人教版课标本

高中新课标

200万套销量

名誉主编 雷洁琼
丛书主编 希 扬

三点一测丛书

树品牌典范 拓成才之路

高中数学A版 选修1-1

分册主编 曹成俊

探究目标

探究指导

探究综合训练

龙门教辅

科学出版社 龍門書局

● 组稿编辑 王 敏
● 责任编辑 韩 博 刘 娜
● 封面设计 东方上林工作室

雷老会见希扬主编

三点一测丛书

SAN DIAN YI CE CONG SHU

高中新课标选修部分辅导书

高中数学A版(选修)(人教版)
高中数学B版(选修)(人教版)
高中数学(选修)(北京师大版)
高中数学(选修)(江苏版)
高中物理(选修)(人教版)
高中物理(选修)(广东教育版)
高中物理(选修)(上海科技版)
高中物理(选修)(山东科技版)
高中化学(选修)(人教版)
高中化学(选修)(山东科技版)
高中化学(选修)(江苏版)
高中语文(选修)(人教版)
高中语文(选修)(山东人民版)
高中语文(选修)(广东教育版)
高中语文(选修)(江苏版)
高中语文(选修)(语文版)
高中英语(选修)(人教版)
高中英语(选修)(外语教学与研究版)
高中英语(选修)(河北教育版)
高中英语(选修)(北京师大版)
高中英语(选修)(译林+牛津版)
高中英语(选修)(重庆大学版)
高中思想政治(选修)(人教版)
高中历史(选修)(人教版)
高中历史(选修)(人民出版社(北大))
高中历史(选修)(岳麓版)
高中地理(选修)(人教版)
高中地理(选修)(山东教育版)
高中地理(选修)(湖南教育版)
高中地理(选修)(中国地图版)
高中生物(选修)(人教版)
高中生物(选修)(江苏版)
高中生物(选修)(中国地图版)

各版本均配必修辅导书

ISBN 7-5088-0141-5
9 787508 801414 >

ISBN 7-5088-0141-5
定价：18.50元

☆ 与 2006 年**人教版**最新教材同步 ☆

三点一测丛书

高中数学 A 版（选修 1-1）

⊙ 分册主编：曹成俊
⊙ 编　　者：宋申清　東德亮
纪庆儒

科学出版社　龍門書局

北　京

图书在版编目(CIP)数据

三点一测丛书.高中数学(A版).(选修1-1)：人教版课标本/希扬丛书主编；曹成俊分册主编.—北京：科学出版社 龙门书局，2006

ISBN 7-5088-0141-5

Ⅰ.三…　Ⅱ.①希…②曹…　Ⅲ.数学课－高中－教学参考资料　Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第102475号

组稿编辑：王　敏/责任编辑：韩　博　刘　娜
封面设计：东方上林工作室

科学出版社
龙门书局 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.longmenbooks.com
双青印刷厂印刷
科学出版社总发行　各地书店经销

*

2006年9月第　一　版　开本：1/16(787×1092)
2006年9月第一次印刷　印张：13
印数：1—10 000　字数：370 000

定　价：18.50元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

教育为振兴
中华之本

雷洁琼
一九九九年三月

曾任全国人大常委会副委员长的雷洁琼为《三点一测丛书》题词

前言

新课标下的高中学生对高中数学的普遍感受是——知识信息量大、理论抽象、思维转折性强、运算量大，补充点较多，听课很累，或是课后不会做作业，不知道如何学好数学。要想学好数学，就必须要讲究科学的学习方法，提高学习效率，变被动学习为主动学习，才能找到学习的乐趣与成就感。下面就如何学好高中数学，给同学们几点建议：

一、培养良好的学习习惯

1. 制定计划，明确学习目的。合理的学习计划是推动我们主动学习和克服困难的内在动力。既要有长远打算，又要有短期安排，执行过程中要严格要求自己，磨炼学习意志。

2. 课前预习是取得较好学习效果的基础。课前预习不仅能培养自学能力，而且能提高学习新课的兴趣，掌握学习的主动权。预习不能搞走过场，要讲究质量，力争在课前把教材弄懂。

3. 上课是理解和掌握基本知识、基本技能和基本方法的关键环节。“学然后知不足”，上课听讲要注重听重点、难点，把老师补充的内容记录下来，而不是全抄不听，顾此失彼。上课过程中不仅仅要会听而且要会记、会想、会练，要将耳、眼、脑、手都动起来，要真正成为课堂学习的主人和知识的探索者。

4. 及时复习是提高学习效率的重要一环。通过反复阅读教材，多方面查阅有关资料，强化对基本概念、知识体系的理解与记忆。将所学的新知识与有关旧知识联系起来，进行分析比较，一边复习一边将复习成果整理在笔记本上，使对所学的新知识由“懂”到“会”。

5. 独立作业是通过自己的独立思考，灵活地分析问题、解决问题，进一步加深对所学新知识的理解和对新技能的掌握过程。这一过程我们要注意运算能力和纠错能力的培养，并通过运用知识使我们对所学内容由“会”到“熟”。

6. 解决疑难是指对独立完成作业中暴露出来的对知识理解的错误的纠正过程。解决疑难一定要有锲而不舍的精神。对做错的题目要反复思考，实在解决不了的要请教老师和同学，并要经常把易错的地方拿来复习强化，使对所学知识由“熟”到“活”。另外，最好在有课堂笔记本的基础上建立一个典型题本，将在学习过程中容易出错的或是极具代表性的问题整理到一个独立的笔记本上，并注上自己的理解与体会。

7. 系统小结是通过积极思考，达到全面系统深刻地掌握知识和发展认知能力的重要环节。小结要在系统复习的基础上以教材为依据，参照笔记与资料，

前言

通过分析、综合、类比、概括，揭示知识间的内在联系，以达到对所学知识融会贯通的目的。经常进行多层次小结，能对所学知识由“活”到“悟”。对于同一个问题，通过多个不同的角度与位置来看所能达到的不同效果，从而加深对知识的深层次理解与整体性把握。

8. 课外学习包括阅读书籍与报刊，浏览相关的学习网站，参加学科竞赛与讲座，与同学或老师交流学习心得等。课外学习是课内学习的补充与继续，它不仅能丰富同学们的文化科学知识，加深和巩固课内所学的知识，而且能够发展我们的兴趣爱好，培养独立学习和工作的能力，激发求知欲与学习热情。

二、循序渐进，防止急躁

高中同学年龄小，阅历有限，为数不少的同学容易急躁。有的同学贪多求快，囫囵吞枣，想靠几天“冲刺”一蹴而就。学习是一个长期的巩固旧知识、发现新知识的积累过程，绝非一朝一夕可以完成。取得了成绩及时总结心得，强化学习能力；遇到挫折及时调整学习方法、策略，找出出错原因，循序渐进，这样才能将数学学好。

三、注意研究学科特点，寻找最佳学习方法

数学学科担负着培养学生运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力，以及运用所学知识分析问题、解决问题的能力的重任。其中运算能力的培养一定要讲究“活”，只看书不做题不行，只埋头做题不总结积累也不行，学习中要注重一题多解，优化运算的练习。逻辑思维能力具有高度的抽象性、逻辑性和广泛适用性，要培养这种能力就要多归纳总结，区别多个概念。空间想象能力对平面知识的扩充既要能钻进去，又要能跳出来，结合立体几何，体会图形、符号和文字之间的互化。运用所学知识分析问题、解决问题的能力，就是要重视应用题的转化训练，归类数学模型，体会数学语言。华罗庚先生倡导的“由薄到厚”和“由厚到薄”的学习过程就是这个道理，方法因人而异，但学习的四个环节(预习、上课、作业、复习)和一个步骤(归纳总结)是少不了的。

本书配套于《高中数学选修 1-1(人教 A 版)》，题型丰富，解法详细，知识讲解、题型归类到位、难度略高于课本。同学们只要用心、投入地学习进去了，就会发现数学是一个多么美好的知识宫殿，相信这本书一定会给你带来许多意想不到的收获，伴你走向成功。

编　者

2006 年 8 月

目录

第一章　常用逻辑用语

1.1　命题及其关系

1.1.1　命　　题

探究目标

目的与要求

(1) 能判断语句是或者不是命题.

(2) 能判断命题的真假性.

知识与技能

(1) 了解命题、真命题、假命题的概念.

(2) 理解命题的构成,能区分一些命题的条件与题设.

情感、态度与价值观

体验逻辑知识在命题判断中的作用,体会真命题与公理、定理之间的联系,加深对"实践是检验真理的唯一标准"的认识.

探究指导

数学宫殿

1. 命题

一般地,我们把用语言、符号或式子表达的.可以判断真假的陈述句叫做命题,其中判断为真的语句叫做真命题,判断为假的语句叫做假命题.

注解　①判断一个语句是不是一个命题的两要素:第一是可以判断真假;第二是"陈述句".因此,一些真假不辨的开语句、祈使句、疑问句等都不是命题.

(开语句是含有变量且赋予变量一个定值就可以判断真假的语句.例:$x>5$ 就是一个开语句)

②在数学或其他科学技术中,还有一类带有预测性的陈述句也经常出现,如"每一个不小于6的偶数都是两个奇素数之和"(哥德巴赫猜想),"地球将逐渐变暖"等,虽然目前还不能判断真假,但随着时间的推移和科学技术的发展,总能确定它们的真假,人们仍把这一类猜想算作命题.

③一个命题,一般可用一个小写英文字母表示,如:p,q,r,s …

2. 命题的结构:若 p,则 q

在数学中,具有"若 p,则 q"形式的命题是常见的命题结构.(例如"若整数 a 是素数,则 a 是奇数","若平面上两条直线不相交,则这两条直线平行")我们把这种形式的命题中的 p 叫做命题的条件,q 叫做命题的结论.

注解　数学中有一些命题虽然表面上不是"若 p,则 q"的形式,但是把它的表述作适当的改变,也可以写成"若 p,则 q"的形式,例如:"当 $x=2$ 时,$x^2-3x+2=0$","菱形的对角线互相垂直平分",这两个命题可改写为"若 $x=2$,则 $x^2-3x+2=0$";"若一个四边形为菱形,则它的对角线互相垂直平分"的形式.

3. 关注一些隐藏条件下的命题

$x^2-2x+4>0$ 是一个命题,因为 $x^2-2x+4=(x-1)^2+3\geqslant3>0$ 恒成立可以判断为真命题;$x^2-2x+4=0$ 是一个假命题.

注解　$x^2-2x-3=0$ 不是一个命题,因为当 $x=-1$ 或 $x=3$ 时,等式成立,而 $x\neq-1$ 且 $x\neq3$ 时等式不成立,故不能判断其真假.故不是命题.

4. 关于命题的理解

(1) 判断一个语句是不是命题就是要看它是否符合是"陈述句"和"可以判断真假"这两个条件,只有同时满足这两个条件的才是命题;

(2) 一个命题要么是真的,要么是假的,但不能同时既真又假,也不能模棱两可无法判断其真假.当一个命题改写成"若 p,则 q"的形式之后,判断这种命题的真假的办法:

①若由"p"经过逻辑推理得出"q",则可确定"若 p,则 q"是真;确定"若 p,则 q"为假,则只需举一个反例说明.

②从集合的观点看,我们建立集合 A、B 与命题中的 p、q 之间的一种特殊联系:设集合 $A=\{x\mid p(x)$成立$\}$,$B=\{x\mid q(x)$成立$\}$.就是说,A 是全体能使条件 p 成立的对象 x 所构成的集合,B 是全体能使条件 q 成立的对象 x 所构成的集合,此时,命题"若 p,则 q"为真(意思就是"使 p 成立的对象也使 q 成立"),当且仅当 $A\subseteq B$ 时满足.

(3) 若将含有大前提的命题改写为“若 p,则 q”的形式时,大前提不变,仍作为大前提,不能写在条件 p 中.

题型一:命题的概念

【例1】 判断下列语句是否是命题.

(1) $2+\sqrt{2}$是有理数;(2) $1+1>2$;

(3) 2^{100}是个大数;(4) 968能被11整除;

(5) 禽流感是怎样传播的?(6) 好人一生平安.

思路与技巧 一般地,开语句、疑问句、祈使句、感叹句都不是命题,可判断真假的陈述句、反问句是命题.

解答 (1)是命题,能判断真假;(2)是命题,能判断真假;(3)不是命题,大数是个模糊的概念,不能判断真假;(4)是命题、能判断真假;(5)不是命题,是疑问句;(6)不是命题,是感叹句.

评析 判断一个语句是否是命题的关键是看“它是不是一个可以判断真假的陈述句”,但也有例外.特别的如反意疑问句:“难道$\sqrt{3}$不是无理数吗?”虽然不是陈述句,但能判断真假,故也是命题.

题型二:判断命题的真假性

【例2】 判断下列语句是否是命题,若是,判断其真假.并说明理由.

(1) 求证$\sqrt{3}$是无理数;

(2) $x^2+4x+4\geqslant 0$;

(3) 你是高一的学生吗?

(4) 并非所有的人都喜欢苹果;

(5) 一个正整数不是质数就是合数;

(6) 若 $x+y$ 和 $x\cdot y$ 都是有理数,则 x、y 都是有理数.

思路与技巧 命题的概念是解答第一问的关键,第一能判断真假,第二是陈述句.

解答 (1)祈使句,不是命题;(2) $x^2+4x+4=(x+2)^2\geqslant 0$,它等价于 $x^2+4x+4>0$ 或 $x^2+4x+4=0$.对于 $x\in\mathbf{R}$,可以判断真假,它是命题,且是真命题;(3)是疑问句,不涉及真假,不是命题;(4)是真命题,人群中有的人喜欢苹果,也存在着不喜欢苹果的人;(5)是假命题,整数1既不是质数,也不是合数;(6)是假命题,$\sqrt{3}+(-\sqrt{3})$和$\sqrt{3}\cdot(-\sqrt{3})$都是有理数,但$\sqrt{3}$、$-\sqrt{3}$都是无理数.

评析 判定一个命题是假命题还是真命题,关键是看能否由命题的条件推出命题的结论.

题型三:命题的结构

【例3】 把下列命题改写成“若 p,则 q”的形式,并判断真假:

(1) 末位是0的整数可以被5整除;

(2) 线段的垂直平分线上的点与这条线段两个端点的距离相等;

(3) 等式两边都乘以同一个数,所得结果仍是等式;

(4) 平行同一平面的两条直线平行.

思路与技巧 找准命题的条件和结论,是解这类题目的关键,要注意大前提的写法.

解答 (1)若一个整数的末位是0,则它可以被5整除;是真命题.(2)若一个点在线段的垂直平分线上,则它与这条线段两个端点的距离相等;是真命题.(3)若一个式子是等式,则它的两边都乘以同一个数,所得结果仍是等式;是真命题.(4)若两直线平行于同一平面,则它们互相平行;是假命题,因为还有可能相交或异面.

评析 出错点主要集中在大前提是否找出;以谁为条件;以谁为结论上.例如(3)中就不能写成“若一个等式的两边同乘以同一个数,则结果仍为等式”;“若 p,则q”的格式也可写成“如果 p,那么 q”、“只要 p,那么 q”等不同的形式.要注意语言的流畅性.

探究活动

[提出问题] 现有张三、李四、王五三人,张三说李四在说谎,李四说王五在说谎,王五说张三和李四都在说谎.

请问:张三、李四、王五谁在说谎话?谁在说真话?

[探究准备] 该题未明确哪个人在说真话还是说谎话,只能从假设入手,通过环环相扣的真假判断,达到最终的目的.

[探究过程] 设某人说谎,则为“假”;某人说真话,则为“真”.(1)假设张三为“真”,则李四为“假”;李四为“假”,则王五为“真”;王五为真,则“张三”、“李四”均为“假”,与张三为“真”矛盾,故张三不为“真”假设不成立.

(2) 假设张三为“假”,则李四为“真”;李四为“真”,则王五为“假”;王五为“假”,则张三、李四分别为“真、真”“真、假”“假、真”三种情况之一,与前边相结合,张三、李四的情况为“假、真”.综上所述,张三说谎话,李四说真话,王五说谎话.

[探究评析] 题目综合性较强,有一定的探究价值,不仅考查了分类讨论的数学思想,还深入研究了“都”的否定形式是“不都”,而非“都不”.

探究综合训练

练一练，你会了吗？

一、选择题

1. 下列语句是命题的一句是　(　　)
   A. 你能帮助我学好数学吗？
   B. 地上有个月亮
   C. 四边形的对角线
   D. 整数集与自然数集

2. 用数学符号表达"x 不大于 y"的实际含义是　(　　)
   A. $x\neq y$　　B. $x<y$ 且 $x=y$
   C. $x<y$　　D. $x<y$ 或 $x=y$

3. 下列语句中，能作为命题的一句是　(　　)
   A. 3 比 5 大　　B. 太阳和月亮
   C. 高一年级的学生　　D. $x^2+y^2=0$

4. 下列语句不是命题的是　(　　)
   A. 台湾是中国的
   B. 两军相逢勇者胜
   C. 上海是中国最大的城市
   D. 连结 A、B 两点

5. 下列语句中命题的个数是　(　　)
   ①地球上的四大洋；②$-5\in\mathbf{Z}$；③$\pi\notin\mathbf{R}$；④"我国的小河流"可以组成一个集合
   A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

6. 若 a、$b\in\mathbf{R}$ 且 $a^2+b^2\neq0$，则：①a、b 全为 0；②a、b 不全为 0；③a、b 全不为 0；④a、b 至少有一个不为 0. 其中真命题的个数为　(　　)
   A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

7. 下列命题中真命题的个数为　(　　)
   ①面积相等的三角形是全等三角形；②若 $x\cdot y=0$，则 $|x|+|y|=0$；③若 $a>b$，则 $a+c>b+c$；④矩形的对角线互相垂直　(　　)
   A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

8. 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 是任意的非零平面向量，且相互不共线，则：①$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}$；②$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；③$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$ 不与 $\boldsymbol{c}$ 垂直；④$(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=9|\boldsymbol{a}|^2-4|\boldsymbol{b}|^2$ 中是真命题的有　(　　)
   A. ①②　　B. ②③　　C. ③④　　D. ②④

9. 下列命题：①若 $x\cdot y=1$，则 x、y 互为倒数；②四边相等的四边形是正方形；③梯形不是平行四边形；④$ac^2\geq bc^2$，则 $a\geq b$. 其中假命题是　(　　)
   A. ①②　　B. ②③　　C. ②④　　D. ③④

10. 设 U 为全集，下面三个命题中真命题的个数是　(　　)
   ①若 $A\cap B=\varnothing$，则 $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=U$；②若 $A\cup B=U$，则 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\varnothing$；③若 $A\cup B=\varnothing$，则 $A=B=\varnothing$
   A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

11. 在下列关于直线 l、m 与平面 α、β 的命题中，真命题是　(　　)
   A. 若 $l\subsetneqq\beta$ 且 $\alpha\perp\beta$，则 $l\perp\alpha$
   B. 若 $l\perp\beta$ 且 $\alpha/\!/\beta$，则 $l\perp\alpha$
   C. 若 $l\perp\beta$ 且 $\alpha\perp\beta$，则 $l/\!/\alpha$
   D. 若 $\alpha\cap\beta=m$ 且 $l/\!/m$，则 $l/\!/\alpha$

12. 已知命题"非空集合 M 的元素都是集合 P 的元素"是假命题，那么命题：①M 的元素都不是 P 的元素；②M 中有不属于 P 的元素；③M 中有 P 的元素；④M中元素不都是 P 的元素. 其中真命题的个数是　(　　)
   A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

二、填空题

13. 设 A、B 为两个集合，下列四个命题：①$A\not\subseteq B\Leftrightarrow$ 对任意 $x\in A$，有 $x\in B$；②$A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$；③$A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\not\supseteq B$；④$A\not\subseteq B\Leftrightarrow$ 存在 $x\in A$，使得 $x\in B$，其中真命题的序号是________.

14. 有下列四个命题：
   ①22340 能被 3 或 5 整除；②不存在 $x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2+x+1<0$；③对任意的实数 x，均有 $x+1>x$；④方程 $x^2-2x+3=0$ 有两个不等的实根. 其中假命题有________.（只填序号）

15. 下面是关于四棱柱的四个命题：
   ①若有两个侧面垂直于底面，则该四棱柱为直四棱柱；②若两个过相对侧棱的截面都垂直于底面，则该四棱柱为直四棱柱；③若四个侧面两两全等，则该四棱柱为直四棱柱；④若四棱柱的四条对角线两两相等，则该四棱柱为直四棱柱. 其中真命题的序号是________.

16. 把下面不完整的命题补充完整，并使之成为真命题：若函数 $f(x)=3+\log_2 x$ 的图象与 $g(x)$ 的图象关于________对称，则函数 $g(x)=$________.

想一想，如何探究？

三、解答题

17. 把下列命题改写成"若 p，则 q"的形式：
   (1) 负数的立方是负数；
   (2) 相切两圆的连心线经过切点；
   (3) 全等三角形一定是相似三角形.

18. 把下列命题改写成“若 p,则 q”的形式,并指出条件和结论:

(1) 等边三角形的三个内角相等;

(2) 当 $a>0$ 时,函数 $y=ax+b$ 的值随 x 的增加而增加;

(3) $x=1$ 是方程 $(x-1)(x-2)=0$ 的根.

19. 将下列命题改写成“若 p,则 q”的形式,并判断其真假:

(1) 6 是 12 和 24 的公约数;

(2) 末位数字是 0 或 5 的整数,能被 5 整除;

(3) 方程 $x^2-x+1=0$ 有两个实根.

试一试,经历这些活动

20. 已知 $p:x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负根;$q:4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根,若 p 与 q 一真一假,求 m 的取值范围.

21. 已知命题 $p:|x^2-x|\geqslant 6$,$q:x\in\mathbf{Z}$ 且 p 假 q 真,求 x 的值.

22. 设有两个命题:p:不等式 $|x|+|x-1|\geqslant m$ 的解集为 $\mathbf{R}$;q:函数 $f(x)=-(7-3m)^x$ 是减函数,若这两个命题有且只有一个真命题,求实数 m 的值.

读一读,你有何收获?

罗素悖论与第三次数学危机

自相矛盾的悖论,是数学史上一直困扰着数学家的难题之一. 20 世纪英国著名哲学家、数学家罗素曾经提出过一个著名的悖论——“理发师难题”,其内容如下:

西班牙的塞维利亚有一个理发师,这位理发师有一条极为特殊的规定:他只给那些“不给自己刮胡子”的人刮胡子.

理发师这个拗口的规定,对于除他自己以外的别人,并没有什么难理解的地方. 但是回到他自己这里,问题就麻烦了. 如果这个理发师不给自己刮胡子,那么按照规定,他就应该给自己刮胡子;可是他给自己刮胡子的话,按照规定他又不应该给自己刮胡子. 因此,这位理发师无论是否给自己刮脸,都不符合自己的那条规定. 这真是令人哭笑不得的结果.

罗素还提出过与“理发师难题”相似的几个悖论,数学上将这些悖论统称为“罗素悖论”或者“集合论悖论”. 为什么又叫“集合论悖论”呢? 因为“罗素悖论”都可以用集合论中的数学语言来描述,归结成一种说法就是:

在某一非空全集中,有这样一个确定的集合,这个集合中“只有不属于这个集合的元素”.

那么,全集中的某一个指定元素,和这个确定集合之间是什么关系呢? 不难分析,如果这个元素包含于这个集合的话,那么根据这个集合的定义,这个元素就应该是“不属于这个集合”的元素;可如果这个元素“不属于这个集合”,那么根据这个集合的定义,这个元素就应该在这个集合中,即包含于这个集合. 这就是说,全集中的每一个元素,与这个确定集合之间都不存在确定的包含关系,这无疑是讲不通的.

自从康托尔创立了数学领域中的“集合论”,用集合论中的观点来诠释各个数学概念之间的逻辑关系,真可谓是“天衣无缝”. 因此集合论被誉为“数学大厦的基石”. 然而“罗素悖论”的发现,证明了集合论中竟然存在自相矛盾的悖论,这足以暴露集合论本身的缺陷.

“罗素悖论”在 20 世纪数学理论中引起了轩然大波.“数学大厦的基石”竟然出现了明显的“裂缝”,那么人类耗费数千年心血建立起来的“数学殿堂”,会不会倒塌呢? 一时间,数学界众说纷纭,悲观者甚至因此把当代数学比作“建立在沙滩上的庞然大物”. 这就是数学史上著名的“第三次数学危机”.

1.1.2~1.1.3　四种命题／四种命题的相互关系

探究目标

目的与要求

通过了解四种命题,能用通俗易懂的语言来表述逆命题、否命题及逆否命题.

知识与技能

理解原命题、逆命题、否命题、逆否命题的概念和相互间关系,能判断四种命题的真假性.

掌握通过证明一个命题的逆否命题为真命题来间接地证明原命题为真命题的方法.

情感、态度与价值观

体会数学中语言的微妙,加深对描述客观现实和数学问题的认识.

探究指导

数学宫殿

1. 四种命题的概念

命题"若 p,则 q"是由条件 p 及结论 q 组成的,将 p、q 进行"换位"或"否定"后,一共可以构成四种不同形式的命题:

(1) 原命题:若 p,则 q;

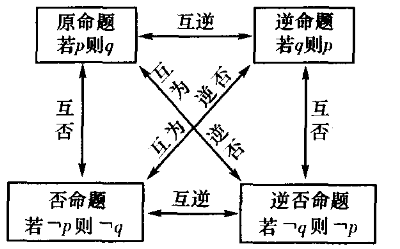
(2) 逆命题:若 q,则 p;

(3) 否命题:若 $\neg p$,则$\neg q$;

(4) 逆否命题:若 $\neg q$,则 $\neg p$.

注解　①将原命题的条件与结论的位置互换,则构成逆命题,"逆"就是"倒过来"的意思;将原命题的条件与结论分别否定,位置不变,则构成否命题,注意否命题是将原命题的条件与结论分别否定,是二次否定;将原命题的条件与结论分别否定且位置互换,则构成逆否命题,"逆否"包含"既逆且否"两重含义.②举例说明:原命题:若 $x>5$,则 $x>2$;逆命题:若 $x>2$,则 $x>5$;否命题:若 $x\leqslant 5$,则 $x\leqslant 2$;逆否命题:若 $x\leqslant 2$,则 $x\leqslant 5$.③原命题是人为规定的,其他三种命题是随之产生的,例如:原命题:若$\neg p$ 则$\neg q$,逆命题:若$\neg q$ 则$\neg p$;否命题:若 p 则 q;逆否命题;若 q 则 p.④"$\neg p$"是对命题 p 的否定,读作"非 p",注意命题"若 $x^2+2x-3=0$,则 $x=1$ 或$x=-3$"的否命题是"若 $x^2+2x-3\neq 0$,则 $x\neq 1$ 且 $x\neq -3$",即否定的时候,肯定变否定,"或"变"且".

2. 四种命题相互间关系的图示



3. 四种命题的真假性判断

我们已经知道,原命题为真,它的否命题不一定为真.一般地,一个命题的真假与其他三个命题的真假有如下三条关系:

(1) 原命题为真,它的逆命题不一定为真.

例如,原命题"若 $a=0$,则 $ab=0$"是真命题,它的逆命题"若 $ab=0$,则 $a=0$"是假命题.

(2) 原命题为真,它的否命题不一定为真.

例如,原命题"若 $a=0$,则 $ab=0$"是真命题,它的否命题"若 $a\neq 0$,则 $ab\neq 0$"是假命题.

(3) 原命题为真,它的逆否命题一定为真.

例如,原命题"若 $a=0$,则 $ab=0$"是真命题,它的逆否命题"若 $ab\neq 0$,则 $a\neq 0$"是真命题.

一般地,这四种命题的真假性,有且仅有下面四种情况:

原命题	逆命题	否命题	逆否命题
真	真	真	真
真	假	假	真
假	真	真	假
假	假	假	假

由于逆命题和否命题也互为逆否命题,因此这四种命题的真假性之间的关系如下:

(1) 两个命题互为逆否命题,它们有相同的真假性;

(2) 两个命题为互逆命题或互否命题,它们的真假性没有关系.

注解　互为逆否命题的两个命题是同真同假的,也叫做等价命题;在四种命题中有两对等价命题:"原命题与逆否命题","逆命题与否命题",因此四种命题中真假命题的个数一定是偶数个.

4. 否命题与命题的否定的区别

(1) 命题的否定是对一个命题的全盘否定,即肯定此命题的对立面,通常命题的否定是只否定命题的结论.例如:命题"p"的否定是"$\neg p$",命题"若 p,则 q"的否

定是“若 p,则$\neg q$”;而否命题是条件与结论同时否定,例如:命题“若 p 则 q”的否命题是“若$\neg p$,则$\neg q$”.

(2) 举例说明

写出下列命题的否定命题和否命题:

(1) 若 $abc=0$,则 a、b、c、中至少有一个为零;

(2) 若 $x^2+y^2=0$,则 x、y 全为零;

(3) 平行于同一直线的两条直线平行.

解:(1) 否定命题:若 $abc=0$,则 a、b、c 全不为零;否命题:若 $abc\neq0$,则 a、b、c 全不为零;(2) 否定命题:若 $x^2+y^2=0$,则 x、y 中至少有一个不为零;否命题:若 $x^2+y^2\neq0$,则 x、y 中至少有一个不为零;(3) 否定命题:平行于同一条直线的两条直线不平行;否命题:若两条直线不平行于同一条直线,则这两条直线不平行.

5. 间接证明有关问题

由于原命题和它的逆否命题有相同的真假性,所以我们在直接证明某一个命题有困难时,可以通过证明它的逆否命题为真命题,来间接地证明原命题为真命题.

【例1】 已知函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是增函数,a、$b\in\mathbf{R}$,对命题“若 $a+b\geqslant0$,则 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$”.

(1) 写出逆命题,判断其真假,并证明你的结论;

(2) 写出其逆否命题,判断其真假,并证明你的结论.

解答 (1) 逆命题是:若 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$,则 $a+b\geqslant0$,真命题.

用间接法证明:假设 $a+b<0$,则 $a<-b$,$b<-a$,

$\because f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上为增函数,则 $f(a)<f(-b)$,$f(b)<f(-a)$,$\therefore f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$. 这与题设相矛盾,所以逆命题为真.

(2) 逆否命题:若 $f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$,则 $a+b<0$,为真命题.

因为一个命题$\Leftrightarrow$它的逆否命题,所以可证明原命题为真命题.

$\because a+b\geqslant0$,$\therefore a\geqslant-b$,$b\geqslant-a$.

又$\because f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是增函数,

$\therefore f(a)\geqslant f(-b)$,$f(b)\geqslant f(-a)$.

$\therefore f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$.

所以逆否命题为真.

题型一:四种命题的理解与相互间转化

【例2】 写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题,并判断其真假.

(1) 实数的平方是非负数;

(2) 等底等高的两个三角形是全等三角形;

(3) 弦的垂直平分线经过圆心,并平分弦所对的弧.

思路与技巧 应先把命题改为“若 p,则 q”的形式,把条件和结论互换,得逆命题;把条件和结论都加以否定就得到否命题,再把逆命题中的条件和结论都加以否定,就得到逆否命题.

解答 (1) 逆命题:若一个数的平方是非负数,则这个数是实数. 真命题.

否命题:若一个数不是实数,则它的平方不是非负数. 真命题.

逆否命题:若一个数的平方不是非负数,则这个数不是实数. 真命题.

(2) 逆命题:若两个三角形全等,则这两个三角形等底等高. 真命题.

否命题:若两个三角形不等底或不等高,则这两个三角形不全等. 真命题.

逆否命题:若两个三角形不全等,则这两个三角形不等底或不等高. 假命题.

(3) 逆命题:若一条直线经过圆心,且平分弦所对的弧,则这条直线是弦的垂直平分线. 真命题.

否命题:若一条直线不是弦的垂直平分线,则这条直线不过圆心或不平分弦所对的弧. 真命题.

逆否命题:若一条直线不经过圆心或不平分弦所对的弧,则这条直线不是弦的垂直平分线. 真命题.

评析 命题的四种形式之间的关系,还提供了一个判断命题真假的变通手段,由于互为逆否的两个命题是等价命题,它们同真、同假,所以当一个命题不易判断时,可以通过判断其逆否命题的真假来判断原命题的真假.

【例3】 分别写出命题“若 $x^2+y^2=0$,则 x、y 全为零”的逆命题、否命题和逆否命题.

思路与技巧 根据四种命题的定义来写,注意否命题与命题的否定的区别.

解答 逆命题:若 x、y 全为零,则 $x^2+y^2=0$.

否命题:若 $x^2+y^2\neq0$,则 x、y 不全为零.

逆否命题:若 x、y 不全为零,则 $x^2+y^2\neq0$.

评析 设 p:$x=0$,q:$y=0$,则非 p:$x\neq0$,非 q:$y\neq0$. 要注意分清下列词语的意义:

“x、y 全为零”:p 且 q;“x、y 不全为零”:非(p 且 q)=(非 p)或(非 q);“x、y 全不为零”:(非 p)且(非 q);“x、y 全为零”的否定:非(p 且 q)=(非 p)或(非 q),它是“x、y 不全为零”,不能写成“x、y 全不为零”.

题型二:四种命题的真假性判断

【例4】 写出命题“若 $\sqrt{x-2}+(y+1)^2=0$,则 $x=2$且 $y=-1$”的逆命题、否命题、逆否命题,并判断它们的真假.

思路与技巧 判断四种命题的真假时,可先判断原命题及逆命题的真假. 再利用命题的等价性得出否

命题和逆否命题的真假.写一个命题的否命题时,应知道“且”的否定是“或”,“或”的否定是“且”,如“$x=A$ 且 $x=B$”的否定是 $x\neq A$ 或 $x\neq B$,“$x=A$ 或 $x=B$”的否定是“$x\neq A$ 且 $x\neq B$”.

解答　逆命题:若 $x=2$ 且 $y=-1$,则 $\sqrt{x-2}+(y+1)^2=0$,是真命题.

否命题:若 $\sqrt{x-2}+(y+1)^2\neq 0$,则 $x\neq 2$ 或 $y\neq -1$,是真命题.

逆否命题:若 $x\neq 2$ 或 $y\neq -1$,则 $\sqrt{x-2}+(y+1)^2\neq 0$,是真命题.

【例 5】　设原命题是“已知 a、b、c、d 是实数,若 $a=b$,$c=d$;则 $a+c=b+d$.”写出它的逆命题、否命题、逆否命题,并判断它们的真假.

解答　逆命题:已知 a、b、c、d 是实数,若 $a+c=b+d$,则 $a=b$,$c=d$.假命题.

否命题:已知 a、b、c、d 是实数,若 $a\neq b$ 且 $c\neq d$,则 $a+c\neq b+d$.假命题.

逆否命题:已知 a、b、c、d 是实数,若 $a+c\neq b+d$,则 $a\neq b$ 且 $c\neq d$.真命题.

评析　对于命题,要注意大前提以及命题的条件和结论,在写命题的其他形式时,大前提一般不动,只是对条件和结论作相应的处理.

【例 6】　若 $m\leqslant 0$ 或 $n\leqslant 0$,则 $m+n\leqslant 0$.写出逆命题、否命题、逆否命题,同时分别指出它们的真假.

思路与技巧　对于本题需搞清“$>$”的否定是“$\leqslant$”,不要将“$=$”漏掉.真假的判断要利用不等式的相关性质及它们之间的关系判断.

解答　逆命题:若 $m+n\leqslant 0$,则 $m\leqslant 0$ 或 $n\leqslant 0$.逆命题为真.

否命题:若 $m>0$ 且 $n>0$,则 $m+n>0$.否命题为真.

逆否命题:若 $m+n>0$,则 $m>0$ 且 $n>0$.逆否命题为假.

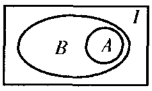


图 1.1-1

评析　命题的四种形式之间的关系,还提供了一个判断命题真假的变通手段,由于互为逆否的两个命题是等价命题,它们同真同假,所以当一个命题不易判断时,可以通过判断其逆否命题的真假来判断原命题真假.如判断“$a\cdot b\leqslant 0\Rightarrow a\leqslant 0$ 或 $b\leqslant 0$”真假,直接去看是不易判断其真假的,但判断其逆否命题“$a>0$ 且 $b>0\Rightarrow a\cdot b>0$”就容易多了.互为逆否的两个命题的等价性可以从集合角度给出恰当的解释,设 $A=\{x|x\in p\}$,$B=\{x|x\in q\}$,其中 p、q 是集合 A、B 的特征性质,若 $A\subsetneqq B$,则意味着对于元素 x 具有性质 p 必具有性质 q,所以可认为 $A\subsetneqq B$ 与 $p\Rightarrow q$ 等同,具有同真同假性.由图 1.1-1 所示的 Venn 图易发现有下面结论:$A\subsetneqq B$ 与 $\complement_I B\subsetneqq \complement_I A$ 等价,如图也就说明“$p\Rightarrow q$”与“$\neg q\rightarrow\neg p$”是等价的.

这一点在前面已加以说明,在此再一次强调此问题,希望同学们能真正理解.

题型三:四种命题的综合应用

【例 7】　在下列命题中,真命题是　(　　)

A. 命题“若 $ac>bc$,则 $a>b$”

B. 命题“若 $b=3$,则 $b^2=9$”的逆命题

C. 命题“当 $x=2$ 时,$x^2-3x+2=0$”的否命题

D. 命题“相似三角形的对应角相等”的逆否命题

解答　对 A,因为 c 的正负未知,因而 a 与 b 的大小不定,所以 A 假;对 B,逆命题是“若 $b^2=9$,则 $b=3$”它未必成立,因为 b 可能等于 -3,所以 B 假;对 C,否命题为“当 $x\neq 2$ 时,$x^2-3x+2\neq 0$ 为假,因为 $x\neq 2$,但可以为 1,使 $x^2-3x+2=0$ 成立;对 D,其逆否命题为“两个三角形的对应角不相等,则这两个三角形不相似”,为真,因为原命题与逆否命题互为等价命题,原命题为真.

∴答案是 D

【例 8】　有下列四个命题:

(1)“若 $x+y=0$,则 x、y 互为相反数”的逆命题;

(2)“若 $a>b$,则 $a^2>b^2$”的逆否命题;

(3)“若 $x\leqslant -3$,则 $x^2+x-6>0$”的否命题;

(4)“若 a^b 是无理数,则 a、b 是无理数”的逆命题.

其中真命题的个数是　(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

解答　(1)逆命题“x、y 互为相反数,则 $x+y=0$”是真命题.(2)∵原命题为假,∴其逆否命题为假.(3)否命题“若 $x>-3$,则 $x^2+x-6\leqslant 0$”,假如 $x=4>-3$,但 $x^2+x-6=14>0$,故为假.(4)逆命题“若 a、b 是无理数,则 a^b 也是无理数”,假如 $a=(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$,$b=\sqrt{2}$,则 $a^b=2$ 是有理数,故为假.

∴答案是 B

评析　判断一个命题为假命题,只需举出一个反例,无需证明.

【例 9】　试判断命题“若 $x\neq 1$ 或 $x\neq 2$,则 $x^2-3x+2\neq 0$”的真假.

思路与技巧　本题不易判断,可通过判断它的逆否命题来解决.

解答　原命题为“若 $x\neq 1$ 或 $x\neq 2$,则 $x^2-3x+2\neq 0$”,逆否命题为:“若 $x^2-3x+2=0$,则 $x=1$ 且 $x=2$”,显然这是一个假命题.故原命题也是一个假命题.

评析　当一个命题是否定形式的命题,且不易判断其真假时,可以通过判断与之等价的逆否命题的真假来达到判断该命题真假的目的.

探究活动

[提出问题] 判断命题“若 $m>0$,则 $x^2+x-m=0$ 有实数根”的逆否命题的真假.

[探究准备] 可以通过否命题、逆命题、逆否命题等之间的转化进行求解、判断

[探究过程]

探究一:$\because m>0$,$\therefore 4m>0$,$\therefore$ 方程 $x^2+x-m=0$ 的判别式 $\Delta=4m+1>0$,因而方程 $x^2+x-m=0$ 有实数根.

$\therefore$ 原命题“若 $m>0$,则 $x^2+x-m=0$ 有实数根”为真.

又因原命题与它的逆否命题等价,所以“若 $m>0$,则 $x^2+x-m=0$ 有实数根”的逆否命题也为真.

探究二:原命题“若 $m>0$,则 $x^2+x-m=0$ 有实数根”的逆否命题为“若 $x^2+x-m=0$ 无实数根,则 $m\leqslant 0$”.

$\because x^2+x-m=0$ 无实数根,

$\therefore \Delta=4m+1<0$,$\therefore m<-\dfrac{1}{4}\leqslant 0$.

$\therefore$“若 $x^2+x-m=0$ 无实数根,则 $m\leqslant 0$”为真.

探究三:p:$m>0$,q:$x^2+x-m=0$ 有实数根.

$\therefore q$:$A=\{m\in\mathbf{R}\mid$方程 $x^2+x-m=0$ 有实数根$\}=\{x\in\mathbf{R}\mid m\geqslant -\dfrac{1}{4}\}$.

以下同探究一

探究四:p:$m>0$,q:$x^2+x-m=0$ 有实根,

$\neg p$:$m\leqslant 0$,$\neg q$:$x^2+x-m=0$ 无实数根.

$\therefore \neg p$:$A=\{m\in\mathbf{R}\mid m\leqslant 0\}$,

$\neg q$:$B=\{m\in\mathbf{R}\mid$方程 $x^2+x-m=0$ 无实数根$\}=\{m\in\mathbf{R}\mid m<-\dfrac{1}{4}\}$.

$\because B\subseteq A$,$\therefore$“若$\neg q$,则$\neg p$”为真.

即“若方程 $x^2+x-m=0$ 无实根,则 $m\leqslant 0$”为真.

[探究评析] 真正理解和掌握基础知识、基本方法,是我们灵活处理问题的保证.

探究综合训练

练一练,你会了吗?

一、选择题

1.“若 $x^2=1$,则 $x=1$”的否命题为 ( )

A. 若 $x^2\neq 1$,则 $x=1$ B. 若 $x^2=1$,则 $x\neq 1$

C. 若 $x^2\neq 1$,则 $x\neq 1$ D. 若 $x\neq 1$,则 $x^2\neq 1$

2. 命题“两条对角线相等的四边形是矩形”是命题“矩形是两条对角线相等的四边形”的 ( )

A. 逆命题 B. 否命题

C. 逆否命题 D. 无关命题

3. 若命题 p 的逆命题是 q,命题 p 的逆否命题是 r,则 q 是 r 的 ( )

A. 逆命题 B. 否命题

C. 逆否命题 D. 以上都不正确

4. 若命题 p 的否命题是 r,命题 r 的逆命题是 s,则 s 是 p 的逆命题 t 的 ( )

A. 逆否命题 B. 逆命题

C. 否命题 D. 原命题

5. 与命题“能被 6 整除的整数,一定能被 2 整除”等价的命题是 ( )

A. 能被 2 整除的整数,一定能被 6 整除

B. 不能被 6 整除的整数,一定不能被 2 整除

C. 不能被 6 整除的整数,不一定能被 2 整除

D. 不能被 2 整除的整数,一定不能被 6 整除

6. 用反证法证明命题“$\sqrt{2}+\sqrt{3}$是无理数”时假设正确的是 ( )

A. 假设$\sqrt{2}$是有理数

B. 假设$\sqrt{3}$是有理数

C. 假设$\sqrt{2}$或$\sqrt{3}$是有理数

D. 假设$\sqrt{2}+\sqrt{3}$是有理数

7. 命题“若 $A\cup B=A$,则 $A\cap B=B$”的逆否命题是 ( )

A. 若 $A\cup B\neq A$,则 $A\cap B\neq B$

B. 若 $A\cap B=B$,则 $A\cup B=A$

C. 若 $A\cap B\neq B$,则 $A\cup B\neq A$

D. 若 $A\cup B\neq A$,则 $A\cap B=B$

8. 下列命题中,不是真命题的是 ( )

A.“若 $b^2-4ac>0$,则二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实根”的逆否命题

B.“四边相等的四边形是正方形”的逆命题

C.“若 $x^2=9$,则 $x=3$”的否命题

D.“对顶角相等”的逆命题

9. 一个命题与它的逆命题、否命题、逆否命题这四个命题中 ( )

A. 真命题的个数一定是奇数

B. 真命题的个数一定是偶数

C. 真命题的个数可能是奇数,可能是偶数

D. 以上判断均不正确

10. 命题“若 $x=3$,则 $x^2-9x+18=0$”的逆命题、否命题与逆否命题中,假命题的个数是 ( )