特价版

少年精品书库

科·学·求·知·篇

算得巧

中国少年儿童出版社◎

写在前面的话

数学是锻炼脑筋的体操。无论计算，还是解题，都要力争根据具体情况选用简便算法或解法，有目的地培养学生思维的敏捷性和灵活性。不少人都有这个体会：获得最优美、最巧妙的解法是一种愉快的享受。

算得巧与算得笨不仅仅是方法的不同，更重要的是思维方式的不同。巧算，属于求异思维。它往往具有独特、新颖、简捷的特点。

本书面向小学中、高年级，从数的概念、数的计算、应用题、几何初步知识几个方面，比较系统地总结了巧算的方法、算理和技巧。本书在写作过程中，注意了以下几点。

1．要求新。所谓新，就是别的书上没有讲过或没有集中讲过的新发现、新经验、新的归纳总结。

2．不求全。全是相对的，没有必要把勉强叫巧算的内容加上去。因此，各知识点的分配是不平衡的。本书的目的是抛砖引玉，让同学们由此受到启发，做好积累、整理工作。

3．讲实用。对于那些与其记一大堆法则，还不如再算一遍的巧算，我们一律不选。有些巧算的法则好记又实用，尽管不少人都知道，我们还是选了。

4．有难度。在几百个例题中，有的题是比较难的。我们的目的是让那些学有余力的同学，能在课余时间有更多的机会锻炼自己的脑筋，提高解题能力。

5．重方法。本书在介绍计算方法时，由于按先讲整数计算，再讲分数计算；这两部分又按加、减、乘、除的顺序编写，所以，例题的题型选择不全，重在讲方法。

6．不重复。本书内容既配合课本，又不重复课本。课堂上讲的内容，这里不再重复。比如，“巧用运算规律”，因为课堂内已经讲过，这里只重点介绍了一些典型问题。

本书在写作过程中，常舒正老师审阅了大部分书稿，眭双祥老师提供了有益的资料并补写了某些内容。在此，谨向他们表示衷心的感谢。

作　者

目　　录

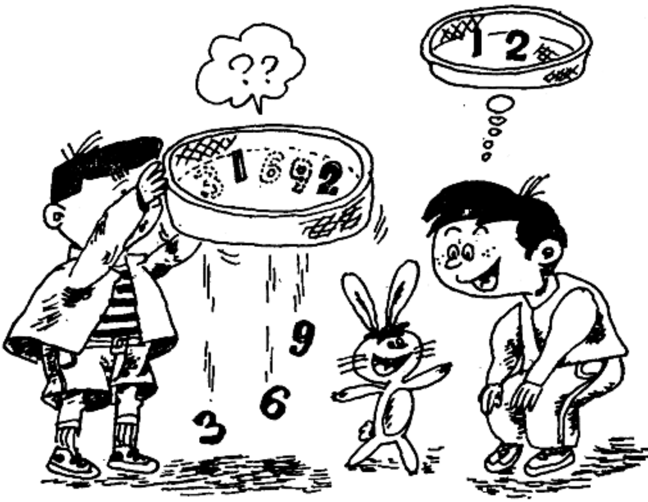
巧答概念题

巧算计算题

巧 解 应 用 题

巧 做 几 何 题

巧答概念题



约数的对称关系

很多同学在求某个合数的约数时，往往找不全。这里，向同学们介绍一种巧用对称关系找约数的方法。

如果把任何一个合数的约数，从小到大排列成一串数，那么我们会发现，这些数总是关于某个处于中心位置的数成对存在。为了便于叙述，我们把这个中心位置的数叫做“中

心数”。

如果某个合数恰好是某个自然数的平方，那么这个“中心数”就是这个自然数，它自然是这个合数的约数，只要把比“中心数”小的几个约数找出来，其他的约数便能一个不漏地迅速找出来。比如，要求36的约数，$36=6^2$，在36的约数里，比6小的4个约数为1、2、3、4，另外4个约数为36、18、12、9。如下图：

1　2　3　4　6　9　12　18　36

如果这个合数不是某个自然数的平方，那么就要找出一个近似的“中心数”。比如，要求102的约数。因为$10^2<102<11^2$，所以可以选10或11为“中心数”。先找出比10或11小的4个约数1、2、3、6，再找出另外4个约数102、51、34、17。如下图：

1　2　3　6　(10 或 11)　17　34　51　102

由此可知，一个合数的“中心数”可能是这个合数的约数，也可能不是。

试 一 试

试求64、144、60、108的所有约数。

巧用筛去法判别

判断某个数能否被 3 整除，这是大家熟悉的问题。可是，当一个数较大时，把一个数各数位上的数字相加，不仅判断速度慢，而且很容易出现口算错误。下面介绍一种简便判断方法——筛去法（或称消倍法）。

这种方法就如同用一种特殊的筛子，先把某个数的各个数位是 3 的倍数的数筛去，然后把剩余的有限几个数字相加，看它们的和是否是 3 的倍数。如果剩下的数字之和是 3 的倍数，那么原数就是 3 的倍数。

比如，判断下面的数能否被 3 整除：

（1）5367；（2）31692；（3）43156。

（1）5367，直接筛去能被 3 整除的 3、6；5 与 7 的和是 3 的倍数，所以 5367 能被 3 整除。

（2）31692，直接筛去被 3 整除的 3、6、9；1 与 2 的和是 3 的倍数，所以 31692 能被 3 整除。

（3）43156，直接筛去能被 3 整除的 3、6；4、1 与 5 的和不是 3 的倍数，所以 43156 不能被 3 整除。

试 一 试

判断下面的数能否被 3 整除：

（1）3486 （2）2947 （3）56793 （4）78541

巧妙判定被7约

一个数能否被7整除，只要把这个数的末位数字截去，然后从余下的数中减去这个末位数字的2倍，如果这时能一眼看出这个得数是7的倍数，那么这个数就能被7整除，否则就不能被7整除。要是仍看不出是否能被7整除，那就要继续上述的过程，直到能清楚地作出判断为止。

比如，判断112能否被7整除。

$$\begin{array}{rr|l} 1 & 1 & 2 \\ - & 4 & \\ \hline & 7 & \end{array}$$

……………割掉末位数字2

……………所余的数11减去这个2的2倍

因为7能被7整除，所以112能被7整除。这是由于

$$\begin{aligned} 112\times 2 &= (11\times 10+2)\times 2 \\ &= 11\times 20+2\times 2 \\ &= 11\times (21-1)+2\times 2 \\ &= 11\times 21-11+2\times 2 \\ &= 11\times 7\times 3-(11-2\times 2), \end{aligned}$$

前项有约数7，且7与2互质，故只要检验（$11-2\times 2$）能否被7整除就可以了。

如果所要判定的数，位数比较多，那么这种做法可以一直进行下去。

又如，判断61572能否被7整除。

解：

```
     6 1 5 7 | 2
   -       4 |
  ---------------
     6 1 5|3
   -     6|
  ------------
     6 0|9
   - 1 8|
  ----------
     4 2
```

因为 42 能被 7 整除，所以 61572 能被 7 整除。

以上这种方法叫割尾法。以下判定某数能否被 11、13、17、19 整除也可以用割尾法。但是，大家务必注意它们的区别。

巧妙判定被11约

判定一个数能否被11整除，大体上有三种方法：割尾法、奇偶位差法、分节求和法。

1. 割尾法：一个数能否被11整除，只要把这个数的末位数字截去，然后从余下的数中减去这个末位数，如果这时能一眼看出这个得数是 11 的倍数，那么这个数就能被 11 整除，否则就不能被11整除。要是仍看不出是否能被11整除，那就要继续上述的过程，直到能清楚地作出判断为止。

比如，462 能被 11 整除吗？

```
    4 6 | 2 ············割掉末位数字 2
  -   2 |   ············所余的数 46 减去这个 2
  ----------
    4 4
```

因为 44 能被 11 整除，所以 462 能被11整除。这是因为

$$
\begin{aligned}
462 &= 460+2 \\
&= 46\times10+2 \\
&= 46\times(11-1)+2 \\
&= 46\times11-46+2 \\
&= 46\times11-(46-2),
\end{aligned}
$$

前项有约数 11，故只要检验（46-2）能否被 11 整除就可以了。

2．奇偶位差法：判定一个数能否被11整除，可以先分别求出此数各奇位数字之和，以及各偶位数字之和，再求这两个和数的差，如果这个差能被11整除，那么原数能被11整除，否则就不能被11整除。

比如，823724能被11整除吗？

第六位	第五位	第四位	第三位	第二位	第一位
8	2	3	7	2	4

奇位数字之和为　$2+7+4=13$

偶位数字之和为　$8+3+2=13$

这两个和数之差　$13-13=0$

因为 0 能被 11 整除，所以 823724 能被 11 整除。这是由于

$$
\begin{aligned}
823724 &= 8\times100000+2\times10000+3\times1000+7\times100 \\
&\quad +2\times10+4 \\
&= 8\times(100001-1)+2\times(9999+1)+3 \\
&\quad \times(1001-1)+7\times(99+1)+2\times(11-1)+4
\end{aligned}
$$

$$= 8 \times 100001 + 2 \times 9999 + 3 \times 1001 + 7 \times 99 + 2 \times 11 + [(2+7+4) - (8+3+2)],$$

前几项中，100001、9999、1001、99、11 均能被 11 整除，故只要检验$[(2+7+4)-(8+3+2)]$能否被 11 整除就可以了。

3．分节求和法： 判定一个数能否被11整除，还可以把一个自然数自右向左每两位截为一节，然后把这些节加起来。如果这样相加所得到的和能被11整除，那么这个数就能被11整除，否则就不能被 11 整除。要是仍看不出是否能被 11 整除，那就要继续上述的过程，直到能清楚地作出判断为止。

比如，判断 762421 能否被 11 整除。

76′24′21，21 + 24 + 76 = 1′21，21 + 1 = 22。

因为 22 能被 11 整除，所以 762421 能被 11 整除。这是由于

$$\begin{aligned} 762421 &= 76 \times 10000 + 24 \times 100 + 21 \\ &= 76 \times (9999+1) + 24 \times (99+1) + 21 \\ &= 76 \times 9999 + 76 + 24 \times 99 + 24 + 21 \\ &= 76 \times 9399 + 24 \times 99 + (76+24+21), \end{aligned}$$

前两项中，9999、99 均能被 11 整除，故只要检验 $(76+24+21)$ 能否被 11 整除就可以了。

巧妙判定被13约

割尾法： 一个数能否被13整除，只要把这个数的末位数

字截去，然后在余下的数上加上末位数字的 4 倍，如果这时能一眼看出得数是 13 的倍数，那么这个数就能被 13 整除，否则就不能被 13 整除。要是仍看不出是否能被 13 整除，那就要继续上述过程，直到能清楚地作出判断为止。

比如，判断 273 能不能被 13 整除。

$$
\begin{array}{r|l}
27 & 3 \cdots\cdots\cdots\cdots \text{剔掉末位数字 3} \\
+\ 12 & \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \text{所余的数 27 加这个 3 的 4 倍} \\
\hline
39 &
\end{array}
$$

因为 39 能被 13 整除，所以 273 能被 13 整除。这是由于

$$
\begin{aligned}
273\times4 &= (27\times10+3)\times4 \\
&= 27\times40+3\times4 \\
&= 27\times(39+1)+3\times4 \\
&= 27\times39+27+3\times4 \\
&= 27\times13\times3+(27+3\times4),
\end{aligned}
$$

前项中有约数 13，且 13 与 4 互质，故只要检验 $(27+3\times4)$ 能否被 13 整除就可以了。

又如，判断 124156 能否被 13 整除。

解：

$$
\begin{array}{r|l}
12415 & 6 \\
+\quad 24 & \\
\hline
1243 & 9 \\
+\quad 36 & \\
\hline
127 & 9 \\
+\ 36 & \\
\hline
16 & 3 \\
+\ 12 & \\
\hline
28 &
\end{array}
$$

因为 28 不能被 13 整除，所以 124156 不能被13整除。

巧妙判定被17约

割尾法：一个数能否被 17 整除，只要把这个数的末位数字截去，然后从余下的数中减去这个末位数字的 5 倍，如果这时能一眼看出得数是 17 的倍数，那么这个数就能被 17 整除，否则就不能被 17 整除。要是仍看不出是否能被 17 整除，那就要继续上述的过程，直到能清楚地作出判断为止。

比如，判断 221 能否被 17 整除。

$$\begin{array}{r|l} 22 & 1 \text{ ………割掉末位数字 1} \\ -\ \ 5 & \text{………所余的数 22 减去这个 1 的 5 倍} \\ \hline 17 & \end{array}$$

因为17能被 17 整除，所以 221 能被17整除。这是由于

$$\begin{aligned} 221\times5 &= (22\times10+1)\times5 \\ &= 22\times50+1\times5 \\ &= 22\times(51-1)+1\times5 \\ &= 22\times51-22+1\times5 \\ &= 22\times17\times3-(22-1\times5) \end{aligned}$$

前项中有约数 17，且 17 与 5 互质，故只要检验 $(22-1\times5)$ 能否被17整除就可以了。

又如，判断 278528 能否被 17 整除。

解：

$$\begin{array}{rr|l} & 27852 & 8 \\ - & 40 & \\ \hline & 2781 & 2 \\ - & 10 & \\ \hline & 277 & 1 \\ - & 5 & \\ \hline & 27 & 2 \\ - & 10 & \\ \hline & 17 & \end{array}$$

因为 17 能被 17 整除，所以 278528 能被 17 整除。

巧妙判定被19约

割尾法：一个数能否被19整除，只要把这个数的末位数字截去，然后在余下的数上加上这个末位数的 2 倍，如果这时能一眼看出这个得数是 19 的倍数，那么这个数就能被 19 整除，否则就不能被19整除。要是仍看不出是否能被19整除，那就要继续上述的过程，直到能清楚地作出判断为止。

比如，判断 247 能否被 19 整除。

$$\begin{array}{rr|l} & 24 & 7 \quad \cdots\cdots\text{割掉末位数字 7} \\ + & 14 & \quad\ \ \cdots\cdots\text{所余的数24加上这个 7 的 2 倍} \\ \hline & 38 & \end{array}$$

因为 38 能被 19 整除，所以 247 能被 19 整除。这是由于

$$\begin{aligned} 247\times2 &= (24\times10+7)\times2 \\ &= 24\times20+7\times2 \\ &= 24\times(19+1)+7\times2 \\ &= 24\times19+24+7\times2 \end{aligned}$$