姚建武　编著

实变函数与泛函分析

SHIBIANHANSHU YU FANHANFENXI

陕西科学技术出版社

实变函数与泛函分析

姚建武　　编著

陕西科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

实变函数与泛函分析/姚建武编著.—西安:陕西科学技术出版社,2005.10

ISBN 7-5369-4021-1

Ⅰ.实... Ⅱ姚... Ⅲ.①实变函数—师范大学—教材②泛函分析—师范大学—教材 Ⅳ.O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第119340号

出版者 陕西科学技术出版社
西安北大街131号 邮编710003
电话(029)87211894 传真(029)87218236
http://www.snstp.com
发行者 陕西科学技术出版社
电话(029)87212206 87260001
印 刷 陕西天坛福利印刷厂
规 格 850mm×1168mm 32开本
印 张 8.75
字 数 300千字
印 数 1-3000
版 次 2005年10月第1版
2005年10月第1次印刷
定 价 16.00元

序　言

实变函数论与泛函分析是数学的一个重要分支，它在现代数学的各个领域中有广泛应用。

它也是高等院校数学专业理论课。随着科学技术的飞速发展，各类院校理工科专业对这门课的需求逐渐增多。但由于本学科内容繁难、抽象。而现行教材往往重视了理论的严谨性、抽象性、而忽视了读者的认识规律。忽视了教材的可读性及对读者的启发性。致使不少学生对这门课望而生畏，学得含含糊糊、理解得不深不透。

本书参照高等师范院校及中学教师进修高等师范本科数学专业《实变函数与泛函分析教学大纲》而编写。全书分为两篇，第一篇为实变函数，主要包括：集合、点集、测度、可测函数及勒贝格积分理论；第二篇为泛函分析，主要介绍度量空间、巴拿赫空间，希尔伯特空间及算子与泛函的有关理论。

本书在不失理论的严谨性前提下遵循学生的认知规律并吸取现代数学教育学的新观点结合作者数十年来教学实践而编写。它突出以下特点：

1. 注意了书的可读性。在书中凡涉及三维及三维以下空间的知识多用函数图象及直观图加以说明，对抽象空间的知识较多地使用文氏图加以刻划和描述。以帮助读者对相关问题的认识与理解。

2. 注意学生新旧知识之间的联系；在一些重要的新概念引入时，与数学分析、高等代数、解析几何中一些学生熟悉的相关概念联系起来。加以分析比较，找出其异同点。使学生所学知识整体化、系统化。

3. 加强了思想方法的引导。正确的思维方法与巧妙的思路是数学活的灵魂。也是打好研究性学习的基本功。本书中对其中重要定理的证明增添了证明思路的分析。并对证明方法加以归类。凡属重复使用的方法。引导学生自行证明。

4、该书每章后面,除了配有一定数量的习题外,还增添了典型习题的解题过程及解题思路分析。使读者能逐步掌握解题的基本思路和技巧。同时启发读者对相关问题的深入研究和探索。激发读者研究性学习的兴趣。

根据读者对象本书可作为高等师范院校及成人高校数学专业学习实变函数与泛函分析的教材,也可作为理工科院校相关专业学习该课程的教材或参考书。

本书初次尝试用现代数学教育学的新观点作为指导来编写,难免有不妥之处,欢迎批评指正。

姚建武

2005年8月

目 录

第一篇 实变函数

第二篇　泛函分析

第一篇　实变函数

第一章 集合与基数

集合论产生于19世纪末,它是由德国数学家康托(Cantor)创立的。集合论不仅是微积分学的基础,它的理论已迅速地渗入数学的各个分支,成为近代数学的基础,当然也是实变函数论的基础。如同其它学科一样,集合论的发展已历经了许多坎坷,康托提出集合理论之后,人们发现它存在着不少矛盾如 1918 年罗素提出的"理发师"悖论等。这些矛盾都困扰着数学家们,为了解决这些矛盾以策梅洛为首的一批数学家建立了一套集合论公理体系现在称之为形式集合论。从而避免了这一理论中已被发现的矛盾。然而形式集合论也并非完美无缺,它的理论正是在不断发现矛盾,而又不断解决矛盾中得到完善和提升。

本章主要介绍集合及其相关概念,并以无穷集合为侧重点,介绍集合的交并余差及极限运算。同时对集合的基数、可数集与不可数集作进一步阐述。

1.1 集合及相关概念

1.1.1 集合概念

集合是近代数学的基础,也是实变函数论这门学科的理论基础之一。那么什么是集合?

按照集合论的创始人德国数学家乔治·康托(George Cantor1845 - 1918)的说法:"把一定的并且彼此可以明确识别的东西;东西可以是直观的对象,也可以是思惟的对象放在一起,叫做集合"

其实集合也如同欧氏几何学中的点、直线、平面一样，是一种不能再简单的原始概念，它不能再用其它概念加以定义，而只能用公理去描述。

不难看出康托关于集合概念的论述可以概括为："在一定范围内的个体事物的全体，当把它们看作一个整体时，我们将这个整体称之为集合，而将其中每个个体事物称之为集合的元素。"

例如： 1° 一个班中学生的全体；

2° 海滩上沙粒的全体；

3° 一片树林中乔木的全体；

4° 自然数 $1,2,3,\cdots,n\cdots$ 的全体；

5° 某个圆内各点的全体；

6° 平面上向量的全体；

7° $(0,1)$ 上全体实数；

8° 定义域在$[a,b]$上连续函数的全体。

由上面例子不难看出，集合中的元素不限于数，而是五花八门的。但是有两点必须明确：

其一：集合中的元素彼此互异；

其二：集合中元素的归属应有明确的界限。

下面的说法是错误的。

反例： 1° 大个子人组成的集合：

2° 胖人组成的集合；

这些都不属"集合论"中的集合。

当然这两个反例归属模糊数学中的模糊集的范畴。

1.1.2 集合的表示

集合的表示形式多种多样，这里仅介绍两种最常用的方法：

列举法:(罗列出集合中的各元素)

如:$A = \{2,3,4,5,6\}$

$B = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}$

$C = \{1,3,5,\cdots,2n-1,\cdots\}$

通过集合中元素的性质表示:

一般形式:$A = \{x \mid x$ 满足的条件 $p\}$

例如:

$B = \{x \mid x \in [0,1], x \in R\}$

$C = \{x \mid x \in R$ 且 $x^2 = -1\}$

$D = \{(x,y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 4, x \in R, y \in R\}$

1.1.3 集合间的关系

(1) 相等

集合 A 与 B,当且仅当它们有完全相同的元素时,称两个集合相等,记为 $A = B$

例如:$A = \{2,3,5,7,11,13,17,19\}$

$B = \{3,2,7,5,11,13,19,17\}$

$C = \{x \mid x$ 为小于 20 的素数$\}$

显然有 $A = B = C$

(2) 包含

若 A 的每一元素都是 B 的元素,则称 A 是 B 的子集读作 A 包含于 B,或 B 包含 A。记作 $A \subset B$。

若 A 是 B 的子集,但不等于 B,称 A 为 B 的真子集。

这里应注意:包含关系是指集合与集合之间的关系。而不能用于集合的元素与集合之间。集合中的元素经常用小写字母表示,如 a、b、c 等它与集合之间的关系是用属于“$\in$”或不属于“$\notin$”表示,

而不能用包含关系表示。

如　a 是集合 S 的元素,用 $a \in S$,而不能同 $a \subset S$

　　b 不是集合 S 的元素,用 $b \overline{\in}$ 表示而不能同 $a \not\subset S$

包含关系的性质:

定理　对任何集合 A、B、C 均有

1° $A \subset A$(自身性);

2° $A \subset B$,且 $B \subset A$　则 $A = B$;(对称性);

3° $A \subset B, B \subset C$ 则 $A \subset C$(传递性)。

1.2　集合的运算与文氏图表示

1.2.1　集合常用运算

集合的运算有交、并、差、余、极限运算等,但常用到的主要有交、并、差、余运算。

(1)"并"运算

若 A、B 为两个任意集合,S 是由一切或者属于 A 或者属于 B 的元素所组成的集合。则称 S 为 A 与 B 的并集或和集,简称和或并。

用文氏图表示为(见图 1):

$S = A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$

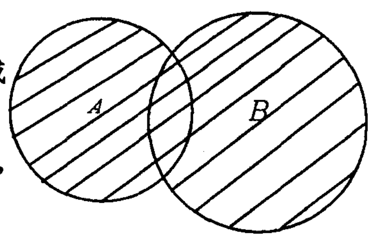

图1

例 $A = \{1,3,5,7\cdots,2n-1,\cdots\}$

$B = \{2,4,6,\cdots 2n\cdots\}$

$A \cup B = \{1,2,3,\cdots n\cdots\}$

多个集合的并:

有限个表示为：$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} Ai$

无穷多个：$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} Ai$

一般表示：A 为指标集，$\alpha \in A$

A_α 为一族集合，其并集为：$\bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha$

$\bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha = \{x \mid$ 存在某个 $\alpha \in A$ 使 $x \in A_\alpha\}$

例 1　设 $A\alpha = \{x \mid \alpha - 1 < x \leqslant \alpha\} \alpha \in R$

　　则　$\bigcup_{\alpha \in R} A_\alpha = (-\infty, +\infty)$

例 2　设 $A_i = \{x \mid -1 + \frac{1}{i} \leqslant x \leqslant 1 - \frac{1}{i}\}$

$i = 1,2,3,\cdots$ 则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = (-1,1)$

(2) 交运算

设 A、B 为两个任意集合，由一切既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合 S 称为 A 与 B 的交集，或积。

表示　$S = A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$

文氏图表示(图 2)

多个集的交

有限个：$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

无穷多个：$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cdots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

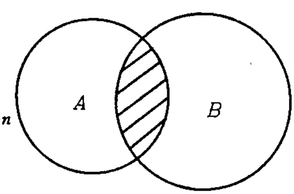

图2

$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x \mid$ 对一切 $\alpha \in I$，有 $x \in A_\alpha\}$

例 3　设 $Ai = \{x \mid O \leqslant x < 1 + \frac{1}{i} i = 1,2\cdots\}$

则 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid O \leqslant x < 1 + \frac{1}{n}\}$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \mid O \leqslant x \leqslant 1\}$$

例 4 设 $A_i = \{x \mid i \leqslant x \leqslant i + \frac{3}{2} i = 1,2,3\cdots\}$

则 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$。

(3) 差集

设 A、B 是两个集合,若 S 是由一切属于 A 而不属于 B 的元素所组成,则称 S 为 A 减 B 的差集。

记为 $S = A - B$ 或 $S = A \setminus B$

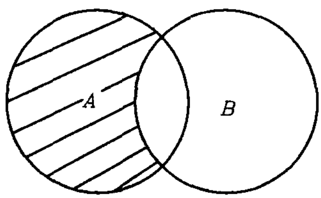

图3

$A - B = \{x \mid x \in A$ 但 $x \overline{\in} B\}$(图 3)

(4) 余集

设 $S \supset A$,则 $S - A$ 表示 A 关于 S 的余集,记为 $C_S A$ 或简记为 CA(图 4)

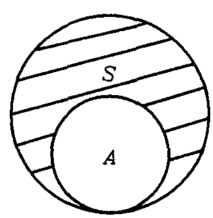

图4

1.2.2 运算性质

并交满足以下运算律

定理 1

1° 交换律:$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

2° 结合律:$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$