山东省高等教育面向21世纪
教学内容和课程体系改革系列教材

高等数学

乙种本

□ 主编　王爱云　张　燕

Advanced Mathematics

中国石油大学出版社

山东省高等教育面向21世纪
教学内容和课程体系改革系列教材

高等数学

（乙种本·第二版）

主　编　王爱云　张　燕
副主编　马军英　张玉芬

中国石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:乙种本/王爱云主编.—2版.—东营:中国石油大学出版社,2006.8

ISBN 7-5636-2249-7

Ⅰ.高… Ⅱ.王… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材

Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第078863号

书　名:高等数学(乙种本·第二版)

主　编:王爱云　张　燕

责任编辑:刘玉兰(电话 0546—8391810)

出 版 者:中国石油大学出版社(山东 东营,邮编 257061)

网　址:http://www.uppbook.com.cn

电子信箱:eyi0213@hdpu.edu.cn

排 版 者:中国石油大学出版社排版中心

印 刷 者:沂南县汇丰印刷有限公司

发 行 者:中国石油大学出版社(电话 0546—8392062)

开　本:180×235　印张:26.125　字数:541千字

版　次:2002年8月第1版　2006年8月第2版第5次印刷

定　价:33.80元

再版前言

《高等数学》(乙种本)是山东省高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革系列教材中的一套教材,是为适应我省高等院校非数学类大学数学分层次教学的需要而编写的。它适合于本科师范院校的化学、生物、地理等专业的本科或专科教学使用。本教材从2002年出版以来,已在我省十多所院校使用。为适应新形势下大学数学的教育教学实际以及教材建设的需要,我们对原教材进行了全面的改写、修订。

改版后的《高等数学》(乙种本)保留了原教材的基本框架和风格,紧密联系中学新课程改革实际,参考了《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》(数学二)有关要求,在以下几个方面有突出改进。

1. 强化了与中学数学教材的衔接。对中学生容易混淆而大学数学必要的基础知识作为预备知识重点复习;函数概念采用了与中学教材同样的表述方法;对于已纳入高考的导数及其应用内容着重从知识体系方面进行理论、方法的深化;空间解析几何部分重视与立体几何知识的联系等。

2. 加强了数学理论、方法与实际的联系。坚持从实例出发抽象出数学概念;配置了较多联系专业实际及科技、生活实际的例题、习题。

3. 渗透数学思想,体现素质教育。有选择地对一些基本概念的建立、经典定理的证明、重要方法的应用,细述过程、引入符号、分析思路、加强练习,渗透数学抽象思想、数形结合思想、数学建模思想等。

4. 进一步精简、整合内容,优化知识体系。坚持"少而精,广而易懂"、"强调基础,重视应用"的原则,根据教材适用专业的层次、范围,对教材内容进行了删减、增补。

本教材的改写、修订工作由王爱云、张燕完成。

在本教材的改写、修订过程中,山东师范大学公共数学教学部的各位教师提出了许多宝贵的意见和建议。马军英、张玉芬两位教授帮助审阅了部分稿件。

本教材的编写出版及这次的改编、修订,自始至终得到中国石油大学出版社领导、同志们的指导、帮助,得到山东师范大学教务处、数学科学学院的大力支持,得到山东大学、聊城大学、鲁东大学等兄弟院校专家、同行的热情鼓励,在此一并表示衷心感谢。

由于编者水平所限,教材难免还有谬误之处,恳请专家、读者不吝指正。

编　者

2006 年 7 月

内容提要

本书包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、常微分方程、无穷级数、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分等11章。书后附有习题参考答案。

本书不仅从课程结构上，而且在内容上做了较大的革新，具有结构严谨，系统完整，叙述简洁之特点；其次是注重了联系实际和应用的广泛性，加强了结合实际的内容，数学概念尽量由实际问题引入，尽可能多地将各专业的典型问题选作例题和习题。本书习题数量适当，深度适宜。

本书涵盖了考研高等数学(二)的全部内容以及数学(三)、数学(四)的高等数学部分的主要内容。适合师范本科院校化学、生物、地理类，工科本科院校化工、财经类，以及高职和专科学校机电、计算机类的学生使用。也可供其他有相应数学教学要求的高校使用。

目　　录

第一章　函数、极限与连续

客观世界处在永恒的运动、发展和变化中. 对变化过程中变量之间的依赖关系，变量的变化趋势、变化方式的研究，产生了函数、极限与连续的概念.

本章将先介绍函数与极限的基本概念、性质和运算，然后利用极限为工具描述函数的连续性. 连续函数是最常见的一类函数，它具有一系列很好的性质，是微积分的主要研究对象.

第一节　函　　数

一、预备知识

1. 实数与数轴

中学数学介绍了实数与数轴的概念. 我们知道，实数与数轴上点的关系是一一对应的，即全体实数对应的点“布满数轴”，人类认识到实数的这种“完备性”经历了从远古到近代的漫长历史.

2. 绝对值与不等式

实数 a 的绝对值 $|a|$ 是在初中数学里给出定义的. 这定义可表示为

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -a, & a < 0, \end{cases} \quad 或 \quad |a| = \begin{cases} a, & a \geqslant 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

显然　$$|a| = \sqrt{a^2} \geqslant 0, \quad |a| = |-a|, \quad -|a| \leqslant a \leqslant |a|.$$

中学数学还给出了关于绝对值与不等式的下列关系：

$$|x| \leqslant c \Leftrightarrow -c \leqslant x \leqslant c, \quad |a| - |b| \leqslant |a+b| \leqslant |a| + |b|.$$

数轴上两点 a 与 b 之间的距离 $d = |a-b|$.

3. 区间与邻域

区间是使用较多的一类数集，高中数学已介绍，并给出了区间的集合表达式和记号.

例如，有限区间：闭区间 $[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$，开区间 $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$，半开半闭区间 $[a,b)$，$(a,b]$ 等；还有无限区间 $(a,+\infty) = \{x \mid a < x\}$ 等.

在不需要辨明区间端点以及是无限还是有限区间时，我们常用字母 I 表示区间，并简称为区间 I.

邻域是高等数学中常用到的概念.

设 x_0 为一实数，δ 为一正数，称数轴上与点 x_0 距离小于 δ 的点 x 的全体为点 x_0 的 δ 邻域，简记为 $U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=\{x\,|\,|x-x_0|<\delta\} \quad 或 \quad U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta),$$

其中 x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径. 如图 1-1 所示.

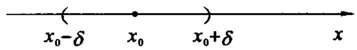

图 1-1

由于 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ 等价于 $|x-x_0|<\delta$，从几何观点看，$x\in U(x_0,\delta)$，即点 x 与定点 x_0 的距离小于 δ.

在点 x_0 的 δ 邻域里去掉中心 x_0 后的点集称为 x_0 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}.$$

无需指明邻域的半径时，可简单地用符号 $U(x_0)$ 或 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 表示点 x_0 的某邻域或某去心邻域.

二、函数的概念

通过研究一个变化过程中两个变量之间的依赖关系，可以抽象出函数概念. 中学里我们已学习了用集合语言给出的函数定义.

定义 1　设 D 是一个非空的实数集合，如果存在某个确定的对应法则 f，使得对于每一个 $x\in D$，都存在唯一的 $y\in\mathbf{R}$ 与之对应，那么就称对应法则 f 是从集合 D 到实数集 $\mathbf{R}$ 的一元函数，简称函数，记作

$$f:D\to\mathbf{R} \quad 或 \quad y=f(x),\ x\in D.$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，数集 D 称为函数 f 的定义域；$f(x)$ 是函数在点 x 的函数值，全体函数值的集合记作 $W=f(D)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$，称 W 为函数 f 的值域，函数 f 也常记作 $f(x)$ 或 $y=f(x)$.

关于函数概念我们强调以下几点：

(1) 确定函数有两个要素——定义域和对应法则. 因此，两函数相等就是它们的定义域和对应法则相同.

(2) 函数与它的自变量、因变量用什么字母表示没有关系. 除了经常选用字母 f 表示函数外，还可以任意选取其他字母表示函数，例如 $g,\varphi,F(x)$ 或 $y=y(x)$ 等.

(3) 函数定义域的确定：实际问题中的函数由问题的实际意义确定；由解析式表达的函数如无特殊说明，则是使表达式有意义的自变量的全体.

(4) 定义给出的是单值函数的概念，即对每个 $x\in D$，对应的数值 y 是唯一的. 如果

对于每个$x\in D$，都存在$y\in \mathbf{R}$与之对应，但这个不总是唯一的，那么就称这种对应法则确定了一个多值函数．例如，由方程$x^2+y^2=r^2$确定的函数就是一个多值函数，当$x\in(-r,r)$时，对应的y有两个值，如果限定$y\geqslant 0$，可以得到单值函数$y=\sqrt{r^2-x^2}$．在一定的附加条件下，多值函数往往可以转化为单值函数，这样得到的单值函数称为多值函数的单值分支．我们只研究单值函数．

设函数$y=f(x)$的定义域为D，任给$x\in D$，就有对应的函数值$y=f(x)$，这在xOy面上就确定了一个点(x,y)，我们称这种点的全体所构成的集合

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

为f的图形(图像)．

从几何上看，函数的图形大多是一条或几条曲线．

中学介绍了函数的三种表示法：解析(公式)法、列表法和图像法．还可用叙述法表示函数，但用一个解析式子来表示函数无疑是最重要的方法．下面介绍几个重要的函数：

例 1　绝对值函数 $f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$ 其定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$[0,+\infty)$，如图 1-2 所示．

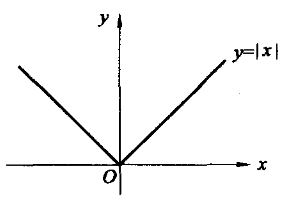

图 1-2

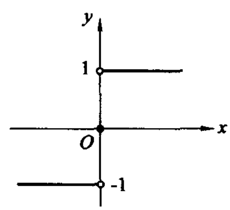

图 1-3

例 2　符号函数 $f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$ 其定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是三个点的集合$\{-1,0,1\}$，如图 1-3 所示．

例 3　取整函数 $f(x)=[x]$表示不超过x的最大整数．

如$[3.01]=[3]=[\pi]=[3.99999]=3$，$[-3.01]=[-\pi]=[-3.999]=[-4]=-4$．

其定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是全体整数的集合(图 1-4)，取整函数$[x]$可以用分段表示．

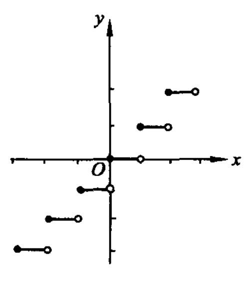

图 1-4

例 4　狄里克利(Dirichlet)函数$f(x)=D(x)$表示：

当x为有理数时$D(x)=1$，当x是无理数时$D(x)=0$．

例 1～例 4 中的函数，因变量与自变量之间的对应法则，

在不同的自变量变化范围上是用不同的解析式表示的，我们称这样的函数为分段函数．需要强调的是分段函数是一个函数，而不是几个函数．求分段函数的值，要特别注意分辨自变量所在范围上的解析表达式．

三、函数的几种特性

1．有界性

定义 2　设函数 $f(x)$ 在数集 I 上有定义，如果存在正数 M_1，使得对任意的 $x\in I$，都有 $f(x)\leqslant M_1$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有上界，正数 M_1 称为 $f(x)$ 在 I 上的上界．

如果存在正数 M_2，使得对任意的 $x\in I$，都有 $f(x)\geqslant M_2$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有下界，正数 M_2 称为 $f(x)$ 在 I 上的下界．

如果存在正数 M，使得对任意的 $x\in I$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界，正数 M 称为 $f(x)$ 在 I 上的界．否则就称 $f(x)$ 在 I 上无界．

例如，$y=\sin x$ 和符号函数都在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界；$y=\tan x$ 和取整函数则在其定义域上无界．

从几何上看，有界函数的图形完全落在平行于 x 轴的直线 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间．

容易证明，函数在 I 上有界的充分必要条件是它在 I 上既有上界又有下界．

2．单调性

定义 3　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对 I 内的任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调递增（减），区间 I 称为函数 $f(x)$ 的一个单调区间．

中学数学还介绍过函数的另外两种特性：周期性和奇偶性，在此不再赘述．

四、反函数与复合函数

1．反函数

定义 4　设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 D、值域是 W，如果对于任意的 $y_0\in W$，都有唯一的 $x_0\in D$，使得 $f(x_0)=y_0$，则定义了在 W 上以 y 为自变量的一个函数，称这个新函数为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$．

相对于反函数 $x=f^{-1}(y)$，称函数 $y=f(x)$ 为直接函数．其反函数的定义域是 $W=f(D)$．

显然，$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数，且在同一坐标系中具有相同的图像．

依照习惯，我们仍记自变量为 x，因变量为 y，则反函数被改写为 $y=f^{-1}(x)$，这时函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称．

注意，函数不一定都有反函数，例如，$y=x^2,x\in\mathbf{R}$．

可以证明，单调函数必有反函数，且其反函数与直接函数有相同的单调性．

由于三角函数都具有周期性,所以对应于一个函数值 y 的自变量 x 有无穷多个,从而三角函数在其整个定义域上不存在反函数.但我们可以考虑三角函数在它的某一单调区间上的反函数.

例如,正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上单调,值域为 $[-1,1]$,称正弦函数在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上的反函数为反正弦函数,记作 $y=\arcsin x$,其定义域为 $[-1,1]$.区间 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 称为正弦函数 $y=\sin x$ 的主值区间(一般地,当讨论反函数需要取主值区间时,要尽量取得靠近坐标原点).

类似地,我们可以定义其他反三角函数:

反余弦函数 $y=\arccos x$——$D=[-1,1]$,$f(D)=[0,\pi]$;

反正切函数 $y=\arctan x$——$D=(-\infty,+\infty)$,$f(D)=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$;

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$——$D=(-\infty,+\infty)$,$f(D)=(0,\pi)$.

显然,$y=\sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上与 $y=\arcsin x$ 互为反函数,$y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上与 $y=\arccos x$ 互为反函数,$y=\tan x$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上与 $y=\arctan x$ 互为反函数,$y=\cot x$ 在区间 $(0,\pi)$ 上与 $y=\operatorname{arccot} x$ 互为反函数.

再如,指数函数 $y=a^x$(a 为常数,$a>0$,$a\neq1$)与对数函数 $y=\log_a x$(a 为常数,$a>0$,$a\neq1$)互为反函数.

2. 复合函数

定义5 设函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_u,值域为 W_u,函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_y.如果 $W_u\cap D_y\neq\varnothing$(空集),那么称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数.其中 u 称为中间变量.

易见,两个函数复合构成一个复合函数,就是将一个函数代入另一个函数得到一个新函数,复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域为 $\{x\mid x\in D_u,\varphi(x)\in D_y\}$.

注意,并非任意两个函数都可以复合成一个函数.$W_u\cap D_y\neq\varnothing$ 是可以进行复合运算的必要条件.

在中学数学里,我们就经常遇到复合函数.如 $y=\ln\sin x$ 就是由对数函数 $y=f(u)=\ln u$ 与三角函数 $u=\varphi(x)=\sin x$ 复合而成的复合函数.

复合函数的概念可以推广到多个中间变量的情形.例如 $y=2^{\tan x^2}$,就是指数函数 $y=2^u$ 与三角函数 $u=\tan v$ 以及幂函数 $v=x^2$ 复合构成的复合函数.

例5 已知函数 $f(a^x+1)=a^{2x}+a^x+1$,求 $f(x)$.

解 本题即已知复合函数,要求函数 f 关于中间变量的对应法则.

设$u=a^x+1$,则$a^x=u-1$,所以$f(u)=(u-1)^2+(u-1)+1=u^2-u+1$,从而$f(x)=x^2-x+1$.

把一个复杂的函数拆解为几个简单函数的复合,用来简化有关运算,是高等数学中常用的方法.

五、初等函数

(1) 常数函数 $y=C$ (C 为常数).

(2) 幂函数 $y=x^{\mu}$ ($\mu>0$).

(3) 指数函数 $y=a^x$ (a 为常数,$a>0,a\neq 1$).

(4) 对数函数 $y=\log_a x$ (a 为常数,$a>0,a\neq 1$).

在自然科学、工程技术和社会科学中,经常用到的是以常数e(e≈2.718 281 8…)为底的指数函数$y=e^x$和对数函数$y=\ln x$.

(5) 三角函数 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$.

(6) 反三角函数 $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$, $y=\operatorname{arccot} x$.

以上这六类函数统称为基本初等函数.

中学数学里已重点介绍过基本初等函数,并详尽地讨论了它们的定义域、值域、有界性、单调性、奇偶性和周期性.这些知识是学习高等数学必备的基础.

定义6 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次函数复合步骤所构成的,并且可用一个式子表示的函数,称为初等函数.

高等数学的主要研究对象是初等函数,但有时也需要研究一些非初等函数.

目前常见的非初等函数是分段函数,今后还会遇到用方程、极限、积分、级数等表示的非初等函数.

分段函数也不一定都是非初等函数.例如,绝对值函数$y=|x|$是分段函数,因为$|x|=\sqrt{x^2}$,所以它仍是初等函数.

习 题 1-1

1. 用区间表示适合下列不等式的变量x的变化范围:

(1) $|x-2|<\frac{1}{10}$; (2) $0<|x-1|<0.01$.

2. 下列各题中,函数$f(x)$和$g(x)$是否相同?为什么?

(1) $f(x)=\ln x^2$, $g(x)=2\ln x$; (2) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$, $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

3. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$; (2) $y=\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}+\arcsin\left(\frac{1}{2}x-1\right)$;