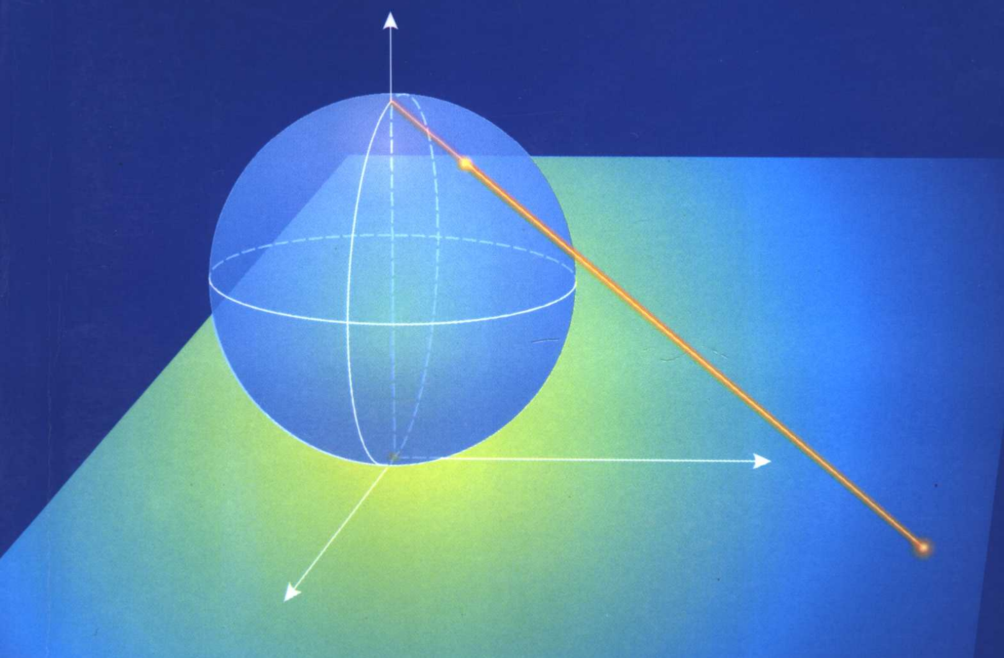
新世纪高等院校精品教材 · 数学类

（第三版）

复变函数与拉普拉斯变换

金忆丹　尹永成　编著



浙江大學出版社

新世纪高等院校精品教材·数学类

复变函数与拉普拉斯变换

（第三版）

金忆丹　尹永成　编著

浙江大學出版社

图书在版编目（CIP）数据

复变函数与拉普拉斯变换 / 金忆丹，尹永成编著.
3版. —杭州：浙江大学出版社，1994.6（2003重印）
ISBN 7-308-01471-1

Ⅰ. 复... Ⅱ. ①金...②尹... Ⅲ. ①复变函数—高等学校—教材②拉普拉斯变换—高等学校—教材
Ⅳ. ①O174.5②O177.6

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第095134号

责任编辑：陈晓嘉　徐素君
出版发行：浙江大学出版社
（杭州浙大路38号　邮政编码310027）
（E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn）
排　　版：浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷：德清县第二印刷厂
开　　本：850mm×1168mm　1/32
印　　张：8.75
字　　数：227千
版 印 次：2003年6月第3版　2006年7月第14次印刷
印　　数：48501—53500
书　　号：ISBN 7-308-01471-1/O·170
定　　价：11.00元

第二版序言

复变函数是高等学校工科类学生必须具备的工程数学知识，也是高等微积分的重要后继课程之一. 它的理论与方法被广泛地应用于自然科学的许多领域，如电子工程、控制工程、理论物理与流体力学、弹性力学、热力学等，是专业理论研究和实际应用方面不可缺少的有力的数学工具.

拉普拉斯变换作为复变函数在其他数学分支中的应用，同时也是工程技术中必不可少的重要数学内容.

本书是按照大学工科的工程数学教学大纲修订的，凡超过大纲的部分都打上了“*”号(仅供需要的专业选用).

本书力求把复变函数的基本理论、概念和方法叙述并推理得清晰、透彻，例题的配备也力求使学生加深对概念和方法的理解，并得到运算上的训练. 本书的特点是把一些较为抽象的复变函数理论、方法与工程技术中的应用结合起来进行介绍，使学生增强感性认识。例如关于保角映射在热传导问题上的应用等. 书中增添了一些可供不同专业、不同程度的学生在保证基本要求的同时，根据需要选用的内容. 如“调和函数平均值性质及泊松公式”、“解析函数在无穷远点的性态”、“积分路径(实轴)上有单极点的积分”、“保角映射的应用”等. 本书的例题与习题也略有增加和调整.

本书前六章的章末都附有思考题，以帮助学生加深理解课文内容，克服概念与运算中常易发生的错误；每章还配有适量习题(书末附有习题答案或提示以供读者参考)，书末附有四个附录，可供读者应用时查询.

本书由复旦大学任福尧教授主审，北京大学张顺燕教授、北京理工大学杨维奇教授、杭州大学姚璧芸教授、浙江大学郭竹瑞教授参加

了评审，他们对本书提出了许多宝贵的意见，对于他们所给予的热情指教，作者在此表示衷心的感谢．

由于编者水平有限，错误与不妥之处在所难免，敬请读者批评指教．

编　者

1994年4月于浙大求是园

第三版序言

本修订版是作者在对第二版经过多年的教学实践基础上修改而成的。由于本书第二版受到许多读者的欢迎，因此我们广泛吸收了使用过该书的专业师生的意见，在大的框架与内容不变的前提下，对本书第二版中的不足及谬误之处作了一些修正和补充。例如，对第四章中关于解析函数零点的唯一性定理，我们作了更为严格的叙述和证明；关于孤立奇点的等价性定理的证明，重新作了较为恰当的安排等等。同时，对于书中某些符号的书写形式也尽量规范化，例如，关于点集的描述，注意保持前后的一致性；图示中关于区域的表示力求更为清楚等等。

为答谢广大读者的厚爱，为更好的配合本课程的学习，作者将出版本修订版的配套参考书，内容包括复变函数各部分内容的要点的介绍与重要思考题解析、习题题解。

感谢孙业顺博士对本修改稿中的习题答案部分进行了认真核对与修正。本书承浙江大学出版社出版，且得到本书责任编辑陈晓嘉女士的支持和帮助，在此表示衷心的感谢。

对本书中的不足与错误之处，恳请读者批评指正。

编　者

2003 年 6 月

目　录

第一章　预备知识

§ 1.1　复　数

1.1.1　复数的定义

形如

$$z = x + \mathrm{i}y \text{ 或 } z = x + y\mathrm{i}$$

的数称为复数,其中 x 和 y 是任意实数,i 称为虚数单位($\mathrm{i}^2 = -1$).实数 x 和 y 分别称为复数 z 的实部和虚部,记为

$$x = \mathrm{Re}z, y = \mathrm{Im}z.$$

实部为零且虚部不为零的复数,即 $x = 0, z = \mathrm{i}y (y \neq 0)$,称为纯虚数.虚部为零的复数,即 $y = 0, z = x$,就是实数.可见,全体实数是全体复数的一部分.

复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 和 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 相等,当且仅当它们的实部和虚部分别相等.这样,一个复数 z 等于零,当且仅当它们的实部与虚部同时等于零.一般情况下,两个复数不能比较大小.

实部相同、虚部只差一个符号的两个复数互为共轭复数,即对于复数 $z = x + \mathrm{i}y$,其共轭复数可表示为 $x - \mathrm{i}y$,记为 $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$,显然 $\overline{(\bar{z})} = z$.

1.1.2 复平面与复数的模及辐角

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 由一个有序数对 (x,y) 唯一确定，它们之间可以建立起一一对应的关系．类似于用数轴上的点与实数建立的一一对应关系那样，我们可以借助横坐标为 x、纵坐标为 y 的二维直角坐标平面上的点 (x,y) 与复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 建立起一一对应关系．今后，凡是说到点 $z(x,y)$，即与复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 表示同一意义．

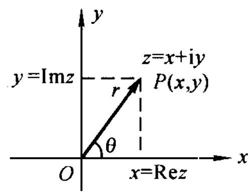


图 1-1　复数 $z=x+\mathrm{i}y$

由于 x 轴上的点对应着实数，所以称 x 轴为实轴；y 轴上的非原点的点对应着纯虚数，所以称 y 轴为虚轴．这样，我们把表示复数 z 的平面称为复平面或 z 平面或 $\mathbb{C}$ 平面，见图 1-1.

在复平面上，复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 还可以用由原点引向点 z 的向量 Oz 来表示，这种表示方法能使复数的加(减)法如同向量的加(减)法一样，用几何图形来表示．向量 Oz 的长度称为复数 z 的模，记为 $|z|$ 或 r，因此有

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0 \tag{1.1.1}$$

显然，$|\mathrm{Re}z|\leqslant|z|\leqslant|\mathrm{Re}z|+|\mathrm{Im}z|$，$|\mathrm{Im}z|\leqslant|z|\leqslant|\mathrm{Re}z|+|\mathrm{Im}z|$.

当 $z\neq 0$ 时，实轴正向与复数 z 所表示的向量 Oz 的夹角 θ 称为 z 的辐角，记为

$$\theta=\mathrm{Arg}\ z$$

显然有 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$.

任意非零复数 z 有无穷多个辐角，通常把满足条件

$$-\pi<\theta_0\leqslant\pi \tag{1.1.2}$$

的辐角 θ_0 称为 $\mathrm{Arg}\ z$ 的主值，记为 $\theta_0=\arg z$，于是

$$\theta = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \qquad (1.1.3)$$

1.1.3 复数的其他表示法

利用关系

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

还可以将复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 转化为下面的三角函数形式(简称三角形式)

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \qquad (1.1.4)$$

利用欧拉(Euler)公式[参看 §2.5.1 中公式(2.5.2)]: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$, 又可将复数 z 转化为指数形式

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \qquad (1.1.5)$$

复数的上述三种形式可以互相转换,以适应讨论不同问题及计算方面的需要. 把复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 化为三角形式或指数形式,需计算复数 z 的模 $|z| = r$ 和辐角 $\theta = \operatorname{Arg} z$. 当 $\arg z\,(z \neq 0)$ 表示为辐角 $\operatorname{Arg} z$ 的主值时,它与反正切 $\operatorname{Arc}\tan\frac{y}{x}$ 的主值 $\arctan\frac{y}{x}\left(-\frac{\pi}{2} < \arctan\frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}\right)$ 之间有如下的关系:

$$\begin{matrix}\arg z \\ (z \neq 0)\end{matrix} = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & \text{当 } x > 0\text{(Ⅰ 、Ⅳ 象限)} \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } x = 0, y > 0 \\ \arctan\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{当 } x < 0, y \geqslant 0\text{(Ⅱ 象限与负实轴)} \\ \arctan\dfrac{y}{x} - \pi, & \text{当 } x < 0, y < 0\text{(Ⅲ 象限)} \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{当 } x = 0, y < 0 \end{cases} \qquad (1.1.6)$$

对于 $x < 0, y > 0$ 和 $x < 0, y < 0$ 的情况,见图 1-2 与图 1-3.

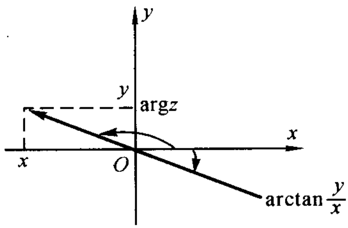


图 1-2　arg z(当 $x<0,y>0$ 时)

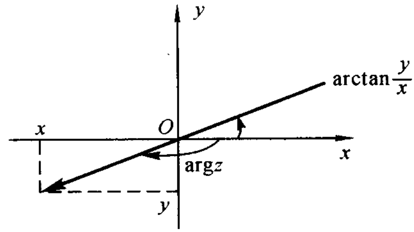


图 1-3　arg z(当 $x<0,y<0$ 时)

例 1　求 $\mathrm{Arg}(-3-4\mathrm{i})$.

解　由(1.1.3)式可知

$$\mathrm{Arg}(-3-4\mathrm{i})=\arg(-3-4\mathrm{i})+2k\pi \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

再由(1.1.6)式知

$$\arg(-3-4\mathrm{i})=\arctan\frac{(-4)}{(-3)}-\pi=\arctan\frac{4}{3}-\pi.$$

所以有

$$\mathrm{Arg}(-3-4\mathrm{i})=\arctan\frac{4}{3}+(2k-1)\pi \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

例 2　计算 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$.

解　因为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi=-1$,所以 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-1$.

例 3　将 $z=-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ 化为三角形式和指数形式.

解　因为 $x=-1\quad y=\sqrt{3}$,所以

$$|z|=r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2,$$

由于

$$\arctan\frac{y}{x}=\arctan\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\arctan\sqrt{3}=-\frac{\pi}{3}.$$

所以

$$\arg z = \arctan \frac{y}{x} + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}.$$

从而有

$$z = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 2(\cos \frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin \frac{2\pi}{3}) = 2\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}.$$

§ 1.2　复数的运算

1.2.1　复数域

我们定义两个复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 与 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 的加法、减法及乘除法如下：

$$\begin{aligned} z_1 \pm z_2 &= (x_1 + \mathrm{i}y_1) \pm (x_2 + \mathrm{i}y_2) \\ &= (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2). \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} \\ &= \frac{(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}{(x_2 + \mathrm{i}y_2)(x_2 - \mathrm{i}y_2)} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0). \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

容易验证，复数的加法与乘除法满足交换律、结合律及乘法对于加法的分配律．减法是加法的逆运算，除法是乘法的逆运算，所以全体复数 在引进上述运算后就称为复数域．在复数域内，我们熟知的一切代数恒等式仍然成立，例如

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

等等.

例 4 找出复数$\dfrac{z+2}{z-1}$的实部与虚部,其中 $z = x + \mathrm{i}y$.

解

$$\begin{aligned}\frac{z+2}{z-1} &= \frac{(x+\mathrm{i}y)+2}{(x+\mathrm{i}y)-1} = \frac{(x+2)+\mathrm{i}y}{(x-1)+\mathrm{i}y} \\ &= \frac{[(x+2)+\mathrm{i}y][(x-1)-\mathrm{i}y]}{(x-1)^2+y^2} \\ &= \frac{(x+2)(x-1)+y^2}{(x-1)^2+y^2} + \mathrm{i}\,\frac{-3y}{(x-1)^2+y^2}.\end{aligned}$$

从而有

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z+2}{z-1}\right) = \frac{x^2+x-2+y^2}{(x-1)^2+y^2}.$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z+2}{z-1}\right) = \frac{-3y}{(x-1)^2+y^2}.$$

用向量表示复数时,复数加(减)法与向量加(减)法运算完全一样(如图 1-4 所示),由此我们可以推出如下关于复数的模的三角形不等式:

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|. \tag{1.2.4}$$

$$|z_1 - z_2| \geqslant \big||z_1| - |z_2|\big|. \tag{1.2.5}$$

显然,$|z_1 - z_2|$ 表示 z_1 与 z_2 两点间的距离,$\mathrm{Arg}(z_1 - z_2)$ 则表示实轴正向与点 z_2 引向 z_1 的向量之间的夹角.

一对共轭复数 z 与 $\bar{z}$ 在平面内的位置是关于实轴对称的(如图 1-5 所示),因而 $|z| = |\bar{z}|$. 如果 z 不在负实轴和原点上,还有

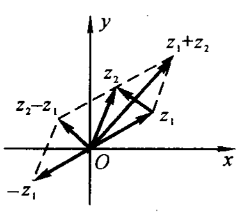


图 1-4 复数的向量加减

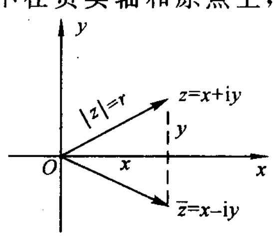


图 1-5 共轭复数