W & W Education

水木艾迪教育丛书

考研数学应试导引与进阶

概率论与数理统计通用辅导讲义

葛余博 刘坤林 谭泽光 俞正光 编著

清华大学出版社

概率论与数理统计

W & W Education 水木艾迪教育丛书

考研数学应试导引与进阶

概率论与数理统计
通用辅导讲义

葛余博 刘坤林 谭泽光 俞正光 编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是作者根据新的研究生入学统一考试大纲，结合多年的教学经验和考研辅导经验精心编写而成.主要内容包括事件概率、条件概率、随机变量及其分布、重要分布律、随机向量、极限定理、抽样分布、参数估计、假设检验等.每部分内容均按照“知识综述与应试导引”、“问题集粹”、“自测与模拟题”进行编排.

本书主要针对参加研究生入学考试的理工类与经济类考生，也可作为大学本科和专科学生的教学辅导用书.

版权所有，翻印必究.举报电话：010-62782989　13501256678　13801310933

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签，无标签者不得销售.

本书防伪标签采用特殊防伪技术，用户可通过在图案表面涂抹清水，图案消失，水干后图案复现；或将表面膜揭下，放在白纸上用彩笔涂抹，图案在白纸上再现的方法识别真伪.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计通用辅导讲义/葛余博等编著.—北京：清华大学出版社，2006.5

(考研数学应试导引与进阶)

ISBN 7-302-12937-1

Ⅰ.概…　Ⅱ.葛…　Ⅲ.①概率论—研究生—入学考试—自学参考资料 ②数理统计—研究生—入学考试—自学参考资料　Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 039599 号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦

http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084

社 总 机：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969

组稿编辑：刘　颖

文稿编辑：赵从棉

印 装 者：北京国马印刷厂

发 行 者：新华书店总店北京发行所

开　　本：185×260　**印张**：16.25　**字数**：415 千字

版　　次：2006 年 5 月第 1 版　2006 年 5 月第1 次印刷

书　　号：ISBN 7-302-12937-1/O・531

印　　数：1～4000

定　　价：25.00 元

丛 书 序

全国硕士研究生入学统一考试作为一种选拔性考试，并不同于等级考试. 命题工作人员的任务是结合对基本知识点的理解与不同知识点的交叉运用能力，在试题中设置不同深度的“陷阱”，以求从能力、水平上将庞大的考生队伍拉开档次，进而实现国家选拔人才的目的. 考生的任务是在全面准确地理解知识系统的前提下，掌握识破命题“陷阱”的能力，力争在考场上以居高临下的知识洞察力与良好的应试状态，一举成功.

学习数学需要培养悟性，应试考研数学需要一定的数学知识洞察力. 所谓悟性或洞察力，是指对数学基本概念的深入理解与准确把握. 而这种理解与把握，首先要求对基本概念与基本知识点的理解要准确、完整，进一步才是掌握知识的系统性、交叉性与灵活性. 没有对基本概念与基本知识点理解的准确性与完整性，就谈不上掌握知识的系统性及灵活运用的能力，当然更谈不上解题的思路与技巧.

本套《考研数学应试导引与进阶》作为考研数学的通用辅导讲义，其宗旨是：“为考生面对考试造就一种居高临下的知识洞察力和感觉良好的临场状态.”这也是水木艾迪考研辅导班的教学宗旨.

我们一贯强调，首先注重知识的基础性、系统性与完整性. 从分析历届的试题组成来看，完全基础性题目一般占 60 分以上(满分 150 分)，并且基本知识点在综合题目中也占有相当的分量，基础性知识点的失误往往导致选错综合题目的切入点，最后造成的是全局性错误. 相反，如果对基本知识点理解准确、全面、系统，则对题目的切入点就会准确无误，即使解答过程中有个别错误，也往往是局部错误，损失不大. 以一种加权的估计来分析，基本知识点在全部试卷中所占的比重可高达 120 分. 从阅卷过程中所反映出的问题来看，考生出现的大量错误是由于对基本概念与知识点理解的不准确或不完整，甚至是对基本知识点理解的扭曲所造成的.

对于基本知识点的理解与学习，应首先做到理解上的准确性、全面性，其次是系统性与交叉性. 还应注意基本概念的背景和各个知识点间的相互关系，适量做题，少做难题，不做偏题是可取之策. 对与基本知识点相关的基本题目涉及的方法与技巧，要多总结与分析，力争做到举一反三，以一当十，这样的训练会促使考生的能力与技巧成熟起来，即使遇到难题，也会容易地找到切入点与思路.

《考研数学应试导引与进阶》以最简捷的篇幅梳理数学三门课程中的若干基本知识点，以及不同知识点之间的内在联系，配合适量典型的基本题型与知识交叉运用题型，引导读者高效率地做到对基本概念与基础知识点理解的准确性与完整性，并逐渐过渡到对掌握知识的系统性与交叉运用能力的训练. 通过对基本题目涉及的方法与技巧的总结与分析，对综合题目中知识点交叉模式的了解与熟悉，以达到对这些内容具有敏感性. 全套讲义每个章节具有统一的编排格式：

[**知识综述与应试导引**] 依据全国硕士研究生入学统一考试大纲中要求的重点，对知识模块给予简短的综述，突出重点，详解难点，指出读者容易忽略的薄弱环节及存在的弱点，必要时给出识破命题“陷阱”的特别提示.

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

[**问题集粹**] 以学生提问的方式,由编者设计覆盖基本知识点与概念交叉运用能力的若干问题,配以解答与导引,同时针对此类问题,配合若干典型例题,力图使读者牢固掌握相应知识点及具有处理相关题型的能力.

[**自测与模拟题**] 每一讲后配置典型练习题,给读者自我检测及训练发挥的空间,充分体现教学双向互动的过程.在书后给出练习题的解答、答案与提示(做题时请不要先看解答或答案)供读者核实自己的解答.

书中所有例题与练习题,都是经过编者精心研究与讨论,进而设计与编排所成.这一工作是基于作者在清华大学与清华大学考研辅导班的多年教学经验积累,以及对全国硕士研究生入学统一考试要求与试题类型深入研究的结果,具有重要的典型性与代表性.对于这些例题与练习题,读者可视自身情况选读或选做,但应注意两点:一是立足于独立思考与亲自动手练习,二是应将每一个题目作为一类问题,以达到触类旁通的目的.

参与本书编写的老师为清华大学在职教师,他们是一个教学与研究成绩卓著的教授群体,长期担任水木艾迪考研辅导班主讲,突出了双向了解的优势:了解全国硕士研究生入学统一考试大纲与命题走向,了解考生的知识状况与实际需求.他们有许多教材与专著出版,广大考生给予了很高的评价,他们也愿做广大考生和学生的良师益友.基于长期丰富的教学研究与授课经验积累,经过对全国硕士研究生入学考试大纲与辅导教学进行长期专门的深入研究,倾心编写出这套讲义,真诚希望为在读大学生的学习,以及参加研究生入学统一考试的考生送去一份智慧,提供一份帮助.

本教材的读者范围包括参加全国硕士研究生入学统一考试的考生,包括数学试卷一、二、三、四的全体应试者,大学本科在读学生.

特别指出的是,不少人认为经济类考生只学过经济类高等数学就够了,其实这是一种误导.试卷三、四的历年题目表明,题目的题型与难度都与试卷一、二相当,并且与试卷一、二共用题目的比例逐年提高.那些少量含有经济术语的题目(2005—2006 年完全没有此类题目)不会成为答卷障碍,如最大利润问题与最小成本问题等不过是一般理工科数学教学中的普通例题而已.如果考生有较好的理工科数学基础,应答试卷三、四将不会遇到任何困难,2004—2006 年的数学试卷更是进一步说明了这一特点.

清华大学出版社与北京水木艾迪教育培训学校为本教材的出版做了大量有效的工作,清华大学数学科学系李津教授,以及许多老师对本教材的编写工作给予真诚的鼓励与支持,编者在此向他们真诚致谢.

限于作者水平和时间仓促,对书内的疏漏与不当之处,敬请读者批评指正,以便重印和再版时予以改正.

编　者
2006 年 2 月于清华大学

作 者 简 介

刘坤林教授

清华大学责任教授，从事基础数学与应用数学的教学与研究工作，获国家精品课程奖二等奖与国家教学成果奖二等奖，两次获清华大学教学优秀奖．研究方向：控制理论，系统辨识与随机系统建模及预测，并行计算．1994—1995 年在美国 Texas A&M University 与 Duke University 任访问研究教授并讲学．发表学术论文 30 多篇，著有教材《工程数学》，《系统与系统辨识》，《微积分》，主编《大学数学——概念方法与技巧》，《大学数学清华考研经典备考教程》，《高等数学典型题题典——考研数学应试能力进阶》等书籍．先后 7 次获国家及省市部级科学技术进步奖．长期担任水木艾迪考研辅导班主讲，清华大学 MPA 考前培训班主讲．对全国硕士研究生入学统一考试大纲与教学要求有深入的研究．讲课特点：深入浅出，富有启发性，教学中的选题对考研具有极强的跟踪性，对概念的阐述精辟准确，形象生动，了解学生，针对性强，普遍受到同学欢迎．

历任中国工业与应用数学学会常务理事，副秘书长．系统与控制专业委员会委员，《控制理论及其应用》特邀审稿专家．国家人事部编《中国专家大辞典》(卷一)收录专家．

谭泽光教授

清华大学责任教授，清华大学分析系列课程负责人．长期在清华大学从事数学基础课程教学和应用数学及运筹学方面的科研工作，曾在奥地利 Graz University 任访问教授．获国家精品课程奖二等奖与国家教学成果奖二等奖．长期担任水木艾迪考研辅导班数学主讲．对全国硕士研究生入学统一考试大纲与教学要求有深入的研究，讲课风格热情幽默，重点突出，技巧性强，深入浅出，富有启发性，生动精辟，深受同学欢迎．学员评价听谭老师的课“是一种享受，收获很大”．曾任北京地区考研数学阅卷组组长．曾负责多项科研项目，发表学术论文 20 多篇，并编著《微积分》、《大学数学——概念方法与技巧》、《大学数学清华考研经典备考教程》、《数学规划》等图书．先后获省部级以上奖励 4 次，1992 年获国家科技进步二等奖．

任《高校应用数学学报》编委．1997 年开始担任国家工科基础课程教学(清华数学)基地负责人，投入较多精力从事数学教改研究工作，2001 年获国家教学改革成果二等奖．

俞正光教授

清华大学责任教授，清华大学代数系列课程负责人．从事组合图论的研究，发表学术论文10多篇．曾在加拿大 Calgary University 任访问教授．任《清华大学学报》编委．主编《线性代数与解析几何》、《理工科代数基础》、《大学数学——概念方法与技巧》等图书．长期担任水木艾迪考研辅导班数学主讲和 MBA 入学辅导数学主讲．对全国硕士研究生入学考试大纲与教学要求有深入的研究，讲课风格深入浅出，条理规范，重点突出准确，受到同学一致欢迎．1997 年开始担任国家工科基础课程教学(清华数学)基地负责人，从事数学教改研究工作．

曾参加编写由全国工商管理硕士研究生入学考试研究中心组织的《MBA 联考考前辅导教材》，主编《全国工程硕士研究生入学考试数学考试大纲及考前辅导教材》等各类考研数学辅导教材．

葛余博教授

清华大学数学科学系教授，在随机过程及其应用方面的科研工作多次获奖，长期担任概率统计、随机过程等课程的主讲教学工作，在教学研究和实践中积累了大量宝贵经验．水木艾迪考研辅导班概率统计主讲，对全国硕士研究生入学考试大纲与教学要求有深入的研究，讲课风格：擅长抓住概念实质、融会贯通，启发式教学，利于熟练掌握并灵活运用知识，条理规范，重点突出，编写《随机数学方法》等教材．近几年的辅导教学多次命中考研真题，受到同学一致欢迎．

目　　录

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

第 1 讲　事件概率和等可能概型

知识综述与应试导引

- 理解概率论的两个最基本概念："事件"和"概率". 所谓事件，粗略地可视为随机试验的结果，事件间的关系和运算可借用集合的关系和运算. 概率的定义和性质保证所定义的"概率"确实是"量度"事件发生可能性大小的数量指标.
- 介绍并比较两个常见的、有等可能性的简单概率模型(概型)：古典概型和几何概型. 前者是离散的，主要研究工具是排列和组合；后者是连续型的，主要研究工具是几何方法(求长度、面积和体积等)，因而会用到微积分. 要会判断和计算这两类概型，而要正确计算必须注重样本空间的选取. 排列组合公式很多，本讲列出应该掌握的常用组合公式.
- 由古典概型的研究还引出二项分布和超几何分布，它们都是大纲明确要求掌握的. 几何概型既是第 4 讲均匀分布的产生背景，也对求均匀分布随机变量(包括随机向量)的函数分布和矩，提供更加简捷和直观的方法，还可将二重积分计算化为一重定积分计算，从而降低难度，减少计算错误，参看例 5.4.3 和例 5.4.5.
- 概率的公式中最为活跃的、常考的是概率的加法公式和逆事件公式. 本讲列出加法公式常用形式；逆事件公式常使问题一下子变得很简单(参看例 1.4.3、例 1.5.2 和例 1.8.1). 这两个公式，连同第 2 讲的条件概率及有关的乘法公式、全概率公式及贝叶斯公式，以及独立性定义与性质的公式，都是考查的热点，必须在理解基础上熟练掌握.

1.1　事件与概率

1.1.1　事件的概念与性质

1. 概率论研究的对象和任务

"天有不测风云，人有旦夕祸福"，精炼地概括了自然界和人类社会活动中广泛存在着随机现象. 概率论是研究随机现象的数量规律的数学分支，其基础是概率空间. 概率空间由三部分组成：样本空间——考察的对象，事件体——所有随机现象中随机事件的全体，以及概率(测度)——事件发生的可能性的数量指标.

随机现象中事件发生的可能性大小是客观存在的，量度的数量指标就是概率.

2. 事件的概念

"事件"和"概率"是概率论基础的两个最基本概念.

随机试验是指这样的一种试验:试验可以重复进行;每次试验的结果不止一个;每次试验前不能肯定会出现哪一个结果.随机试验里最基本的不能再分解的结果叫基本结果,也叫基本事件.由若干基本结果组成的,称为复合事件.基本事件和复合事件,泛称事件.特别地,包含所有基本结果的,称为必然事件,也称为样本空间,其反面也认为是一个事件,就是不可能事件.所有事件的全体称为事件体.必然事件、不可能事件及事件体分别专记为Ω,$\varnothing$及$\mathscr{F}$.

从1,2,3三个数中随机取一个数,基本事件就是$\{1\}$、$\{2\}$、$\{3\}$,必然事件$\Omega=\{1,2,3\}$,事件$\{1\}$的逆事件为$\{2,3\}$,而事件体为

$$\mathscr{F}=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\Omega,\varnothing\} \tag{1.1}$$

如果只是关心是否取出"3",则此时所有的事件便只有4个,$\mathscr{F}=\{\{3\},\{1,2\},\Omega,\varnothing\}$,这实际上变为伯努利试验(参看第3讲)的事件体.

上例中Ω是一个有限的点集,事件体可以全部列出来.而在考察电视机寿命时,Ω就是一个实数区间.

3. 事件的运算和性质

基于集合论建立了"事件"这一概念,自然可以借用集合间的关系和运算来刻画现实中事件间的关系和运算.A,B集合求交的运算常略"$\cap$"不写,即$AB=A\cap B$.在上面取数例中,如果事件"取出前两个数"记为A,"取出不是1"记为B,那么一次试验中取出"1"时,那就可以说事件A出现了,当然也可以说事件B未出现,用集合论中的表示法分别记为$1\in A$和$1\notin B$,也记为$\omega_1\in A$和$\omega_1\notin B$.当然也有$\omega_1\in A\bar{B}=A-B$.而如果取出"2",则$\omega_2\in AB$,此时事件A和B同时发生了.这样可以在集合的关系和运算与事件的关系和运算之间建立对应,如表1.1所示.

表 1.1

集合的关系和运算	事件的关系和运算
$\omega\in A$	事件A发生
$A\subset B$	事件A发生则事件B必发生
$A\cup B$	事件A与事件B至少有一个发生
$\bigcup_i A_i$	事件A_i,$i=1,2,\cdots(,n)$,中至少有一个发生
$A\cap B$或AB	事件A与事件B同时发生
$\bigcap_i A_i$	所有事件A_i,$i=1,2,\cdots(,n)$,都同时发生
$A\bar{B}$或$A-B$	事件A发生而事件B不发生

因而事件间运算成立以下定律.

结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(AB)C=A(BC)$

交换律:$A\cup B=B\cup A$, $AB=BA$

分配律:$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$, $C(A\cup B)=(CA)\cup(CB)$

对偶原理:$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A_i}$, $\overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A_i}$

常称$A\cup B$为A与B的和事件,而称AB为积事件.如果$AB=\varnothing$,则称事件A与B互

斥，或不相容，有时也说不相交. 如 $A_iA_j=\varnothing$，$\forall\, i\neq j$，则诸事件 A_i 两两不交.

1.1.2　概率的概念与性质

1. 概率的概念

“概率”是概率论的又一最基本的概念. 事件的概率值可以看成以事件(用集合论的话说，是集合)为自变量的一个函数值，它们在[0,1]之中. 严格的定义如下.

定义 1.1　设 P 是定义在事件体 $\mathscr{F}$ 上的实值集函数，满足

(1) 非负性：$P(A)\geqslant 0$，$\forall\, A\in\mathscr{F}$；

(2) 规范性：$P(\Omega)=1$；

(3) 可列可加性：设 $A_i\in\mathscr{F}$，$i=1,2,\cdots$，且两两不交，即 $A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j$，则

$$P\Big(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

则称 P 为定义在事件体 $\mathscr{F}$ 上的**概率**，称 $P(A)$ 是**事件 A 的概率**.

$\Omega,\mathscr{F},P$ 合称概率空间. 这里 Ω 是所观测的对象全体，也称样本空间，$\mathscr{F}$ 是事件全体，而 P 为概率.

2. 概率的运算和性质

下面的概率的性质定理保证上述定义的“概率”确实能作为事件发生可能性大小的数量指标. 比如说，不可能事件的概率应该为 0，在定义中没有写明，但能得到证明；又比如说，事件 B 如果包容了事件 A，即事件 A 发生必然导致事件 B 发生，那么 $P(A)$ 应该不大于 $P(B)$ 等，也都能得到证明.

定理 1.1(概率的性质)　设 P 是事件体 $\mathscr{F}$ 上的概率，则

(1) $P(\varnothing)=0$；

(2) 有限可加性：设 $A_i\in\mathscr{F}$，$i=1,2,\cdots,n$，且两两不交，则 $P\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}A_i\Big)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$；

(3) 设 $A\in\mathscr{F}$，则 $P(\overline{A})=1-P(A)$；

(4) 单调性：如果 $A\subset B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$；

(5) 连续性：设 $A_i\in\mathscr{F}$，且单调，即 $A_i\subset A_{i+1}$ 或 $A_i\supset A_{i+1}$，$i=1,2,\cdots$，此时分别定义 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，则

$$P(\lim_{n\to\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$$

对于 n 个不相交事件的和事件，其概率计算有一般加法公式.

定理 1.2(加法公式)　设 $A_i\in\mathscr{F}$，$i=1,2,\cdots,n$，则

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\Big)=s_1-s_2+s_3+\cdots+(-1)^{n+1}s_n \tag{1.2}$$

其中

$$s_1=\sum_{i=1}^{n}P(A_i),\quad s_2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)$$

$$s_3 = \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i A_j A_k), \cdots, \quad s_n = P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

可见 s_j 是这 n 个事件中每 j 个事件同时发生的概率的和.

特别地,当这 n 个事件彼此不交时,式(1.2)就是有限可加性(定理 1.1 的(2)).常用的加法公式是 $n=2$ 和 $n=3$ 的情形.

当 $n=2$ 时,式(1.2)变为

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1 + A_2\overline{A}_1) = P(A_1) + P(A_2\overline{A}_1) \tag{1.3}$$

把 $P(A_2)=P(A_2A_1)+P(A_2\overline{A}_1)$ 代入式(1.3),得

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) \tag{1.4}$$

此即 $n=2$ 时的式(1.2).

当 $n=3$ 时,式(1.2)变为

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) \\ & - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3) \end{aligned} \tag{1.5}$$

从图 1.1 可以直观地得到上式的证明.事实上,如用 p_k 表示图 1.1 中对应的彼此不相交的第 k 个事件的概率,容易看到 $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \sum_{k=1}^{7} p_k$;而式(1.5)右方的计算列表如表 1.2 所示.

表中"+"表示加上在这一行上此列对应的概率值,而"−"表示减去这个概率值.容易确认式(1.5)成立.

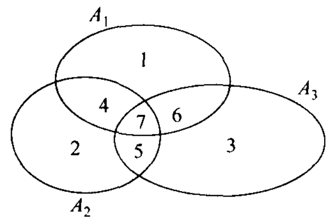

图 1.1 图解加法公式

表 1.2

		p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7
$+s_1$	$+P(A_1)=$	+			+		+	+
	$+P(A_2)=$		+		+	+		+
	$+P(A_3)=$			+		+	+	+
$-s_2$	$-P(A_1A_2)=$				−			−
	$-P(A_1A_3)=$						−	−
	$-P(A_2A_3)=$					−		−
$+s_3$	$+P(A_1A_2A_3)=$							+

3. 值得注意的几个问题

对于两个事件的和,常用处理方法有:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) && \text{(一般加法公式)} \\ &= P(A_1) + P(\overline{A}_1A_2) = P(A_2) + P(A_1\overline{A}_2) && \text{(有限可加性)} \\ &= P(A_1\overline{A}_2) + P(A_1A_2) + P(\overline{A}_1A_2) && \text{(有限可加性)} \end{aligned} \tag{1.6}$$

注意集合的减法与数的减法的不同.一般地,$P(A-B) \neq P(A)-P(B)$.

实际上,概率的减法公式为

$$P(A-B) = P(A-AB) = P(A) - P(AB)$$

只有 $B \subset A$ 时，才有

$$P(A-B)=P(A)-P(B)$$

1.2　有等可能性的两个概型

有等可能性的两个简单概率模型（概型）是：古典概型和几何概型. 古典概型是离散的，主要研究工具是排列和组合；几何概型是连续型的，它是第 3 讲中的均匀分布的实际背景，其主要研究工具是几何方法，也会用到微积分. 几何概型的研究对随机变量（包括随机向量）的函数分布和矩的计算很有帮助（参看例 5.4.3 和例 5.4.5）.

1.2.1　古典概型与几何概型的定义

定义 1.2　基本事件个数有限且等可能的概率模型称为古典概型.

定义 1.3　设 $\Omega, A(\subset\Omega)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中有 n 维体积的区域，用 $L(\Omega)$ 和 $L(A)$ 表示它们的 n 维体积，且 $0<L(\Omega)<\infty$. 令

$$P(A)=L(A)/L(\Omega), \qquad \forall A\subset\Omega$$

则此种概型称为几何概型.

它们的共同点是等可能性，而不同之处在于：古典概型的样本空间是有限多个，而几何概型的样本空间却是无穷多个（且不是可列的）.

例如在红色、黑色、白色三种小球数量相等的袋子中任取一球，取出的球的颜色构成三个等可能性的基本事件；闰年里一个人的生日有 366 个等可能性的基本事件（人为因素除外）. 这些概率模型，都是古典概型. 什么是几何概型？举个例子：明天清早会有一个馅饼从天上掉到学校礼堂前的草地上，让你去接. 你一定会找一个最大的饭盆去接. 因为饭盆的面积大，准确地说是饭盆的面积与这块草地面积之比大，接到这个馅饼的概率也就大. 至于在草地的什么地方去接，都没有关系，因为这饼掉向草地的任何一个“面积元”上，都是等可能的. 这就是几何概型问题.

1.2.2　等可能概型的计算

古典概型中可记样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_N\}$，每一个 ω_i 为一个样本点或基本场合，基本事件 $\{\omega_i\}$ 的概率 $P(\omega_i)\overset{\text{def}}{=\!=}P(\{\omega_i\})=1/N, i=1,2,\cdots,N$.

古典概型问题中事件 A 的概率

$$P(A)=n_A/n_\Omega \tag{1.7}$$

其中，n_Ω：基本事件的总个数，也即样本空间 Ω 的点数；

n_A：事件 A 中的基本事件个数，也即 A 的点数.

古典概型问题的主要计算工具是排列和组合. 一般说组合概念考虑清楚了，排列也就容易得到. 由此看来，更要注意组合方法和计算公式（参看问题 1.7）.

几何概型问题中事件 A 的概率

$$P(A)=L(A)/L(\Omega),0<L(\Omega)<+\infty$$

其中,$L(\Omega)$:n 维空间 Ω 的 n 维体积,$L(A)$:n 维区域 $A(\subset\Omega)$的 n 维体积.

所谓 n 维体积,在 $n=1$ 时的一维体积为长度,二维时为面积,三维时则是通常说的体积.

几何概型问题中的主要计算工具是用几何方法计算长度、面积等,也会用到微积分计算.

古典概型的难点在于正确建立样本空间(参看问题 1.3),而几何概型难在模型化:如何化为数学问题(参看例 1.8.1 和例 1.8.2).

1.2.3 等可能概型间的关系

几何概型与古典概型都有某种等可能性,或者说“均匀性”.前述馅饼的几何概型例子中,如果你在那块草地实行“圈地运动”,圈得草地的 1/16,那么你接到那只馅饼的可能性就是 1/16.这实际上已经变成古典概型问题了:每个 1/16 的草地都成为一个基本事件.两个概型的差别在于,几何概型的样本空间是无限(不可列)的,而古典概型的样本空间是有限的.几何概型的更一般且准确的刻画,可参看第 4 讲中的均匀分布定义.

问题集粹

问题 1.1

事件间的关系和运算中应该注意些什么问题?

[解答与导引] 事件间的关系是用集合间的关系来定义的,事件间的运算是利用集合运算的关系来定义的,详细可见表 1.1.因此它具有集合运算的所有性质.

正因为如此,事件间的关系也常用集合间的关系来描述,例如说事件的不相容为事件不相交,说事件 A 的逆事件 $\overline{A}$ 为事件 A 的余事件,甚至也说成 A 的余等;而事件间的运算也常用集合间的运算来表示,例如求和、求交等.

虽然事件的求并、求交等也常说成求和、求积,并且求和用“+”表示,求交的运算符常略去不写,但是事件的运算与代数运算是不同的.

(1) 一般地,$(A\cup B)-B\neq A$;

(2) 当 $A\subset B$ 时,$A\cup B=B,AB=A,\overline{A}\supset\overline{B}$;

(3) 对偶原理是事件(或集合)的特别性质;

(4) 事件间关系和运算的正确判断直接影响概率计算的正确性,因此要重视.

例 1.1.1 设 A,B,C 为三事件,用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件.

(1) A 发生,B 与 C 不发生　　(2) A 与 B 都发生,而 C 不发生

(3) A,B,C 中至少有一个发生　　(4) A,B,C 都不发生

(5) A,B,C 中不多于一个发生　　(6) A,B,C 至少有两个发生

[解] (1) $A\overline{BC}$　　(2) $AB\overline{C}$　　(3) $A\cup B\cup C$

(4) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$　　(5) $\overline{A}\overline{B}\cup\overline{A}\overline{C}\cup\overline{B}\overline{C}$　　(6) $AB\cup AC\cup BC$

例 1.1.2 指出下列命题中哪些成立,哪些不成立?

(1) $A\cup B=\overline{AB}\cup B$　　(2) $\overline{A}B=A\cup B$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com