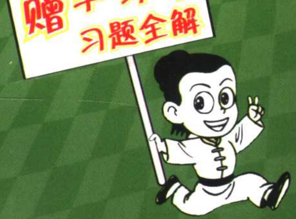
东方教育
EAST EDUCATION
普通高等教育“十五”国家级规划教材经典同步辅导丛书

高等数学

第五版 下册

同步辅导

普通高等教育国家规划教材研究中心
东方教育教材研发中心
组编
同济大学 王建福 主编



新华出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材经典同步辅导丛书

高等数学

（第五版） 下册

同步辅导

普通高等教育国家规划教材研究中心
东方教育教材研发中心　组编
同济大学　王建福　主编

新 华 出 版 社

前　言 / Preface

《高等数学》是大学数学课程中一门重要的基础课，也是硕士研究生入学考试的必考科目。同济大学的《高等数学》第五版以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材，被全国许多院校采用.

本书作为一种辅助性的教材，具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性的特点.考虑到读者的不同情况，我们在内容上做了以下安排：

1. 学习要求：根据考试大纲的要求，总结的各章重要知识点.

2. 知识网络图：以图表的形式贯穿各章知识网络，使知识更加系统化.

3. 学习卡片：总结全章所有重要的定理、公式简明扼要，使读者一目了然.

4. 内容概要：串讲概念，总结性质和定理，知识全面系统.

5. 重难点剖析：根据内容总结其中重点、难点并进行详细的解释、分析.

6. 典型题型与解题技巧：精选各类题型，涵盖本章所有重要知识点.

7. 疑难解答：总结各章具有代表性的疑难问题，以及容易产生错误或混淆不清的概念.

8. 常见错误类型分析：总结各章容易出错的题型，从错解、分析、正解三个角度出发解决问题.

9. 考研真题链接：精选历年考研真题进行深入的讲解.

10. 同步自测：根据各章的学习要求，精选了适量的自测题目，并附有答案.

本书另外还赠送了同济大学《高等数学》第五版各章习题的答案. 我们不仅给出了详细的解题过程，而且还对解题思路或方法作了简要的说明.

编写本书时，依据大学本科现行教材及教学大纲的要求，参考了清华大学、北京大学、同济大学、浙江大学、人民大学、复旦大学等高等院校的教材，并结合教学大纲的要求进行编写.

我们衷心希望本书提供的内容能够对读者在掌握课程内容、提高解题能力上有所帮助. 同时，由于编者的水平有限，本书难免出现不妥之处，恳请广大读者批评指正.

东方教育教材研发中心

目 录 / Contents

第九章 重积分

第十二章　微分方程

第八章

多元函数微分法及其应用

学习要求

1. 理解多元函数的概念,理解二元函数的几何意义.
2. 了解二元函数的极限与连续性的概念,以及有界闭区域上连续函数的性质.
3. 理解多元函数偏导数和全微分的概念,会求全微分,了解全微分存在的必要条件和充分条件,了解全微分形式的不变性,了解全微分在近似计算中的应用.
4. 理解方向导数与梯度的概念并掌握其计算方法.
5. 掌握多元复合函数偏导数的求法.
6. 会求隐函数(包括由方程组确定的隐函数)的偏导数.
7. 了解曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念,会求它们的方程.
8. 了解二元函数的二阶泰勒公式.
9. 理解多元函数极值和条件极值的概念,掌握多元函数极值存在的必要条件,了解二元函数极值存在的充分条件,会求二元函数的极值,会用拉格朗日乘数法求条件极值,会求简单多元函数的最大和最小值,并会解决一些简单的应用问题.

知识网络图

- 多元函数微分法及其应用
  - 多元函数的极限与连续性
    - 平面点集，n 维空间，多元函数概念，定义域，函数 $z=f(x,y)$ 的图像
    - 极限
      - 极限的定义　二重极限
      - 极限的性质
    - 连续
      - 连续函数的定义，连续与极限的关系
      - 有界闭域上连续函数的若干性质
  - 偏导数与全微分
    - 概念
      - 偏导数
      - 全微分
      - 方向导数，梯度
      - 高阶偏导数
    - 微分法与性质
      - 关系：有连续偏导⇒可微分
        - 偏导数存在
        - 连续
      - 求导法
        - 复合函数微分法
        - 隐函数微分法
          - 一个方程的情况
          - 方程组的情况
  - 多元函数微分学的应用
    - 几何应用
      - 空间曲线的切线与法平面
      - 空间曲面的法线与切平面
    - 多元极值
      - 无条件极值，二元函数极值的充分条件和必要条件
      - 条件极值与拉格朗日乘数法

学习卡片

空间两点的距离

$$\rho(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$$

全微分不变性　$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$

隐函数求导定理一　$\frac{dy}{dx}=-\frac{Fx}{Fy}$

隐函数求导定理二　对三元方程 $F(x,y,z)=0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{Fx}{Fz}\qquad\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{Fy}{Fz}$$

隐函数求导定理三　对方程组：$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$

雅可比(Jacobi)式 $J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$

空间曲线的切线、法平面方程

参数式 对曲线 Γ 的方程 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$

切线方程 $\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$

法平面方程 $\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$

特殊式 对曲线 Γ 的方程 $\begin{cases}y=\varphi(x)\\ z=\psi(x)\end{cases}$

切线方程 $\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\varphi'(x_0)}=\frac{z-z_0}{\psi'(x_0)}$

法平面方程 $(x-x_0)+\varphi'(x_0)(y-y_0)+\psi'(x_0)(z-z_0)=0$

一般式 对曲线 Γ 的方程 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$

切线方程 $\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}}$

法平面方程 $\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}(x-x_0)+\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}(y-y_0)$

$+\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}(z-z_0)=0$

曲面的切平面与法线

隐式曲面方程 $F(x,y,z)=0$

切平面方程 $F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)$
$+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$

法线方程 $\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$

曲面方程 $z=f(x,y)$

切平面方程 $f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$

法线方程 $\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$

方向导数存在定理 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$

梯度 $\mathbf{grad} f(x_0,y_0,z_0)=f_x(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{i}+f_y(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{j}+f_z(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{k}$

条件极值的拉格朗日乘数法 $L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

二元函数的泰勒公式

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h,y_0+\theta k),\quad (0<\theta<1)$$

二元函数的拉格朗日中值公式

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+hf_x(x_0+\theta h,y_0+\theta k)+kf_y(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$$

第一节 多元函数的基本概念

内容概要

表 8—1 基本概念

名称		定义
多元函数	变化域	变量 x、y 所能取的一切数组 (x,y) 组成平面点集，称为变量 x、y 的变化域
	二元函数	设有三个变量 x、y、z，变量 x、y 的变化域为 D，若对 D 中每一点 $P(x,y)$，依照其一一对应规则 f，变量 z 都有唯一确定的值与之对应，则称 z 是 x、y 的二元函数，记作 $z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$. z 为因变量，D 为 f 的定义域.
	图形	在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，对于 D 中每一点 $P(x,y)$，依函数关系 $z=f(x,y)$，就有空间中一点 M 与之对应，M 的坐标为 $(x,y,f(x,y))$. 在空间中，点 M 的全体称为函数 $z=f(x,y)$ 的图形.
	多元函数	二元及二元以上的函数统称为多元函数.

续表

名称			定义
区域	距离		设 $M_1(x_1,y_1)$、$M_2(x_2,y_2)$ 是 xOy 平面上两点，M_1 与 M_2 的距离记作 $d(M_1,M_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$
	邻域		在平面 xOy 上固定一点 $M_0(x_0,y_0)$，所有与 M_0 的距离小于 $\delta(\delta>0)$ 的点的集合，称为点 M_0 的 δ-邻域，记作 $U(x_0,\delta)$；点集 $\{M\mid 0<d(M,M_0)<\delta\}$ 称为 M_0 的空心邻域，记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$
	点集 E 是平面上点集合	内点	存在 M_0 的某一邻域 $U(M_0,\delta)$，使得 $U(M_0,\delta)\subset E$，称 M_0 为点集 E 的内点
		外点	存在 M_1 的某一邻域 $U(M_1,\delta)$，使得 $U(M_1,\delta)$ 中没有 E 中的点，则称 M_1 是点集 E 的外点
		边界点	M_2 的任何邻域中都既有 E 中的点，又有不是 E 中的点，则称 M_2 是点集 E 的边界点
	集合	开集	若点集 E 的所有点都是内点，则称 E 为开集
		闭集	若点集 E 包含它的所有边界点，则称 E 为闭集
		连通集	若点集 E 中的任意两点都可用一条完全在 E 中的折线连接起来，则称 E 为连通集
		区域	若点集 D 是连通的开集，则称 D 为区域；区域 D 的边界点的全体称为 D 的边界；区域 D 加上它的边界称为闭区域，记作 $\overline{D}$
		有界闭区域	若闭区域 $\overline{D}$ 能够被包含在以原点为圆心的某个开圆中，则称此闭区域 $\overline{D}$ 为有界闭区域
极限	定义 1		设二元函数 $f(M)$ 在点 M_0 的附近有定义（点 M_0 本身可能除外），若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<d(M,M_0)<\delta$ 时，恒有：$\lvert f(M)-A\rvert<\varepsilon$，则称 $f(M)$ 在 M_0 点以 A 为极限，记作 $\lim\limits_{M\to M_0}f(M)=A$
	定义 2		$f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 的附近有定义（点 M_0 本身可能除外），若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $\lvert x-x_0\rvert<\delta$，$\lvert y-y_0\rvert<\delta$ 且 $(x,y)\neq(x_0,y_0)$ 时，有：$\lvert f(x,y)-A\rvert<\varepsilon$，则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处极限为 A，记作 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$
连续	定义 1		设二元函数 $f(M)$ 在 M_0 点及其附近有定义，若 $\lim\limits_{M\to M_0}f(M)=f(M_0)$，则称 $f(M)$ 在点 M_0 处连续
	定义 2		若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $d(M,M_0)<\delta$ 时，恒有 $\lvert f(M)-f(M_0)\rvert<\varepsilon$，或者 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$，称 $f(M)$ 在点 M_0 点连续