有规律性, 它引起被测量重复观测的变化.

随机误差来源于许多不可控因素的影响. 例如周围环境的无规起伏, 仪器性能的微小波动, 观察者感官分辨本领的限制, 以及一些尚未发现的因素等. 这种误差对每次测量来说没有必然的规律性, 但进行多次重复测量时会呈现出统计规律性. 虽然无法消除或补偿测量结果的随机误差, 但增加观测次数可使它减小, 并可用统计方法估算其大小.

在实际测量中, 虽然尽可能地设法限制和消除系统误差, 通过多次测量以减少随机误差, 但两种误差往往还会同时存在, 这时需按其对测量结果的影响分别对待: ① 若系统误差经技术处理后已消除, 或远小于随机误差, 可按纯随机误差处理; ② 若系统误差的影响远大于随机误差, 可按纯系统误差处理; ③ 若系统误差与随机误差的影响差别不太大, 两者均不可忽略, 综合两种误差.

(3) 粗大误差. 明显超出规定条件下预期值的误差称为粗大误差, 这是在实验中, 由于某种差错使得测量值明显偏离正常测量结果的误差, 例如读错数, 记错数, 或者环境条件忽然变化而引起测量值的错误等, 在实验数据处理中, 应按一定的规则(拉伊达准则或者格拉布斯准则)来剔除粗大误差.

3. 不确定度

由于测量误差不可避免, 使得真值也就无法确定; 而真值不知道, 也就无法确定误差的大小, 因此, 实验数据处理只能求出实验的最佳估计值及其不确定度. 不确定度是由于误差的存在, 使得被测量不能确定的程度; 或者说, 它是表征被测量真值所处量值范围的一个评定. 由此可见, 不确定度与误差有区别, 误差是一个理想的概念, 一般不能准确知道; 但不确定度反映误差存在分布范围, 即随机误差分量和未定系统误差分量综合的分布范围, 可由误差理论求得. 通常把测量结果表示为

$$\text{测量值} = \text{最佳估计值} \pm \text{不确定度} \quad (4)$$

实验测量中, 消除了已定的系统误差后仍然存在着随机误差和未定的系统误差. 设被测量 X 的测量值为 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 则最佳估计值为算术平均值

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

由于不确定度的评定要合理赋予被测量值的不确定区间, 而不同的置信概率所表示的不确定区间是不同的, 因此还应表明是多大概率含义的不确定度.

二、随机变量的概率分布

1. 概率分布的数字特征量

若一个随机变量的概率函数或概率密度函数的形式已知,只要给出函数式中各个参数(称为分布参数)的数值,则随机变量的分布就完全确定.在不同形式的分布中,常用一些有共同定义的数字特征量来表示,而最重要的特征量是随机变量的期望值和方差.

(1) 随机变量的期望值.

以概率 p_i 取值 x_i 的离散型随机变量 x ,它的期望值(通常以 μ 或 $E(x)$ 标记)定义为

$$\mu = E(x) = \sum_{i=1}^n x_i p_i \quad (5)$$

具有概率密度函数 $p(x)$ 的连续型随机变量 x ,它的期望值定义为

$$\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) \cdot dx = \langle x \rangle \quad (6)$$

期望值的物理意义是作无穷多次重复测量时测量结果的平均值.

(2) 随机变量的方差.

随机变量的方差通常以 $\sigma^2(x)$ 标记,定义为

$$\begin{aligned} \sigma^2(x) &= E[(x - \langle x \rangle)^2] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 \cdot p(x) \cdot dx \end{aligned} \quad (7)$$

方差的正平方根 $\sigma(x)$ 称为随机变量的标准误差,简称为标准差.方差或标准差用以描述随机变量围绕期望值分布的离散程度.

(3) 两个随机变量的协方差.

设两随机变量 x, y 具有联合概率密度函数 $p(x, y)$,两个随机变量的协方差定义为

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x, y) &= E[(x - \langle x \rangle)(y - \langle y \rangle)] \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)(y - \langle y \rangle) \cdot p(x, y) \cdot dx \cdot dy \\ &= \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle \end{aligned} \quad (8)$$

协方差描述两随机变量的相互依赖程度.当协方差不等于零时,则两随机变量一定不相互独立.通常还要用相关系数来描述两个随机变量的相关程度:

$$\rho(x, y) = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma(x)\sigma(y)} \quad (9)$$

2. 数据处理中常用的概率分布

由于随机变量受到不同因素的影响,或者物理现象本身的统计性差异,使得随机变量的概率分布形式多种多样,这里讨论几种常用的分布,要注意掌握其概率函数(或概率密度函数)和数字特征量.

(1) 二项式分布.

若随机事件 A 发生的概率为 P , 不发生的概率为 $(1-P)$, 在 N 次独立试验中事件 A 发生 k 次的概率是一个离散型随机变量, 可能取值为 $0, 1, 2, \dots, N$, 对于这样一个随机事件, 其概率分布为

$$p(k) = \frac{N!}{k!(N-k)!} P^k (1-P)^{N-k} \quad (10)$$

式中因子 $\frac{N!}{k!(N-k)!}$ 表示 N 次试验中事件 A 发生 k 次, 而不发生为 $(N-k)$ 次的各种可能组合数, 刚好是二项式展开中的项, 因此式(10)所表示的概率分布称为二项式分布.

二项式分布中有两个独立的参数 N 和 P , 遵从二项式分布的随机变量的期望值和方差分别为

$$\langle k \rangle = \sum_{k=0}^N k \frac{N!}{k!(N-k)!} P^k (1-P)^{N-k} = NP \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(k) &= \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 = \langle k^2 \rangle - N^2 P^2 \\ &= \sum_{k=0}^N k^2 \frac{N!}{k!(N-k)!} P^k (1-P)^{N-k} - N^2 P^2 \\ &= NP(1-P) \end{aligned} \quad (12)$$

二项式分布有许多实际应用, 如在产品质量检验或民意测验中, 抽样试验以确定合乎其条件的结果的概率是二项式分布问题; 穿过仪器的 N 个粒子被仪器探测到 k 个的概率, 或 N 个放射性核经过一段时间后衰变 k 个的概率等, 这些问题的随机变量 k 都服从二项式分布.

(2) 泊松分布.

服从泊松(Poisson)分布的离散型随机变量 k , 其概率函数为

$$p(k; m) = \frac{m^k}{k!} e^{-m} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (13)$$

式中参数 $m > 0$. 泊松分布随机变量 k 的期望值和方差为

$$\langle k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k p(k; m) = m \quad (14)$$

$$\sigma^2(k) = \sum_{k=0}^{\infty} (k-m)^2 p(k; m) = m \quad (15)$$

因此, 泊松分布只有一个参数, 即期望值, 它同时也是分布的方差.

泊松分布是二项式分布的极限情形, 是无穷独立试验的总结果. 在二项式分布中考虑以下极限情形, 即 $N \rightarrow \infty$, 每次试验中事件 A 发生的概率 $P \rightarrow 0$, 期望值 $\langle k \rangle = NP$ 趋于有限值 m , 在这种极限情况下二项式分布成为泊松分布.

实验工作中, 如何判断随机变量是否服从泊松分布? 如果 k 是某个随机事件发生的次数, 并且满足如下的条件, k 就近似地服从泊松分布:

- ① k 在一个有限的期望值 m 左右摆动, 即 $\langle k \rangle = m$;
- ② k 可以看作是大量独立试验的总结果;

③ 对于每一次试验,事件发生有相同的概率。

物理实验中有不少随机变量满足上述条件,泊松分布是一个常见的分布。例如,一块放射性物质在一定时间间隔 T 内的衰变数 k ,在放射性原子核平均寿命远大于 T 的情况下,实验测得的衰变数确实是在某个平均值 m 左右摆动,满足条件①;把在时间间隔 T 内每一个原子是否衰变看作一次试验,放射性物质的总原子数为 $N(N \gg 1)$,则记录到的衰变数可以看作是 N 次试验的总结果,而且每个原子的衰变都是互相独立进行的,同其他原子是否衰变无关,满足条件②;每个原子在时间间隔 T 内的衰变概率是一定的,满足条件③。

在时间间隔 T 内计数器记录到的宇宙射线粒子数 k 、高能荷电粒子在某固定长度 L 的路径上和云雾室中气体分子发生碰撞的次数 k ,读者可以分析这些随机变量 k 满足条件①、②、③。

因此上面三个例子中的随机变量 k 都近似服从泊松分布。在工农业生产和日常生活中,也有不少随机变量服从泊松分布。例如,在一定的生产条件下,每批产品的废品数;正常条件下某一地区的死亡数和婴儿出生数等等,都近似服从泊松分布。

(3) 正态分布。

正态分布又称高斯(Gauss)分布,是数据处理最重要的概率分布。正态分布的概率密度函数定义为

$$n(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad (16)$$

式中, x 是连续随机变量, μ 和 σ 是正态分布的分布参数。遵从正态分布的随机变量 x 的期望值和方差分别为

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot n(x; \mu, \sigma) \cdot dx = \mu \quad (17)$$

$$\sigma^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot n(x; \mu, \sigma) \cdot dx = \sigma^2 \quad (18)$$

由此可见,正态分布中的参数 μ 是期望值,参数 σ 是标准误差。正态分布的特征由这两个参数的数值完全确定:若消除了测量的系统误差, μ 为待测物理量的真值,它决定正态分布的位置;而 σ 的大小与概率密度函数曲线的“胖”“瘦”有关,即 σ 决定正态分布偏离期望值的离散程度,不同参数值的正态分布概率密度函数曲线如图 1 所示,曲线是单峰对称结构,对称轴处于概率密度极大值所在处。

对于期望值 $\mu = 0$ 和方差 $\sigma^2 = 1$ 的正态分布叫做标准正态分布,其概率密度函数 $n(x; 0, 1)$ 和正态分布函数 $N(x; 0, 1)$ 为

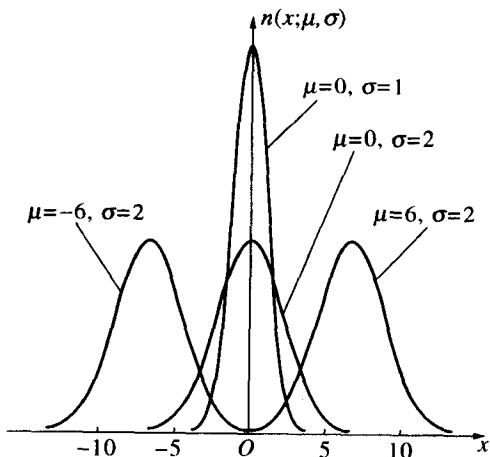


图 1 不同参数值的正态分布曲线

$$n(x; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \quad (19)$$

$$N(x; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \cdot dx \quad (20)$$

对于 $\mu \neq 0, \sigma^2 \neq 1$ 的正态分布, 把随机变量 x 作线性变换 $x' = \frac{x-\mu}{\sigma}$, 则随机变量 x' 遵从标准正态分布, 且有

$$n(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma} n(x'; 0, 1) \quad (21)$$

$$N(x; \mu, \sigma^2) = N(x'; 0, 1) \quad (22)$$

这样便可利用标准正态分布求概率分布. 根据概率理论可以得到以下两个重要定理:

定理 1 若 $x_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 是相互独立的随机变量, 随机变量 $x = \sum_{i=1}^N x_i$, 如果每一个 x_i 对总和 x 的贡献都不大, 则当 $N \rightarrow \infty$ 时, x 渐近地遵从正态分布.

定理 2 若随机变量 x 有期望值 $\langle x \rangle = \mu$, 方差 $\sigma^2(x) = \sigma^2$, 而 $x_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 是随机变量 x 的 N 次独立测量值, 则当 $N \rightarrow \infty$ 时, 平均值 $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ 渐近地遵从正态分布 $n(\bar{x}; \mu, \sigma^2/N)$.

正态分布之所以重要的另一个原因是许多其他分布在极限条件下都渐近地遵从正态分布. 如对于泊松分布, 当期望值 m 足够大, 可以证明它趋于形式为

$$p(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \exp\left[-\frac{(k-m)^2}{2m}\right] \quad (23)$$

的分布, 注意到泊松分布的标准差 $\sigma = \sqrt{m}$, 可以看出(23)式和正态分布的概率密度函数的形式一致, 所不同的是这里 k 表示离散型变量. 实际上, 当 $m \geq 10$ 时泊松分布已十分接近正态分布. 这说明对于某些离散型随机变量, 在一定条件下也可以用正态分布来近似处理.

例 某随机变量 x 遵从正态分布, 试利用标准正态分布表分别求出 x 落在期望值附近 $\pm\sigma$ 和 $\pm 3\sigma$ 的概率.

解 当随机变量 x 偏离期望值 $\pm\sigma$ 和 $\pm 3\sigma$ 时, 标准正态分布随机变量 x' 取值分别为 ± 1 和 ± 3 , 通过查标准正态分布表求随机变量落在区间 $[-1, 1]$ 和 $[-3, 3]$ 内的概率即可.

当随机变量等于 1 时, 标准正态分布表给出 $N(1; 0, 1) = 0.8413$, 对应于图 2(a) 曲线阴影部分 (区间为 $[-\infty, 1]$), 随机变量落在区间 $[-1, 1]$ 内的概率为图 2(b) 曲线阴影部分 (区间为 $[-1, 1]$), 即

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 n(1; 0, 1) dx &= N(1; 0, 1) - [1 - N(1; 0, 1)] \\ &= 2N(1; 0, 1) - 1 \approx 68.3\% \end{aligned} \quad (24)$$

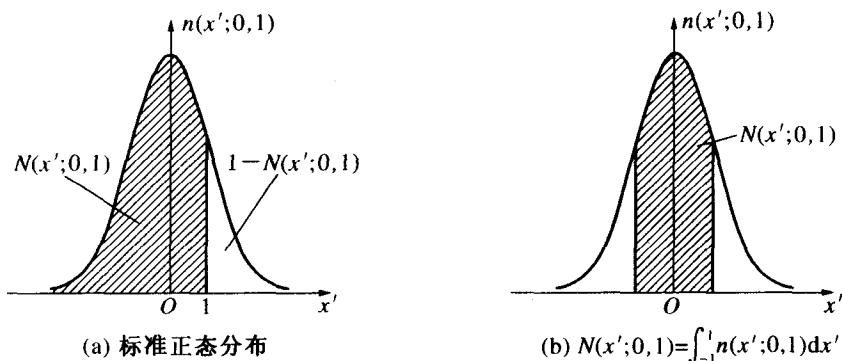


图2 正态分布表

同理,随机变量等于3时,标准正态分布表给出 $N(3; 0, 1) = 0.9987$, 随机变量落在区间 $[-3, 3]$ 内的概率为

$$\int_{-3}^3 n(3; 0, 1) dx = 2N(3; 0, 1) - 1 \approx 99.7\% \quad (25)$$

(4) t 分布及其应用.

在观测值 x 服从正态分布的情况下,平均值 $\bar{x}$ 会严格服从正态分布 $n(\bar{x}; \mu, \sigma_{\bar{x}}^2)$, 其中 $\sigma_{\bar{x}}^2 = \sigma^2/N$. 若作变换 $t = (\bar{x} - \mu)/\sigma_{\bar{x}}$, 则随机变量 t 遵从标准正态分布 $n(t; 0, 1)$.

然而,在一般情况下期望值 μ 和标准差 σ 都未知,只能由测量值 $x_i (i=1, 2, \dots, N)$ 算出样本平均值的标准差 $S_{\bar{x}}$. 由于 $S_{\bar{x}}$ 是随机变量,不同于 σ 是正态参数,当用 $S_{\bar{x}}$ 取代 $\sigma_{\bar{x}}$ 作变换 $t = (\bar{x} - \mu)/S_{\bar{x}}$ 时,随机变量 t 不遵从正态分布而遵从 t 分布, t 分布的概率密度函数为

$$p(t; \nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma(\nu\pi)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{(\nu+1)/2}} \quad (-\infty < t < \infty) \quad (26)$$

式中 t 为随机变量, ν 为分布参数 ($\nu = N-1$, 正整数), 称为 t 分布的自由度.

随机变量 t 的期望值和方差为

$$\langle t \rangle = 0, \quad \sigma^2(t) = \frac{\nu}{\nu-2} \quad (\nu > 2) \quad (27)$$

图3中给出 t 分布曲线与标准正态分布曲线, t 分布的峰值低于标准正态分布的峰值, 即 t 分布比正态分布较为分散, 自由度愈小则分散愈明显, 当 ν 很大以至 $\nu \rightarrow \infty$ 时, t 分布趋于标准正态分布. 在应用 t 分布时, 若以概率 ξ 表达实验结果, 则必须按照 t 分布来相应范围的 t_{ξ} 值. $t_{0.683}$ 必然比1大些. 图3中斜线部分的面积等于区间 $[-t_{\xi}, t_{\xi}]$ 内的概率 ξ , 即

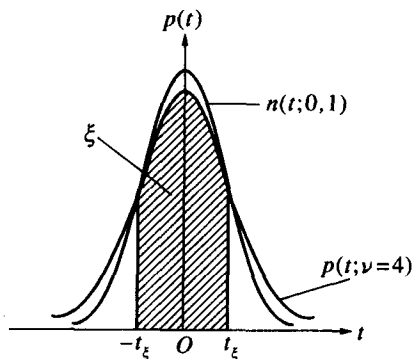


图3 t 分布与标准正态分布的比较

$$\xi = \int_{-t_{\xi}}^{t_{\xi}} p(t; \nu) dt \quad (28)$$

当测量次数不多 ($N < 10$) 而要用 $S_{\bar{x}}$ 取代 $\sigma_{\bar{x}}$ 时, 数据处理中采用 t 分布来计算不确定度. 测量结果表示为

$$\mu = \bar{x} \pm t_{\xi} S_{\bar{x}} \quad (29)$$

式中 ξ 为置信水平, $t_{\xi} S_{\bar{x}}$ 为总不确定度.

(5) χ^2 分布及其应用.

设测量值 $x_1, x_2, \dots, x_N$ 为满足正态分布 $n(x; \mu, \sigma^2)$ 的随机样本, 定义统计量

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} \quad (30)$$

来分析样本的离散程度. 这样定义的 χ^2 是随机变量, 其分布遵从概率密度函数, 即 χ^2 分布

$$p(\chi^2; \nu) = \frac{1}{\sqrt{2\nu}\Gamma(\nu/2)} (\chi^2)^{\frac{\nu}{2}-1} \exp(-\chi^2/2) \quad (31)$$

式中 ν 为分布参数 ($\nu = N - 1$, 正整数), 称为自由度. 随机变量 χ^2 的期望值和方差分别为

$$\langle \chi^2 \rangle = \nu, \quad \sigma^2(\chi^2) = 2\nu \quad (32)$$

图 4 中斜线部分的面积等于区间 $[0, \chi_{\xi}^2]$ 内的概率 ξ , 即

$$\xi = \int_0^{\chi_{\xi}^2} p(\chi^2; \nu) d\chi^2 \quad (33)$$

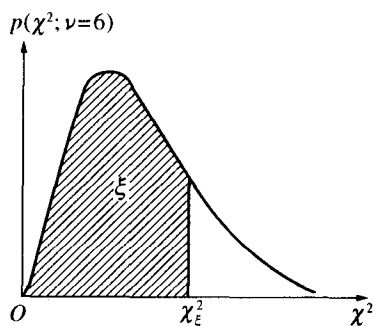


图 4 χ^2 概率密度曲线

概率 ξ 不仅与 χ_{ξ}^2 有关, 而且与自由度 ν 有关. 对于不同 ξ 和 ν 所对应的 χ_{ξ}^2 可查表. 一般的 χ^2 分布表只有 $\nu \leq 30$ 的数值, 因为 χ^2 分布在自由度 $\nu \rightarrow \infty$ 的情况下趋于正态分布, 对于 $\nu > 30$ 的数值, 可利用正态分布表求得.

三、随机误差的统计分析

前面讨论了随机变量的总体分布, 下面讨论随机误差的估计问题. 在实际测量中, 只能得到有限次测量值, 即随机样本, 我们研究随机误差是以随机样本为依据的, 即采用随机样本估计总体分布的参数. 在此假定系统误差已经修正, 采用相同的方法和仪器在相同的条件下作重复的相互独立的一组等精度测量值, 讨论等精度测量中随机误差的数字特征问题.

1. 正态分布参数的最大似然估计

设某物理量 X 的 N 个等精度测量值为 $x_1, x_2, \dots, x_N$, 把它看作 N 维的随机变量, 为了由样本估计总体参数, 把 N 维随机变量的联合概率密度定义为样本的似然函数. 相互独立随机变量的联合概率密度等于各个随机变量概率密度的乘积. 设 x 的概率密度函数为 $p(x; \theta)$, θ 为该分布的特征参数, 则联合概率密度函数

$$p(x_1, x_2, \dots, x_N; \theta) = p(x_1, \theta) \cdot p(x_2, \theta) \cdot \dots \cdot p(x_N, \theta) = \prod_{i=1}^N p(x_i; \theta) \quad (34)$$

于是这个样本的似然函数定义为

$$L(x_1, x_2, \dots, x_N; \theta) = \prod_{i=1}^N p(x_i; \theta) \quad (35)$$

最大似然法就是选择使实测数据有最大概率密度的参数值为 θ 的估计值. 若估计值 $\hat{\theta}$ 使似然函数最大, 即

$$L(x_1, x_2, \dots, x_N; \theta) \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = L_{\max} \quad (36)$$

则 $\hat{\theta}$ 称为参数的最大似然估计. 而要使似然函数最大, 可通过 $L(x_1, x_2, \dots, x_N; \theta)$ 对 θ 求极值的方法而得到, 为计算方便起见, 求 $L(x_1, x_2, \dots, x_N; \theta)$ 的对数的导数, 即

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \dots, x_N; \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = 0 \quad (37)$$

由于似然函数 $L(x_1, x_2, \dots, x_N; \theta)$ 与它的对数 $\ln L(x_1, x_2, \dots, x_N; \theta)$ 是同时达到最大值的, 故通过求解式(37)便可得到 θ 的最大似然估计值.

利用最大似然法估计正态分布的特征参数. 由正态分布的概率密度函数构建正态样本的似然函数

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_N; \mu, \sigma^2) &= \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right] \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{N/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2\right] \end{aligned} \quad (38)$$

对正态样本的似然函数的对数 $\ln L(x_1, x_2, \dots, x_N; \mu, \sigma^2)$ 求参数 μ 和 σ^2 的偏导数

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{\mu})^2 = 0 \quad (39)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{1}{4\sigma^4} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{\mu})^2 = 0 \quad (40)$$

将这两个方程联立求解得期望值和方差的最大似然估计值

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \bar{x} \quad (41)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (42)$$

标准误差估计值为

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (43)$$

最大似然估计值的结果表明:测量值的期望值由测量样本的算术平均值估计;方差由测量样本的平均偏差估计;标准误差由均方根偏差估计.若参数 θ 的估计量 $\hat{\theta}$ 的期望值满足

$$\langle \hat{\theta} \rangle = \theta \quad (44)$$

则 $\hat{\theta}$ 称为参数 θ 的无偏估计量,否则称为有偏估计量.下面将证明,样本的均方偏差和均方根偏差都不是无偏估计量.

2. 样本平均值期望值、方差和标准偏差

若 $x_1, x_2, \dots, x_N$ 是实验测量量 x 的随机样本, $\bar{x}$ 的期望值和方差分别为

$$\langle \bar{x} \rangle = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle x_i \rangle = \langle x \rangle \quad (45)$$

$$\sigma^2(\bar{x}) = \sigma^2\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i\right) = \frac{1}{N^2} \sigma^2\left(\sum_{i=1}^N x_i\right) = \frac{1}{N} \sigma^2(x) \quad (46)$$

从而求得样本平均值的标准误差为

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sigma(x) \quad (47)$$

式(45)表明样本平均值的期望值就是随机变量的期望值,即 $\bar{x}$ 作为真值 μ 的估计值满足无偏估计量的条件;式(46)表明样本平均值的方差是单次测量的方差的 $1/N$;式(47)表明样本平均值的标准误差是单次测量值的标准误差的 $1/\sqrt{N}$.也就是说,若观测值在真值左右摆动,则 N 个观测值的平均值也在真值左右摆动,它们的期望值都是 μ ,但 N 次测量平均值 $\bar{x}$ 比单次测得值更靠近真值,这就是通常采用样本平均值作为被测量真值的理由.

均方偏差的期望值为

$$\langle \sigma^2(x) \rangle = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \right\rangle = \frac{N-1}{N} \sigma^2(x) \quad (48)$$

上式表明样本均方偏差的期望值不是 $\sigma^2(x)$ 的无偏估计量.若定义一个统计量

$$S_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (49)$$

为样本方差,则它的期望值

$$\begin{aligned} \langle S_x^2 \rangle &= \left\langle \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \right\rangle = \frac{1}{N-1} \left\langle \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \right\rangle \\ &= \frac{N}{N-1} \left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \right\rangle = \frac{N}{N-1} \cdot \frac{N-1}{N} \sigma^2(x) = \sigma^2(x) \end{aligned} \quad (50)$$

式(50)表明定义的统计量样本方差的期望值 S_x^2 等于方差 $\sigma^2(x)$,所以一般采用 S_x^2 作为标准误差的无偏估计值.

S_x^2 的平方根正值称为样本的标准偏差：

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (51)$$

式(51)称为贝塞尔公式,通常把样本的标准偏差作为标准误差的估计值。

四、不确定度

1. 粗大误差的判别和剔除

由于粗大误差是测量过程中出现某些差错或者环境条件突变等不可预料的因素造成的,在实验数据处理中首先对测量数据进行分析,剔除含有粗大误差的测量值。判别测量值中是否含有该剔除的异常值,在统计学中已经建立了多种准则。

(1) 拉伊达准则。

当重复测量次数较多时(例如几十次以上),拉伊达准则(即 3 倍标准差准则)是一种最为简便的方法。这种判别方法是先求出测量值 $x_1, x_2, \dots, x_N$ 的平均值 $\bar{x}$ 和标准差 S_x ,若某可疑数据 x_d 的偏差 $|\bar{x} - x_d| > 3S_x$ 时,则 x_d 应该被剔除。因为测量值的偏差落在 $\pm 3S_x$ 范围内的置信概率已达 99.7%。超出这个范围以外的概率小于 0.3%,该异常值剔除后,再对余下的测量值数据用同样的方法检验是否还存在异常值。

(2) 格拉布斯准则。

格拉布斯准则以其判别的可靠性大而著称,其检验方法:求测量值 $x_1, x_2, \dots, x_N$ 的平均值 $\bar{x}$ 和标准差 S_x ;求绝对值最大的偏差 $|u_i|_{\max}$;选定某一显著性水平值 α ($\alpha = 1 - \xi$, 代表错判为异常的概率),通常选 $\alpha = 0.05$ 或 0.01 ,由表 1 可查得格拉布斯准则的 $g(N, \alpha)$ 值;如果偏差 $|u_i|_{\max} > g(N, \alpha) \cdot S_x$,则认为测量值 x_i 是含有粗大误差的数据而被剔除;舍弃某一含有粗差的数据后,用同样的方法检查余下的实验测量值是否还有应剔除的数据。

表 1 格拉布斯准则 $g(N, \alpha)$ 数值表

N	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	N	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	N	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$
3	1.15	1.15	12	2.25	2.29	21	2.91	2.58
4	1.49	1.46	13	2.61	2.33	22	2.94	2.60
5	1.75	1.67	14	2.66	2.37	23	2.96	2.62
6	1.91	1.82	15	2.70	2.41	24	2.99	2.64
7	2.10	1.94	16	2.74	2.44	25	3.01	2.66
8	2.22	2.03	17	2.78	2.47	30	3.10	2.74
9	2.32	2.11	18	2.82	2.50	35	3.18	2.81
10	2.41	2.18	19	2.85	2.53	40	3.24	2.87
11	2.48	2.24	20	2.88	2.56	50	3.34	2.96

2. 不确定度的传递

间接测量的物理量,是利用直接测量的结果代入所属的函数关系式计算出来的。设 y 为 t 个直接观察量 $x_1, x_2, \dots, x_t$ 的函数,即