



东方教育
EAST EDUCATION

普通高等教育“十五”国家级规划教材经典同步辅导丛书

高等数学

第五版 下册 同步辅导

普通高等教育国家规划教材研究中心 组编
东方教育教材研发中心
同济大学 王建福 主编

赠学习卡
习题全解



新华出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材经典同步辅导丛书

高等数学

(第五版) 下册

同步辅导

普通高等教育国家规划教材研究中心

东方教育教材研发中心

同济大学 王建福

组编

主编

新 华 出 版 社

东方教育教材研发中心
经典同步辅导丛书编委会

主 任：清华大学 王 飞
副 主 任：清华大学 夏应龙
 清华大学 聂飞平

编 委(按姓氏笔画排序):

于志慧	王 焯	甘 露	朱凤琴
刘胜志	刘淑红	师文玉	吕现杰
李晓炜	李炳颖	李 冰	李燕平
李 波	李凤军	李雅平	李晓光
宋之来	宋婷婷	宋 猛	张 慧
张守臣	张旭东	张国良	张鹏林
周海燕	孟庆芬	韩艳美	韩国生

前言 / Preface

《高等数学》是大学数学课程中一门重要的基础课,也是硕士研究生入学考试的必考科目。同济大学的《高等数学》第五版以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材,被全国许多院校采用。

本书作为一种辅助性的教材,具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性的特点。考虑到读者的不同情况,我们在内容上做了以下安排:

1. 学习要求:根据考试大纲的要求,总结的各章重要知识点。

2. 知识网络图:以图表的形式贯穿各章知识网络,使知识更加系统化。

3. 学习卡片:总结全章所有重要的定理、公式简明扼要,使读者一目了然。

4. 内容概要:串讲概念,总结性质和定理,知识全面系统。

5. 重难点剖析:根据内容总结其中重点、难点并进行详细的解释、分析。

6. 典型题型与解题技巧:精选各类题型,涵盖本章所有重要知识点。

7. 疑难解答:总结各章具有代表性的疑难问题,以及容易产生错误或混淆不清的概念。

8. 常见错误类型分析:总结各章容易出错的题型,从错解、分析、正解三个角度出发解决问题。

9. 考研真题链接:精选历年考研真题进行深入的讲解。

10. 同步自测:根据各章的学习要求,精选了适量的自测题目,并附有答案.

本书另外还赠送了同济大学《高等数学》第五版各章习题的答案.我们不仅给出了详细的解题过程,而且还对解题思路或方法作了简要的说明.

编写本书时,依据大学本科现行教材及教学大纲的要求,参考了清华大学、北京大学、同济大学、浙江大学、人民大学、复旦大学等高等院校的教材,并结合教学大纲的要求进行编写.

我们衷心希望本书提供的内容能够对读者在掌握课程内容、提高解题能力上有所帮助.同时,由于编者的水平有限,本书难免出现不妥之处,恳请广大读者批评指正.

东方教育教材研发中心

目 录 / Contents

第八章 多元函数微分法及其应用

1	学习要求
2	知识网络图
2	学习卡片
4	第一节 多元函数的基本概念
4	内容概要
7	重难点剖析
8	典型题型与解题技巧
13	常见错误类型分析
16	第二节 偏导数
16	内容概要
17	重难点剖析
17	典型题型与解题技巧
20	常见错误类型分析
22	第三节 全微分
22	内容概要
23	重难点剖析
23	典型题型与解题技巧
28	常见错误类型分析
30	第四节 多元复合函数的求导法则
30	内容概要
30	重难点剖析
31	典型题型与解题技巧
34	常见错误类型分析
36	第五节 隐函数的求导公式
36	内容概要
37	重难点剖析

38	典型题型与解题技巧
43	常见错误类型分析
45	第六节 多元函数微分学的几何应用
45	内容概要
45	重难点剖析
47	典型题型与解题技巧
50	常见错误类型分析
52	第七节 方向导数与梯度
52	内容概要
53	重难点剖析
53	典型题型与解题技巧
56	常见错误类型分析
59	第八节 多元函数的极值及其求法
59	内容概要
60	重难点剖析
61	典型题型与解题技巧
65	常见错误类型分析
68	考研真题链接
71	同步自测及答案解析

第九章 重积分

76	学习要求
76	知识网络图
77	学习卡片
78	第一节 二重积分的概念与性质
78	内容概要
79	重难点剖析
81	典型题型与解题技巧
84	常见错误类型分析
87	第二节 二重积分的计算法
87	内容概要
88	重难点剖析
89	典型题型与解题技巧
97	常见错误类型分析

100	第三节 三重积分
100	内容概要
102	重难点剖析
103	典型题型与解题技巧
107	常见错误类型分析
110	第四节 重积分的应用
110	内容概要
111	重难点剖析
112	典型题型与解题技巧
116	常见错误类型分析
117	考研真题链接
120	同步自测及答案解析

第十章 曲线积分与曲面积分

125	学习要求
126	知识网络图
126	学习卡片
128	第一节 对弧长的曲线积分
128	内容概要
129	重难点剖析
130	典型题型与解题技巧
133	常见错误类型分析
136	第二节 对坐标的曲线积分
136	内容概要
138	重难点剖析
140	典型题型与解题技巧
146	常见错误类型分析
149	第三节 格林公式及其应用
149	内容概要
150	重难点剖析
151	典型题型与解题技巧
158	常见错误类型分析

160	第四节 对面积的曲面积分
160	内容概要
161	重难点剖析
162	典型题型与解题技巧
166	常见错误类型分析
169	第五节 对坐标的曲面积分
169	内容概要
171	重难点剖析
172	典型题型与解题技巧
177	常见错误类型分析
181	第六节 高斯公式 通量与散度
181	内容概要
183	重难点剖析
183	典型题型与解题技巧
188	常见错误类型分析
191	第七节 斯托克斯公式 环流量与旋度
191	内容概要
193	重难点剖析
193	典型题型与解题技巧
197	考研真题链接
201	同步自测及答案解析

第十一章 无穷级数

208	学习要求
209	知识网络图
210	学习卡片
212	第一节 常数项级数的概念和性质
212	内容概要
213	重难点剖析
214	典型题型与解题技巧
217	常见错误类型分析
218	第二节 常数项级数的审敛法
218	内容概要

220	重难点剖析
221	典型题型与解题技巧
225	常见错误类型分析
227	第三节 幂级数
227	内容概要
228	重难点剖析
229	典型题型与解题技巧
231	常见错误类型分析
233	第四节 函数展开成幂级数
233	内容概要
234	重难点剖析
235	典型题型与解题技巧
238	常见错误类型分析
240	第五节 函数的幂级数展开式的应用
240	内容概要
240	重难点剖析
240	典型题型与解题技巧
242	第六节 函数项级数的一致收敛性及一致收敛级数的基本性质
242	内容概要
243	典型题型与解题技巧
246	第七节 傅里叶级数
246	内容概要
247	重难点剖析
248	典型题型与解题技巧
251	常见错误类型分析
254	第八节 一般周期函数的傅里叶级数
254	内容概要
255	重难点剖析
255	典型题型与解题技巧
258	常见错误类型分析
261	考研真题链接
263	同步自测答案及解析

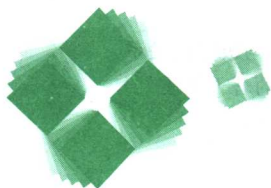
第十二章 微分方程

270	学习要求
271	知识网络图
271	学习卡片
272	第一节 微分方程的基本概念
272	内容概要
273	重难点剖析
274	典型题型与解题技巧
276	常见错误类型分析
278	第二节 可分离变量的微分方程
278	内容概要
278	重难点剖析
279	典型题型与解题技巧
281	常见错误类型分析
283	第三节 齐次方程
283	内容概要
283	重难点剖析
284	典型题型与解题技巧
287	常见错误类型分析
288	第四节 一阶线性微分方程
289	内容概要
289	重难点剖析
290	典型题型与解题技巧
294	第五节 全微分方程
294	内容概要
294	重难点剖析
295	典型题型与解题技巧
298	常见错误类型分析
300	第六节 可降阶的高阶微分方程
300	内容概要
300	重难点剖析
301	典型题型与解题技巧
304	常见错误类型分析

307	第七节 高阶线性微分方程
307	内容概要
308	重难点剖析
310	典型题型与解题技巧
312	常见错误类型分析
316	第八节 常系数齐次线性微分方程
316	内容概要
317	重难点剖析
317	典型题型与解题技巧
320	常见错误类型分析
322	第九节 常系数非齐次线性微分方程
322	内容概要
323	重难点剖析
324	典型题型与解题技巧
329	常见错误类型分析
331	第十节 欧拉方程
331	内容概要
332	重难点剖析
332	典型题型与解题技巧
335	第十一节 微分方程的幂级数解法
335	内容概要
335	重难点剖析
335	典型题型与解题技巧
336	考研真题链接
339	同步自测及答案解析

第八章

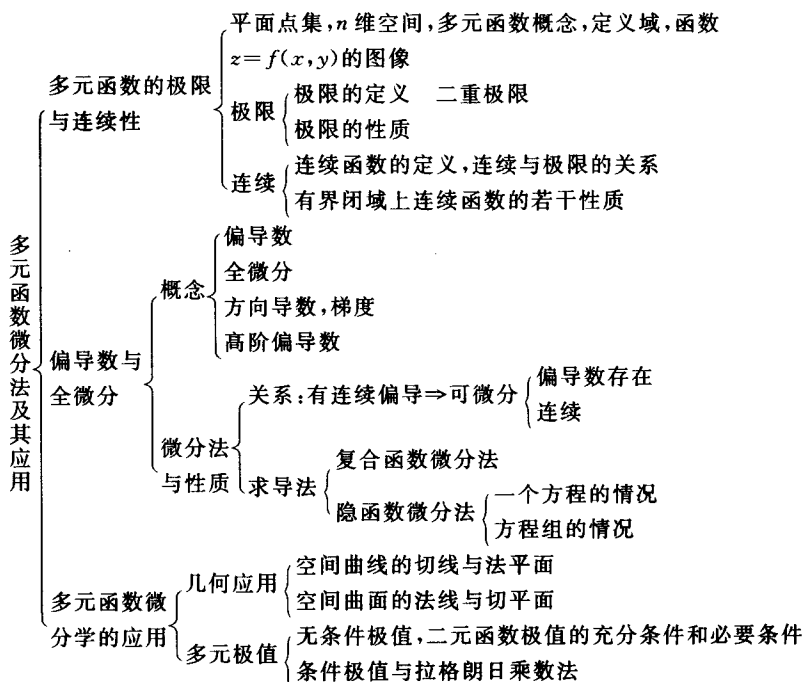
多元函数微分法及其应用



学习要求

1. 理解多元函数的概念,理解二元函数的几何意义.
2. 了解二元函数的极限与连续性的概念,以及有界闭区域上连续函数的性质.
3. 理解多元函数偏导数和全微分的概念,会求全微分,了解全微分存在的必要条件和充分条件,了解全微分形式的不变性,了解全微分在近似计算中的应用.
4. 理解方向导数与梯度的概念并掌握其计算方法.
5. 掌握多元复合函数偏导数的求法.
6. 会求隐函数(包括由方程组确定的隐函数)的偏导数.
7. 了解曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念,会求它们的方程.
8. 了解二元函数的二阶泰勒公式.
9. 理解多元函数极值和条件极值的概念,掌握多元函数极值存在的必要条件,了解二元函数极值存在的充分条件,会求二元函数的极值,会用拉格朗日乘数法求条件极值,会求简单多元函数的最大和最小值,并会解决一些简单的应用问题.

知识网络图



学习卡片

空间两点的距离

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

全微分不变性 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$

隐函数求导定理一 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$

隐函数求导定理二 对三元方程 $F(x, y, z) = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

隐函数求导定理三 对方程组:
$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$$

雅可比(Jacobi)式 $J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$

空间曲线的切线、法平面方程

参数式 对曲线 Γ 的方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$

切线方程 $\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y-y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$

法平面方程 $\varphi'(t_0)(x-x_0) + \psi'(t_0)(y-y_0) + \omega'(t_0)(z-z_0) = 0$

特殊式 对曲线 Γ 的方程 $\begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$

切线方程 $\frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{\varphi'(x_0)} = \frac{z-z_0}{\psi'(x_0)}$

法平面方程 $(x-x_0) + \varphi'(x_0)(y-y_0) + \psi'(x_0)(z-z_0) = 0$

一般式 对曲线 Γ 的方程 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$

切线方程 $\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}}$

法平面方程 $\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix} (x-x_0) + \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix} (y-y_0) + \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} (z-z_0) = 0$

曲面的切平面与法线

隐式曲面方程 $F(x, y, z) = 0$

切平面方程 $F_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0) = 0$

法线方程 $\frac{x-x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z-z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$

曲面方程 $z=f(x, y)$

切平面方程 $f_x(x_0, y_0)(x-x_0) + f_y(x_0, y_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0$

法线方程 $\frac{x-x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y-y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}$

方向导数存在定理 $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) \cos \beta$

梯度 $\text{grad}f(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{j} + f_z(x_0, y_0, z_0)\mathbf{k}$

条件极值的拉格朗日乘数法 $L(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$

二元函数的泰勒公式

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k), \quad (0 < \theta < 1)$$

二元函数的拉格朗日中值公式

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + hf_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + kf_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$$

第一节 多元函数的基本概念

内容概要

表 8-1 基本概念

名 称		定 义
多元函数	变化域	变量 x, y 所能取的一切数组 (x, y) 组成平面点集, 称为变量 x, y 的变化域
	二元函数	设有三个变量 x, y, z , 变量 x, y 的变化域为 D , 若对 D 中每一点 $P(x, y)$, 依照其一一对应规则 f , 变量 z 都有唯一确定的值与之对应, 则称 z 是 x, y 的二元函数, 记作 $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, z 为因变量, D 为 f 的定义域.
	图形	在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中, 对于 D 中每一点 $P(x, y)$, 依函数关系 $z = f(x, y)$, 就有空间中一点 M 与之对应, M 的坐标为 $(x, y, f(x, y))$. 在空间中, 点 M 的全体称为函数 $z = f(x, y)$ 的图形.
	多元函数	二元及二元以上的函数统称为多元函数.

名 称			定 义
区 域	距离		设 $M_1(x_1, y_1)$ 、 $M_2(x_2, y_2)$ 是 xOy 平面上两点, M_1 与 M_2 的距离记作 $d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
	邻域		在平面 xOy 上固定一点 $M_0(x_0, y_0)$, 所有与 M_0 的距离小于 δ ($\delta > 0$) 的点的集合, 称为点 M_0 的 δ -邻域, 记作 $U(x_0, \delta)$; 点集 $\{M 0 < d(M, M_0) < \delta\}$ 称为 M_0 的空心邻域, 记作 $\dot{U}(x_0, \delta)$
	点集 E 是平面上点集合	内点	存在 M_0 的某一邻域 $U(M_0, \delta)$, 使得 $U(M_0, \delta) \subset E$, 称 M_0 为点集 E 的内点
		外点	存在 M_1 的某一邻域 $U(M_1, \delta)$, 使得 $U(M_1, \delta)$ 中没有 E 中的点, 则称 M_1 是点集 E 的外点
		边界点	M_2 的任何邻域中都既有 E 中的点, 又有不是 E 中的点, 则称 M_2 是点集 E 的边界点
	集 合	开集	若点集 E 的所有点都是内点, 则称 E 为开集
		闭集	若点集 E 包含它的所有边界点, 则称 E 为闭集
		连通集	若点集 E 中的任意两点都可用一条完全在 E 中的折线连接起来, 则称 E 为连通集
		区域	若点集 D 是连通的开集, 则称 D 为区域; 区域 D 的边界点的全集称为 D 的边界; 区域 D 加上它的边界称为闭区域, 记作 $\bar{D}$
		有界区域	若闭区域 $\bar{D}$ 能够被包含在以原点为圆心的某个开圆中, 则称此闭区域 $\bar{D}$ 为有界闭区域
极 限	定义 1		设二元函数 $f(M)$ 在点 M_0 的附近有定义 (点 M_0 本身可能除外), 若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < d(M, M_0) < \delta$ 时, 恒有: $ f(M) - A < \epsilon$, 则称 $f(M)$ 在 M_0 点以 A 为极限, 记作 $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A$
	定义 2		$f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 的附近有定义 (点 M_0 本身可能除外), 若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $ x - x_0 < \delta, y - y_0 < \delta$ 且 $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ 时, 有: $ f(x, y) - A < \epsilon$, 则称 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处极限为 A , 记作 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$
连 续	定义 1		设二元函数 $f(M)$ 在 M_0 点及其附近有定义, 若 $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$, 则称 $f(M)$ 在点 M_0 处连续
	定义 2		若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $d(M, M_0) < \delta$ 时, 恒有 $ f(M) - f(M_0) < \epsilon$, 或者 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, 称 $f(M)$ 在点 M_0 点连续