JIXUJIAOYU（HANSHOU）
ZHUANSHENGBEN
GONGGONGKE
XILIEJIAOCAI

继续教育（函授）专升本公共课系列教材

复变函数与积分变换

■ 徐大申 主编

中国电力出版社
www.cepp.com.cn

继续教育（函授）专升本公共课系列教材

复变函数与积分变换

主　编　徐大申
副主编　彭慧春　杨玉华

中国电力出版社
www.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书是按照原国家教委和教育部审定的对有关课程的基本要求，根据继续教育（函授）教学的需要编写的。全书包括复变函数和积分变换两部分内容。复变函数部分包括复数与复变函数、解析函数、复积分、复级数、留数、共形映射等，积分变换部分主要介绍了傅里叶变换和拉普拉斯变换。书中每节后有习题和习题答案，每章末有小结、总习题、总习题答案和自测练习，可帮助读者掌握要点。书后附有傅里叶变换简表和拉普拉斯变换简表，可供学习时查用。

本书可供高等工业院校电力工程类专业使用，也可供高职和成人教育相关专业选用。工程技术人员可以作为参考书。

图书在版编目（CIP）数据

复变函数与积分变换/徐大申主编．—北京：中国电力出版社，2005

（继续教育（函授）专升本公共课系列教材）

ISBN 7-5083-2071-9

Ⅰ．复...　Ⅱ．徐...　Ⅲ．①复变函数-函授大学-教材 ②积分变换-函授大学-教材　Ⅳ．O17

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第084401号

中国电力出版社出版、发行

（北京三里河路6号　100044　http://www.cepp.com.cn）

北京市铁成印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

2005年8月第一版　2005年8月北京第一次印刷

787毫米×1092毫米　16开本　13印张　290千字

印数0001—4000册　定价**21.00**元

前 言

本书是继续教育（函授）专升本公共基础课系列教材之一，是按照原国家教委1987年批准印发的高等工业学校《复变函数课程教学基本要求》和原教育部1980年颁发的《工程数学教学大纲（草案)》(积分变换部分）的要求，结合成人教育及函授教育的实际编写而成的。

全书共分为八章，前六章为复变函数部分，后二章为积分变换部分，由华北电力大学数位教师共同编写而成。第一章复数与复变函数，由李忠艳编写；第二章解析函数，由沙尘恩编写；第三章复积分、第四章复级数，由徐大申编写；第五章留数、第六章共形映射，由杨玉华编写；第七章傅里叶变换、第八章拉普拉斯变换，由彭慧春编写。在编写中，我们努力贯彻理论联系实际的原则，叙述上力求通俗易懂，便于自学。书中每一节末附有习题和答案，每一章末有小结、总习题、总习题答案和自测练习，小结归纳全章内容，并自测练习帮助读者抓住学习要点，提高学习质量和效率。

华北电力大学（北京）张希荣教授对书稿进行了认真的审阅，对教材体系和内容提出了宝贵的意见和建议，对保证本书编写质量起到了十分重要的作用，在此表示谢意。

由于我们学识水平有限，教学经验不足，书中一定还存在不少缺点和错误，诚恳希望广大读者和同行批评指正。

编　者

2005年1月

目 录

第一章 复数与复变函数

复变函数就是自变量是复数的函数，它是复变函数这门课程的研究对象。在这一章中，我们首先引入复数的概念、性质及其运算，然后引入平面上的点集、复变函数的极限与连续概念。本章中的很多概念在形式上与微积分学中的一些概念有很多类似之处，可将它们看作是微积分学中相应概念及定理在复数域中的推广。

§1.1 复　　数

一、复数与四则运算

我们已经知道在实数范围内，方程 $x^2+1=0$ 没有解。由于解方程的需要，人们引进一个新数 i，称为虚数单位，并规定 $i^2=-1$，从而 $x^2+1=0$ 有两个根 $\pm i$。

对于任意两个实数 x、y，称形如 $x+iy$ 的数为复数，并记作 z，即 $z=x+iy$；x 与 y 分别称为复数 z 的实部与虚部，记作

$$x = \mathrm{Re}z, y = \mathrm{Im}z$$

当虚部 $y=0$ 时，复数 $z=x+i0=x$ 就是一个实数了，因此全部实数就是复数的一部分，复数可以看作是实数的推广。当实部 $x=0$ 时，复数 $z=0+iy=iy$，此时 z 称作一个纯虚数 iy。

两个复数相等，必须且只须它们的实部和虚部分别相等。一个复数等于零，必须且只须它的实部和虚部同时等于零。

称复数 $x+iy$ 和 $x-iy$ 互为共轭复数，即 $x+iy$ 是 $x-iy$ 的共轭复数，或 $x-iy$ 是 $x+iy$ 的共轭复数。复数 z 的共轭复数常记作 $\bar{z}$。于是

$$x-iy=\overline{x+iy}$$

这样定义的复数，必须规定其运算方法。由于实数是复数的特例，规定其运算的一个基本要求是：复数运算的法则实行于实数特例时能够和实数运算的结果相符合，同时也要求复数运算能够满足实数运算的一般规律。

复数的四则运算定义如下：

1. *加（减）法*

复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 相加（减）的法则是

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

结果仍是复数。称复数 z_1+z_2 和 z_1-z_2 分别是 z_1 与 z_2 的和与差。

易证复数的加法遵守交换律与结合律，减法是加法的逆运算。

2. 乘法

复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 与 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 相乘，可按多项式乘法进行，只须将结果中的 i^2 换成 -1，即

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

结果仍是复数，称为 z_1 与 z_2 的积。

易证复数的乘法遵守交换律与结合律，且遵守乘法对于加法的分配律。

3. 除法

复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 与 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 相除（除数$\neq 0$）时，可先把它写成分式的形式，然后分子分母同乘以分母的共轭复数，再进行化简，即

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}(z_2 \neq 0)$$

结果仍是复数，称它为 z_1 与 z_2 的商。

全体复数并引入上述运算后称为复数域。在复数域内，我们熟知的一切代数恒等式，如

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

等等，仍然成立。

与实数不同，在复数域中，不能规定复数的大小。

规定了复数的四则运算后，不难验证共轭复数的如下性质：

(1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$;

(2) $\overline{\overline{z}} = z$;

(3) $z\overline{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$;

(4) $z + \overline{z} - 2\mathrm{Re}(z), z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)$。

例 1.1 1）设 $z_1 = 5 - 5\mathrm{i}$，$z_2 = -3 + 4\mathrm{i}$，求 $\frac{z_1}{z_2}$ 与 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$；

2）设 $z = -\frac{1}{\mathrm{i}} - \frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$，求 Re（$z$）、Im（$z$）与 $z\overline{z}$。

解 1）$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5-5\mathrm{i}}{-3+4\mathrm{i}} = \frac{(5-5\mathrm{i})\ (-3-4\mathrm{i})}{(-3+4\mathrm{i})\ (-3-4\mathrm{i})}$

$$= \frac{(-15-20)\ +\ (15-20)\ \mathrm{i}}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}\mathrm{i}$$

所以 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{7}{5} + \frac{1}{5}\mathrm{i}$。

2）$z = \frac{1}{\mathrm{i}} - \frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}\ (-\mathrm{i})} - \frac{3\mathrm{i}\ (1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})\ (1+\mathrm{i})}$

$$= \mathrm{i} - \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$$

所以 Re（z）$= \frac{3}{2}$，Im（z）$= -\frac{1}{2}$

$z\bar{z}=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$。

二、复数的表示法

1. 复平面

一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 本质上由一对有序实数（x，y）唯一确定，于是能够建立平面上直角坐标系中全部点和全体复数间一一对应的关系。从而复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可用该平面上坐标为（x，y）的点来表示，这是复数的一个常用的几何表示方法。特别的，实数与 Ox 轴上的点一一对应，所以 Ox 轴又称为实轴；纯虚数与 Oy 轴上的点一一对应，所以 Oy 轴又称为虚轴。当然在虚轴上只有一个点即原点对应着实轴上的数零，所以原点对应着复数 $z=0+\mathrm{i}0$，记作 $z=0$。两轴所在的平面称为复平面或 z 平面。

在复平面上，复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 也可以用向量$\overrightarrow{OP}$来表示，这个向量的起点在原点（0，0），终点在点 P（x，y）。向量$\overrightarrow{OP}$还可以看作为自由向量，即对于任何向量，不管其起点与终点的位置如何，只要其长度与方向同$\overrightarrow{OP}$一样，就可以看作是同一个向量。反过来，对任何一个向量，在保持其长度与方向不变的情况下，可以将它平移到起点为原点，终点的横坐标为 x、纵坐标为 y 的向量的位置上，这个终点就对应着一个复数 $z=$（x，y）。这样复数与平面上的向量建立了一一对应的关系（复数 0 对应着零向量），这就是复数的向量表示（见图 1.1）。这种对应关系使复数的加（减）法与向量的加（减）法之间保持一致，见图 1.2。

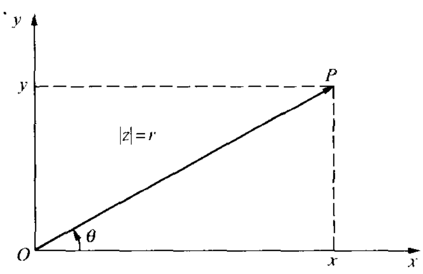

图 1.1

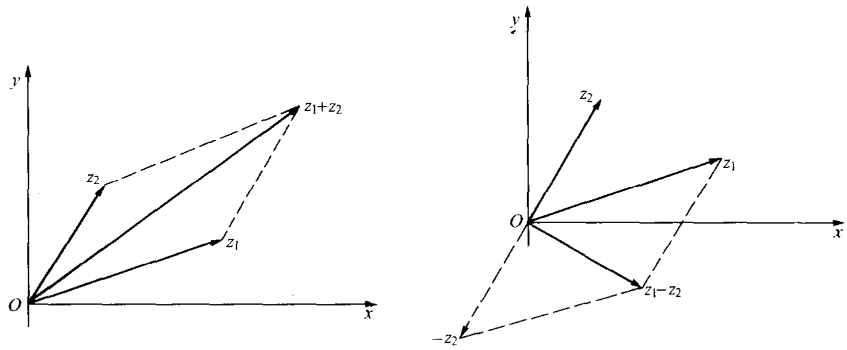

图 1.2

称向量的长度为复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的模，记作

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2} \tag{1.1.1}$$

显然有

$$|x|\leqslant|z|,\ |y|\leqslant|z|,\ |z|\leqslant|x|+|y|$$

$$z\bar{z} = |z|^2 = |z^2|。\tag{1.1.2}$$

根据图 1.2，可见 $|z_1 - z_2|$ 表示点 z_1 与 z_2 之间的距离，从而有

$$\begin{aligned} &|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \text{（三角不等式）} \\ &|z_1 - z_2| \geqslant \| z_1 | - | z_2 \| 。\end{aligned}\tag{1.1.3}$$

当 $z \neq 0$ 时，以正实轴为始边，以向量 $\overrightarrow{OP}$ 为终边的夹角称为复数 z 的辐角，记作

$$\theta = \mathrm{Arg}z。$$

这时，

$$\tan(\mathrm{Arg}z) = \frac{y}{x}。\tag{1.1.4}$$

显然任何一个复数 $z \neq 0$ 有无穷多个辐角，两两间相差 2π 的一个倍数。设 θ_0 是其中一个辐角，则

$$\mathrm{Arg}z = \theta_0 + 2k\pi \text{（}k\text{ 为任意整数）}\tag{1.1.5}$$

就给出全部的辐角。在 z（$\neq 0$）的辐角中，将满足 $-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$ 的 θ_0 称为 $\mathrm{Arg}z$ 的主值，记作 $\theta_0 = \arg z$。当 $z = 0$ 时，$|z| = 0$，辐角不确定。

辐角的主值 $\arg z$（$z \neq 0$）可以由反正切 $\arctan\frac{y}{x}$ 的主值 $\arctan\frac{y}{x}$ 按下列关系确定：

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x} & x > 0 \\ \pm\dfrac{\pi}{2} & x = 0, y \neq 0 \\ \arctan\dfrac{y}{x} \pm \pi & x < 0, y \neq 0 \\ \pi & x < 0, y = 0 \end{cases}\tag{1.1.6}$$

其中 $-\frac{\pi}{2} < \arctan\frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}$。

也可以用模 $r = |z|$ 及辐角 $\theta = \mathrm{Arg}z$ 来表示复数 z 的实部 x 及虚部 y：

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta。\tag{1.1.7}$$

这就是复数的极坐标表示式，其中 $r = |z|$ 由

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

所确定；而 $\theta = \mathrm{Arg}z = \theta_0 + 2k\pi$ 由式（1.1.6）所确定。这样任何一个复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 都可以表示为

$$\begin{aligned} z &= x + \mathrm{i}y = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \\ &= |z|[\cos(\mathrm{Arg}z) + \mathrm{i}\sin(\mathrm{Arg}z)] \end{aligned}\tag{1.1.8}$$

这就是复数的三角表示式。

再利用欧拉（Euler）公式（见第二章）：$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，又可以得到

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\tag{1.1.9}$$

这种表示形式称为复数的指数表示式。

我们称 $z=x+\mathrm{i}y$ 为复数 z 的代数形式，则连同复数 z 的三角形式［式（1.1.8)］和指数形式［式（1.1.9)］共三种表示法，可以相互转化，以适应讨论不同问题时的需要，且用起来各有其便。

例 1.2 求复数 $z=1+\mathrm{i}$ 的三角表示式与指数表示式。

解 由于 $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}, \theta_0 = \arctan\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$,

因此 $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$。

下边的例子表明，可以由给定的复数形式的方程（或不等式）确定它所表示的平面图形。

例 1.3 指出满足下列条件的点 z 的全体所组成的图形。

1）$|z+\mathrm{i}|=2$；

2）$|z+3|+|z+1|\leqslant 4$。

解 由于 $|z_1-z_2|$ 表示点 z_1 与 z_2 之间的距离，这个几何意义非常重要，它可以借助解析几何中两点间的距离公式用解析方法得出：

$$\begin{aligned}|z_1-z_2| &= |(x_1+\mathrm{i}y_1)-(x_2+\mathrm{i}y_2)| \\ &= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}。\end{aligned} \tag{1.1.10}$$

从而由上述公式，可将复数表示的方程或不等式转化为直角坐标系中的解析形式，进而判断其形状。

1）不难看出，方程表示所有与点 $-\mathrm{i}$ 距离为 2 的点的轨迹，即中心为 $-\mathrm{i}$、半径为 2 的圆。由式（1.1.10）知：

该圆的直角坐标方程为：设 $z=x+\mathrm{i}y$，有

$$|x+(y+1)\mathrm{i}| = 2, 即\sqrt{x^2+(y+1)^2} = 2 或 x^2+(y+1)^2 = 4$$

2）这是到定点 -3 与 -1 的距离之和不超过 4 的点 z 所组成的集合。即以 -3 与 -1 为焦点，长轴为 4 的椭圆盘。

反过来，很多平面图形能用复数形式的方程（或不等式）来表示。

例 1.4 试证：z 平面上以原点为圆心，R 为半径的圆周的方程为 $|z|=R$。

证 解析几何中此圆的方程为：

$$x^2+y^2=R^2。$$

令 $z=x+\mathrm{i}y$，将 $x=\frac{z+\bar{z}}{2}$，$y=\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$ 代入，由式（1.1.2）化简得

$$|z|=R。$$

2. 复球面、无穷远点、扩充复平面

除了用平面内的点或向量来表示复数外，还可以用球面上的点来表示

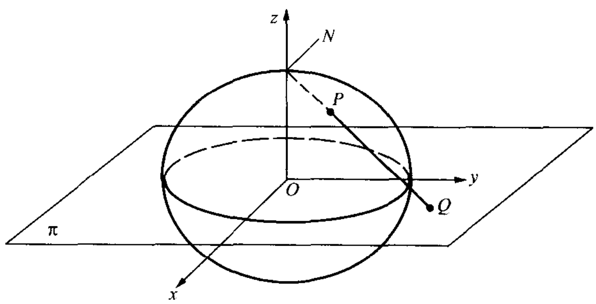

图 1.3

复数。具体说明如下。

设想一球面 S，不妨认为是中心在原点的单位球面，设 xoy 平面为 π（见图1.3）。在球面上任取一点 P，从“北极”点 N 引一射线通过 P 点并延长交 π 上于点 Q。

把 π 视为复平面 C，设 Q 在 π 上对应的复数为 z。于是，球面 S 上的任一点 P（除 N 外）就和点 Q 或 C 的点 z 对应；反之，任给 π 上一点 Q 或 $z\in C$，也有 S 上一点 P（非 N）相对应。这就说明：球面上的点，除去北极 N 外，与复平面内的点之间存在着一一对应的关系，而复数可以看作是复平面内的点，因此球面上的点，除去北极 N 外，与复数一一对应。但球面上的北极 N，还没有复平面内的一个点与它对应。当动点 P（$P\in S$）趋于 N 时，其对应点 Q 将在平面 π 中无限远离原点，或 $|z|$ 无限地变大，不妨称作点 Q 或 z “趋于无穷远”，记为 $z\to\infty$。如果将平面 π 上无穷远看成一个理想的“点”，称为“无穷远点”，就规定这个唯一的无穷远点与球面 S 上的北极点 N 相对应。相应地，又规定复数中有一个唯一的“无穷大”与复平面上的无穷远点相对应，并把它记做 ∞。因而球面上的北极 N 就是复数无穷大 ∞ 的几何表示。因此球面上的每一个点，就有唯一的一个复数与它对应，这样的球面称为复球面。

将包括无穷远点在内的复平面称为扩充复平面（不包括无穷远点在内的复平面称为有限平面，或就称为复平面），记为 C_∞。对于复数 ∞ 来说，实部、虚部与辐角的概念均无意义，但其模规定为正无穷大，即 $|\infty|=+\infty$，对于其他任何一个复数 z 则有 $|z|<\infty$。复球面能把扩充复平面的无穷远点明显地表示出来，这是它比复平面优越的地方。关于 ∞ 的四则运算作如下规定：

$$a+\infty=\infty+a=\infty(a\neq\infty)$$
$$a-\infty=\infty-a=\infty(a\neq\infty)$$
$$a\cdot\infty=\infty\cdot a=\infty(a\neq 0)$$
$$\frac{a}{\infty}=0,\frac{\infty}{a}=\infty(a\neq\infty),\frac{a}{0}=\infty(a\neq 0,\text{但可为 }\infty)$$

至于其他运算：$\infty\pm\infty$，$0\cdot\infty$，$\frac{\infty}{\infty}$，我们不规定其意义，$\frac{0}{0}$ 仍然是不定式。

如无特别说明，在本书中，所谓“平面”一般仍指有限平面，所谓“点”仍指有限平面上的点。

习题 1.1

1. 求下列复数的实部和虚部。

$\frac{1}{\mathrm{i}}$；$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$；$\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^2$；$(1+\sqrt{2}\mathrm{i})^3$。

2. 求下列复数的模和辐角。

$1+\mathrm{i}$；$\frac{1-\mathrm{i}}{2}$；$-\mathrm{i}$；$2-\mathrm{i}$。

3. 证明

(1) $|z|^2=z\bar{z}$；(2) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$；(3) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$。

4. 将下列复数化为三角表示式和指数表示式。

（1）i；（2）$1+\sqrt{3}i$；（3）$1-\cos\phi+i\sin\phi$（$0\leqslant\phi\leqslant\pi$）；（4）$\frac{2i}{-1+i}$。

5. 指出满足下列方程或不等式的 z 的全体所组成的图形。

（1）$|z-5|=6$；（2）$|z+2i|\geqslant1$；（3）$\mathrm{Re}(z+2)=-1$；（4）$|z+i|=|z-i|$。

习题答案

1. 0，-1；0，1；-1，0；-5，$\sqrt{2}$。

2. $\sqrt{2}$，$2k\pi+\frac{\pi}{4}$；$\frac{1}{\sqrt{2}}$，$2k\pi-\frac{\pi}{4}$；1，$2k\pi-\frac{\pi}{2}$；$\sqrt{5}$，$2k\pi-\arctan\frac{1}{2}$。

3. 略。

4.（1）$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=e^{\frac{\pi}{2}i}$；

（2）$1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2e^{\frac{\pi}{3}i}$；

（3）$1-\cos\phi+i\sin\phi=2\sin\frac{\phi}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\phi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\phi}{2}\right)\right]=2\sin\frac{\phi}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\phi}{2}\right)}$；

（4）$\frac{2i}{-1+i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$。

5.（1）以 5 为中心，半径为 6 的圆周；

2）中心在 $-2i$，半径为 1 的圆周及其外部区域；

3）直线 $x=-3$；

4）实轴。

§1.2 复数的乘方与开方

一、乘除

利用复数的三角或指数形式作乘除法运算时，比直接用代数形式运算有时要方便得多。我们首先考察乘法。

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)=r_1e^{i\theta_1}, z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=r_2e^{i\theta_2}$，

则 $z_1z_2=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=r_1e^{i\theta_1}r_2e^{i\theta_2}=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$。(1.2.1)

于是

$$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2| \qquad (1.2.2)$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2 \qquad (1.2.3)$$

即两复数相乘，只要把它们的模相乘、辐角相加即可。

由此也可得到两复数乘积的几何作图法：将向量 z_1 沿本身方向伸长 $|z_2|$ 倍，再旋转一个角 $\arg z_2$，该向量的终点即为积 z_1z_2（见图 1.4）。

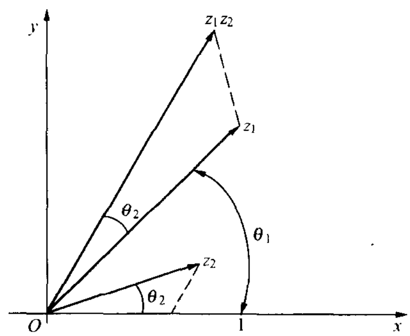

图 1.4

特别地，当$|z_2|=1$时，乘法变成自旋，如iz可由向量z逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$弧度的角度得到；$-z$可由向量z逆时针旋转π弧度的角得到。

注 在复平面上，一直线绕其上一定点旋转，我们规定逆时针方向旋转的角度为正，顺时针方向旋转的角度为负。关于辐角等式（1.2.3），表示两端可能取的值的全体是相同的，即对于左端的任一值，右端必有一值和它相等，反过来也一样。例如

$$\operatorname{Arg} z_1=\pi+2n\pi,(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

$$\operatorname{Arg} z_2=\frac{\pi}{2}+2m\pi,(m=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

$$\operatorname{Arg} z_1 z_2=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

代入式（1.2.2）得

$$\frac{3\pi}{2}+2(m+n)\pi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

要使上式成立，必须且只需$k=m+n+1$。只要m与n各取一确定的值，总可选取k的值使$k=m+n+1$。反之也对。

现考察除法。设$z_2\neq 0$，则

$z_1=\frac{z_1}{z_2}z_2$，由式（1.2.2）和式（1.2.3）知，$|z_1|=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|\cdot|z_2|$，且$\operatorname{Arg} z_1=\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)+\operatorname{Arg} z_2$，于是

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Arg} z_1-\operatorname{Arg} z_2 \tag{1.2.4}$$

因此

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)} \tag{1.2.5}$$

即两复数相除，只把它们的模相除、辐角相减即可。

例 1.5 对于复数α，β，若$\alpha\beta=0$，证明α，β至少有一为零。

证 若$\alpha\beta=0$，则必$|\alpha\beta|=0$，因此$|\alpha||\beta|=0$。从而$|\alpha|$，$|\beta|$至少有一为零，所以α，β至少有一为零。

例 1.6 化简$\frac{(1-\sqrt{3}i)(\cos\theta+i\sin\theta)}{(1-i)(\cos\theta-i\sin\theta)}$。

解 由式（1.2.4），可用三角形式或指数形式化简。

我们采用指数形式。由于

$1-\sqrt{3}i=2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$，$1-i=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$，所以

$\frac{(1-\sqrt{3}i)(\cos\theta+i\sin\theta)}{(1-i)(\cos\theta-i\sin\theta)}=\frac{2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}e^{i\theta}}{\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}e^{-i\theta}}=\sqrt{2}e^{i\left(2\theta-\frac{\pi}{12}\right)}$。

二、乘方

利用式（1.2.1）可逐步证明，如果

$$z_k = r_k e^{i\theta_k} = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k),(k = 1,2,\cdots,n),$$

则

$$\begin{aligned} & z_1 z_2 \cdots z_n \\ &= r_1 r_2 \cdots r_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)] \\ &= r_1 r_2 \cdots r_n e^{i(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)} \text{。} \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

如果 $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，则式（1.2.6）化为

$$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \tag{1.2.7}$$

特别地，当 $r=1$ 时，式（1.2.7）就是著名的棣莫弗（De Moivre）公式

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta = e^{in\theta} \tag{1.2.8}$$

已经证明式（1.2.7）、式（1.2.8）对正整数 n 成立；规定 $z^0=1$，则式（1.2.7）、式（1.2.8）当 $n=0$ 时成立；如果定义 $z^{-n}=\frac{1}{z^n}$，则当 n 为负整数时式（1.2.7）、式（1.2.8）仍成立（自己证明）。即式（1.2.7）、式（1.2.8）对所有整数恒成立。

例 1.7 计算 $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{3n+1} + \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{3n+1}$（$n$ 为正整数）。

解 由于

$$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$$

从而

$$\begin{aligned} & \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{3n+1} + \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{3n+1} \\ &= \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{3n}\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) + \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{3n}\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right) \\ &= (\cos 2n\pi + i\sin 2n\pi)\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) + (\cos 4n\pi + i\sin 4n\pi)\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right) \\ &= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = -1 \end{aligned}$$

三、开方

若对于复数 z，存在复数 ω 满足等式：$\omega^n = z$（n 是大于 1 的整数），则称 ω 为 z 的 n 次方根，记为 $\omega = \sqrt[n]{z}$，求方根的运算叫做开方。

为了求出根 ω，令

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \omega = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$$

由式（1.2.7）、式（1.2.8）得