

2006

硕士学位研究生入学资格考试

全国工程硕士专业学位教育指导委员会 组编

GCT

数 学

考前辅导教程

G
Graduate
C
Candidate
T
Test



清华大学出版社

2006

硕士学位研究生入学资格考试

GCT

数 学

考前辅导教程

全国工程硕士专业学位教育指导委员会 组编
刘庆华 主编
王飞燕 关 治 刘庆华 扈志明 编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是根据最新版的硕士学位研究生入学资格考试指南而编写的数学辅导教材,以方便考生备考。

全书安排算术、初等代数、几何与三角、一元微积分以及线性代数 5 部分内容,共 18 章。在每章中,汇总了考试指南中所涉及的重要知识点,并通过例题加以讲解,同时,按试卷中的试题方式组织了一些典型题目。书后配备了两套模拟试题,供读者使用。

版权所有,翻印必究。举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

本书扉页为防伪页,封面贴有清华大学出版社防伪标签,无上述标识者不得销售。

本书防伪标签采用特殊防伪技术,用户可通过在图案表面涂抹清水,图案消失,水干后图案复现;或将表面膜揭下,放在白纸上用彩笔涂抹,图案在白纸上再现的方法识别真伪。

图书在版编目(CIP)数据

硕士学位研究生入学资格考试 数学考前辅导教程/全国工程硕士专业学位教育指导委员会组编。

—北京:清华大学出版社,2006.5

ISBN 7-302-12981-9

I. 硕… II. 全… III. 高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 042135 号

出 版 者:清华大学出版社 地 址:北京清华大学学研大厦

<http://www.tup.com.cn> 邮 编:100084

社 总 机:010-62770175 客户服务:010-62776969

责任编辑:刘 颖

印 刷 者:北京密云胶印厂

装 订 者:北京市密云县京文制本装订厂

发 行 者:新华书店总店北京发行所

开 本:185×230 印张:21.25 防伪页:1 字数:455 千字

版 次:2006 年 5 月第 1 版 2006 年 5 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 7-302-12981-9/O·536

印 数:1~70000

定 价:29.00 元

出版

硕士学位研究生入学资格考试

说明

Introduction

硕士学位研究生入学资格考试(Graduate Candidate Test, GCT)是国务院学位委员会办公室组织的全国统一考试。考试始于 2003 年,当时名为“工程硕士专业学位研究生入学资格考试”(简称 GCT-ME),考试适用范围为报考工程硕士的考生。2004 年,适用范围增加了报考农业推广和兽医专业硕士的考生,考试名称去掉了“工程”二字。2005 年,国务院学位委员会办公室组织专家对 2003 版考试大纲进行了修订,同时考试适用范围又增加了报考风景园林硕士,以及高等学校教师、中等职业学校教师在职攻读硕士学位的考生,考试名称改为“硕士学位研究生入学资格考试”。GCT 考试属于综合素质型考试。考试试卷由四部分构成:语言表达能力测试、数学基础能力测试、逻辑推理能力测试、外国语运用能力测试。试卷满分 400 分,每部分各占 100 分。考试时间为 3 个小时,每部分为 45 分钟。考试试题均为客观选择题。

清华大学出版社是国内最早出版 GCT 考前辅导用书的出版机构。2003 年,我们出版了由全国工程硕士专业学位教育指导委员会组织编写的《全国工程硕士专业学位研究生入学资格考试考前辅导教程》丛书,包括语文、数学、英语、逻辑共 4 册。2004 年,在对考前辅导教程系列进行修订再版的基础上,又特别邀请教程系列的作者编写了《硕士专业学位研究生入学资格考试模拟试题与解析》系列,同样分为语文、数学、英语、逻辑 4 册,作为考前辅导教程的配套资料,供考生考前模拟训练之用。2005 年,我们又根据新大纲的要求,对考前辅导教程系列和模拟试题与解析系列进行了全面修订。多年来,我们一直同有关管理机构和学术研究组织紧密合作,伴随 GCT 考试走过诞生、改革和发

展的进程,在深入研究 GCT 的发展趋势和广大在职考生的实际需求的基础上,不断改进、完善。经过多年的积累和提高,清华版 GCT 考前辅导用书以其权威性、严谨性、全面性和实用性,给广大考生复习和备考提供了方便,赢得了广大考生的欢迎和信赖,成为广大考生考前复习、模拟训练的第一选择。

以国务院学位委员会办公室组织制定的《硕士学位研究生入学资格考试指南(2006 年版)》为依据,根据近几年考试命题的发展趋势,结合考生使用本套图书的反馈意见,以及作者在考试辅导课程教学过程中积累的经验,我们对上述 8 种考前辅导用书进行了细致的修订,推出了这套 2006 年版的 GCT 考前辅导用书。新版本反映了考试大纲的一些细微变化,同时更加贴近在职考生的实际需求,更加精确和细致。例如,为更便于考生复习,对《数学考前辅导教程》的篇幅进行了适当精简,删去一些较难或较繁的例题或典型例题,同时对一些比较边缘的知识点也做了相应的处理。根据新指南,对《语文模拟试题与解析》中阅读理解部分的结构进行了调整,适当降低了难度,等等。同时,我们还最新组织编写了《英语核心词汇精解》和《综合模拟试卷》两本书,以供考生深入复习和临考前进行实战模拟。相信新版的图书一定会为考生备考提供更大的帮助。

为满足考生备考的深入需求,清华在线(www.qinghuaonline.com)开通了由本系列图书作者主讲的“新大纲辅导网络课程”,同时还将在全国部分城市开展面授宣讲活动(需交费购买或参加)。读者可以登录清华在线的“GCT 购书赠课专区”,输入密码 tup,获得清华在线为本套丛书的用户特别提供的部分免费资料,包括语文(百科知识串讲)、GCT 英语词汇精讲、部分高校历年录取分数线等三项内容。此外,集齐 4 份本“出版说明”,还可以以优惠价格参加宣讲活动。详情可登录清华在线查询。

欢迎广大读者选用本系列图书,祝大家考试成功!

清华大学出版社

2006 年 4 月

总

序

硕士学位研究生入学资格考试

Preface

工程硕士专业学位是与工程领域任职资格相联系的专业学位。该专业学位的设置主要在于培养高层次的工程技术和工程管理人才。自 1997 年国务院学位委员会正式通过设置工程硕士专业学位以来,已批准 205 个培养单位,涉及到 40 个工程领域,共招收工程硕士研究生 28.9 万余人,累计授予工程硕士学位 5 万余人。随着工程硕士研究生教育的发展,按照党的“十六”大对教育工作提出的“坚持教育创新,深化教育改革”的总体要求,借鉴国外先进的考试办法,结合我国的实际情况,建立相适应的工程硕士研究生入学考试制度,不仅是创新人才培养的需要,是我国研究生教育规模发展的需要,是我国高等教育参与国际竞争的需要,而且还是坚持教育创新的一项重要举措,是一项具有重要意义的改革实践,因此,国务院学位委员会办公室决定,自 2003 年起报考在职攻读工程硕士专业学位研究生的考生,需参加全国统一组织的入学资格考试,接受综合素质的测试。

硕士学位研究生入学资格考试,英文名称为 Graduate Candidate Test,简称 GCT。试卷由四部分构成:语言表达能力测试、数学基础能力测试、逻辑推理能力测试和外语运用能力测试。GCT 试题知识面覆盖哲学、经济学、法学、教育学、文学、历史学、理学、工学、农学、医学、军事学、管理学等门类。试题重点考核考生综合能力水平和反应速度。经过近几年的实践和改革,考试内容和形式不断完善,考试的适用范围也逐步扩展到工程硕士以外的一些领域。

为配合考试办法的改革,从 2003 年起,全国工程硕士专业学位教育指导

委员会特委托清华大学根据国务院学位委员会办公室组织制定的考试指南的要求和精神,组织编写了这套《硕士学位研究生入学资格考试考前辅导教程》丛书,以帮助考生在短时间内了解考试内容,提高应试水平.此后,丛书每年都改版一次,以及时反映考试大纲的变化,不断提高整体质量.2006年,我们根据《硕士学位研究生入学资格考试指南(2006年版)》再次对丛书进行了改版修订.这套丛书考虑了应试人员的专业背景,侧重应试人员逻辑思维能力,阅读、表达及运用能力,抽象概括能力与基本运算能力等方面的提高.本丛书包含了大量的例题和习题,并附有模拟题和题解,帮助应试人员自我训练和自我检验.

清华大学继续教育学院为本丛书的出版做了大量的组织工作,清华大学出版社为本丛书的出版给予了大力的支持,各位编委付出了辛勤的劳动.在此,向所有为本书的编写、修改和出版做出过贡献的人士表示诚挚的感谢!

作为考试辅导教材,本丛书力求简明扼要,准确反映考试指南的要求.但由于组织者的经验和水平有限,本书难免有疏漏和不足之处,欢迎大家提出宝贵意见,以便今后改进工作.

全国工程硕士专业学位教育指导委员会

2006年5月

前

言

硕士学位研究生入学资格考试

Foreword

本书是根据最新版硕士学位研究生入学资格考试指南编写的数学辅导教材,以方便考生备考。

在考试指南中,数学部分主要测试:考生所具有的数学方面的基础知识和基本思想方法,逻辑思维能力、数学运算能力、空间想像能力以及运用所掌握的数学知识和方法分析问题和解决问题的能力。

在硕士学位研究生入学资格考试中,数学测试部分包括算术、初等代数、几何与三角、一元微积分和线性代数 5 部分内容,测试的题目由 25 道四选一的单项选择题构成,其中算术、初等代数、几何与三角部分的题目有 15 道,一元微积分、线性代数部分的题目有 10 道,测试的时间为 45 分钟。

从试卷的设计中可以归纳出如下的特点:

1. 内容多,战线长. 从内容来看,涵盖小学、中学所学的全部数学内容及大学所学的大部分数学内容,从时间来看,跨越从小学到大学 16 年的历程。

2. 题量大,覆盖广. 尽管 25 道题目与测试内容所涵盖的上百个知识点相比是不多的,但相对于 45 分钟的测试时间来说,题量还是相当大的. 这意味着每道题的用时平均要控制在 1 分 48 秒之内. 各部分内容所包含的题目数量使得题目具有很广的覆盖面。

3. 题型单一,重视基础. 这是题量大、覆盖广的必然结果. 为了使大多数的考生能在短短的 45 分钟内完成 25 道相互独立的题目,只能采用四选一这样的简单题型,而题目中所涉及的知识点也只能是基础知识和基本方法,不太可能有复杂的推论和繁琐的计算. 但题型简单,重视基础,并不意味着题目容

易,其中一些题目的出题方式还是很灵活的.

尽管题目类型均为单项选择题,但要在很短的时间内给出正确的答案,就要求考生不仅要扎实地掌握所要考的基础知识,而且还要灵活地运用这些基础知识来尽快地分析问题和解决问题.

在内容的组织上,我们力求简明扼要,以准确地反映考试指南的要求,尽可能地适合读者备考的需要.在具体编写过程中,通过下面3个方面来体现上述的指导思想:

1. 为了便于考生进行系统的总结和复习,按知识结构细化了5部分的内容,将5部分内容分解为18章.每章汇总了考试指南中所涉及的重要知识点,其中包括基本概念、基本理论以及基本方法,其间安排了一些例题以加强对重要知识点的讲解和分析.

2. 在每章中都安排了一节“典型例题”,其中的题目都是以四选一的形式来设计的,随后给出正确答案和具体的分析过程.通过这些典型问题,不仅可以使考生熟悉考试的题目类型以及知识点的可能测试方式,而且通过对典型问题的分析,细化了所汇总的基本概念、基本理论和基本方法,以帮助读者突破难点,提高分析问题和解决问题的能力.

3. 为了便于读者全面地检验复习的情况,书后配备了两套模拟试题,供全面复习后的读者使用.同时,与此教程配套出版了《硕士学位研究生入学资格考试数学模拟试题与解析》,供考生们选用.

由于编者的经验和水平所限,书中难免有疏漏和不足之处.欢迎广大读者、辅导教师及各方面的专家批评指正.

编 者

2006年4月

目

硕士学位研究生入学资格考试

录

Contents

第1部分 算 术

第1章 算术	1
1.1 数的概念、性质和运算	1
1 数的概念	1
2 数的整除	1
3 数的四则运算	2
4 比和比例	2
1.2 应用问题举例	3
1 整数和小数四则运算应用题	3
2 分数与百分数应用题	7
3 简单方程应用题	9
4 比和比例应用题	10
1.3 典型例题	12

第2部分 初等代数

第2章 数和代数式	25
2.1 实数和复数	25
1 实数、数轴	25
2 实数的运算	26
3 复数	26

2.2	代数式及其运算	28
1	整式及其加法与乘法	28
2	因式分解	28
3	整式的除法	29
4	分式	30
5	根式	31
2.3	典型例题	32
第3章	集合、映射和函数	35
3.1	集合	35
1	集合的概念	35
2	集合的包含关系	36
3	集合的基本运算	36
3.2	映射和函数	37
1	映射的概念	37
2	函数	37
3	反函数	39
4	函数的单调性、奇偶性和周期性	39
5	幂函数、指数函数和对数函数	40
3.3	典型例题	43
第4章	代数方程和简单的超越方程	46
4.1	概念	46
4.2	一元一次方程	46
4.3	二元一次方程组	46
4.4	一元二次方程的性质	48
1	判别式	48
2	根和系数的关系	48
3	二次函数的图像和一元二次方程的根	48
4.5	解一元代数方程	50
1	配方法	50
2	公式法	50
3	分解因式法	50
4.6	根的范围、方程的变换	51
1	确定根所属的区间	51
2	方程的变换	52

4.7	典型例题	53
第5章	不等式	56
5.1	不等式的概念和性质	56
1	不等式的概念	56
2	不等式的基本性质	56
3	基本的不等式	56
4	解不等式	57
5.2	解含绝对值的不等式	57
5.3	解一元二次不等式	58
5.4	解分式不等式	60
5.5	解简单的无理不等式	61
5.6	利用函数的性质和图像解不等式	62
5.7	典型例题	63
第6章	数列、数学归纳法	67
6.1	数列的基本概念	67
6.2	等差数列	69
6.3	等比数列	71
6.4	数学归纳法	73
6.5	典型例题	73
第7章	排列、组合、二项式定理和古典概率	78
7.1	排列和组合	78
1	基本概念	78
2	排列数和组合数公式	78
3	例题	79
7.2	二项式定理	81
7.3	古典概率问题	82
1	基本概念	82
2	等可能事件的概率	83
3	互斥事件有一个发生的概率	85
4	相互独立事件同时发生的概率	85
5	独立重复试验	86
7.4	典型例题	87

第3部分 几何与三角

第8章 常见几何图形	91
8.1 常见平面几何图形	91
1 三角形	91
2 四边形	92
3 圆和扇形	93
4 平面图形的全等和相似关系	93
8.2 常见空间几何图形	95
1 长方体	95
2 圆柱体	95
3 正圆锥体	95
4 球	95
8.3 典型例题	97
第9章 三角学的基本知识	104
9.1 三角函数	104
1 角和三角函数	104
2 同角三角函数的关系	105
3 诱导公式	105
4 三角函数的图像和性质	106
5 例题	107
9.2 两角和与差的三角函数	108
1 两角和与差公式	108
2 倍角与半角公式	108
3 例题	108
9.3 解斜三角形	109
9.4 反三角函数	110
9.5 典型例题	112
第10章 平面解析几何	116
10.1 平面向量	116
1 基本概念	116
2 向量的加法与数乘	116
3 向量的内积	117
4 有向线段的定比分点	118

10.2	直线	119
1	直线的方向向量、倾斜角和斜率	119
2	直线的方程	119
3	两条直线的位置关系	120
10.3	圆	123
10.4	椭圆	124
10.5	双曲线	125
10.6	抛物线	126
10.7	例题	127
10.8	典型例题	128

第4部分 一元函数微积分

第11章	极限与连续	132
11.1	函数及其特性	132
1	函数的定义	132
2	函数的特性	133
3	复合函数与初等函数	134
11.2	数列的极限	135
1	数列的极限	135
2	数列极限的性质	136
3	数列极限的四则运算	136
4	数列极限存在的准则	136
11.3	函数的极限	137
1	函数极限的定义	137
2	函数极限的性质	138
3	函数极限的运算法则	138
4	两个重要极限	139
11.4	无穷小量与无穷大量	141
1	无穷小量与无穷大量的定义	141
2	无穷小量与无穷大量的关系	142
3	无穷小量与函数极限的关系	142
4	无穷小量的性质	142
5	无穷小量的比较	142
6	等价无穷小量替换定理	143

11.5	函数的连续性	144
1	连续的定义	144
2	函数间断点及分类	145
3	连续函数的运算法则	145
4	连续函数在闭区间上的性质	146
11.6	典型例题	146
第 12 章	一元函数微分学	153
12.1	导数的概念	153
1	导数的定义	153
2	导数的几何意义	155
3	可导性与连续性的关系	155
12.2	导数公式与求导法则	156
1	导数公式	156
2	四则运算的求导法则	157
3	复合函数的求导法则	159
12.3	高阶导数	162
12.4	微分	164
1	微分的定义	164
2	微分与导数的关系	164
3	微分的几何意义	165
4	微分基本公式和四则运算法则	165
5	一阶微分形式不变性	166
12.5	中值定理	167
1	罗尔定理	167
2	拉格朗日中值定理	167
12.6	洛必达法则	169
12.7	函数的单调性与极值	172
1	函数单调性的判定法	172
2	函数的极值及判断	173
12.8	函数的最大值、最小值问题	175
12.9	曲线的凹凸、拐点及渐近线	177
1	曲线的凹凸、拐点	177
2	曲线的渐近线	178
12.10	典型例题	179

第 13 章 一元函数积分学	192
13.1 不定积分的概念和简单的计算	192
1 原函数、不定积分的概念	192
2 不定积分基本计算公式	192
3 不定积分的性质	193
13.2 不定积分的计算方法	194
1 第一类换元法(凑微分法)	194
2 第二类换元法	197
3 分部积分法	200
13.3 定积分的概念及性质	202
1 定积分的概念	202
2 定积分的几何意义	203
3 定积分的性质	203
13.4 微积分基本公式、定积分的计算	206
1 牛顿-莱布尼茨公式	206
2 变量替换法	206
3 分部积分法	207
13.5 定积分的应用	211
1 平面图形的面积	211
2 旋转体体积	211
13.6 典型例题	213

第 5 部分 线性代数

第 14 章 行列式	226
14.1 行列式的概念与性质	226
1 行列式的定义	226
2 行列式的性质	227
3 几个特殊的行列式	229
14.2 行列式的计算	230
14.3 典型例题	233
第 15 章 矩阵	238
15.1 矩阵及其运算	238
1 矩阵的概念	238
2 矩阵的运算	239

3	方阵的行列式	243
4	特殊矩阵	243
15.2	可逆矩阵	245
1	可逆矩阵与逆矩阵的概念	245
2	矩阵可逆的充要条件	245
3	可逆矩阵的性质	247
15.3	矩阵的初等变换	249
1	初等变换	249
2	用初等变换求可逆矩阵的逆矩阵	250
15.4	矩阵的秩	252
1	矩阵的秩的概念	252
2	矩阵的秩的计算	252
3	矩阵运算后秩的变化	253
15.5	典型例题	254
第 16 章	向量	262
16.1	n 维向量	262
1	n 维向量的定义	262
2	n 维向量的线性运算	262
16.2	向量组的线性相关性	264
1	向量的线性组合与线性表出	264
2	向量组的线性相关与线性无关	265
3	其他几个有关的结论	267
16.3	向量组的秩	268
1	向量组的等价	268
2	向量组的秩和最大线性无关组	268
3	向量组的秩和矩阵的秩的关系	270
16.4	典型例题	272
第 17 章	线性方程组	278
17.1	线性方程组的基本概念	278
1	非齐次线性方程组	278
2	齐次线性方程组	279
17.2	求解齐次线性方程组	279
1	齐次线性方程组有非零解的条件	279
2	齐次线性方程组解的性质	280