少年百科丛书

精选本

科学的发现（二）

——圆面积之谜

李毓佩

shao nian baikecong shu jing xuan ben

- 全国第一套以少年为对象的大型丛书。
- 着眼于启发思想，丰富知识，培养能力，引起兴趣。
- 被专家、学者誉为“通向知识海洋的窗口”，“哺育巨人的乳汁”。
- 1978 年出版以来，累计印行 5000 万册。
- 原教育部曾发出专门文件向全国中小学生推荐。

中国少年儿童出版社

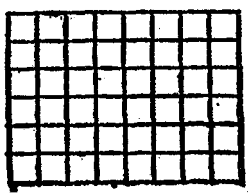
目　次

一、圆面积之谜

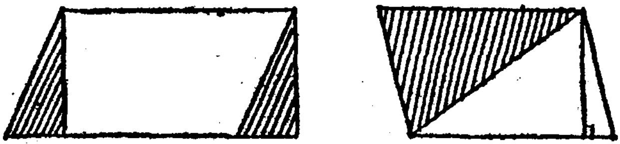
怎样求圆面积？我们现在有公式可用，很快就算出来了。但是在漫长的年代里，人们为了研究和解决这个问题，不知遇到了多少艰难和困苦，花费了多少精力和时间。

割补求面积

在平面图形中，以长方形的面积最容易求了。用大小一样的正方形砖铺垫长方形地面，如果横向用八块，纵向用六块，那一共就用了 $8\times6=48$ 块砖。所以求长方形面积的公式是：长×宽。

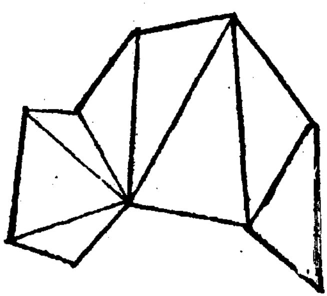


求平行四边形的面积，可以用割补的方法，把它变成一个与它面积相等的长方形。长方形的长和宽，就是平行四边形的底和高。所以求平行四边形面积的公式是：底×高。

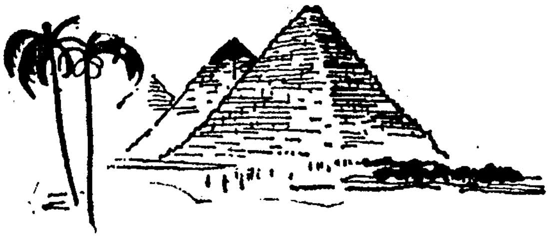


求三角形的面积，可以对接上一个和它全等的三角形，成为一个平行四边形。这样，三角形的面积，就等于和它同底同高的平行四边形面积的一半。所以求三角形面积的公式是：$\frac{1}{2}$×底×高。

任何一个多边形，因为可以分割成若干个三角形，所以它的面积，就等于这些三角形面积的和。



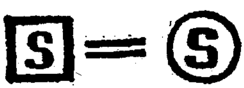
四千多年前修建的埃及胡夫金字塔，底座是一个正方形，占地五万二千九百平方米。它的底座边长和角度计算十分准确，误差很小，可见当时测算大面积的技术水平很高。



古老的难题

圆是最重要的曲边形。古埃及人把它看成是神赐予人的神圣图形。怎样求圆的面积，是数学对人类智慧的一次考验。

也许你会想，既然正方形的面积那么容易求，我们只要想办法做出一个正方形，使它的面积恰好等于圆面积就行了。你的想法很好，可是要做出这样的正方形很难啊。



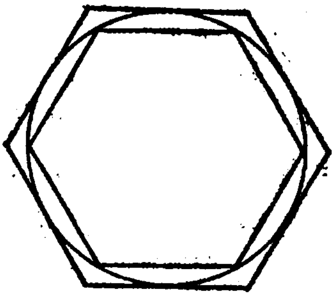
你知道古代三大几何难题吗？其中的一个，就是你刚才想到的化圆为方。这个起源于古希腊的几何作图题，在两千多年间，不知难倒了多少能人，直到十九世纪，人们才证明了这个几何题，是根本不可能用圆规和无刻度的直尺作出来的。

化圆为方这条路走不通，人们不得不开动脑筋，另找出路。

我国古代的数学家，从圆内接正六边形入手，让边数成倍增加，用圆内接正多边形的面积去逼近圆面积。

古希腊的数学家，从圆内接正多边形和外切正多边形同时入手，不断增加它们的边数，从里外两个方面

去逼近圆面积。



古印度的数学家，采用类似切西瓜的办法，把圆切成许多小瓣，再把这些小瓣对接成一个长方形，用长方形的面积去代替圆面积。

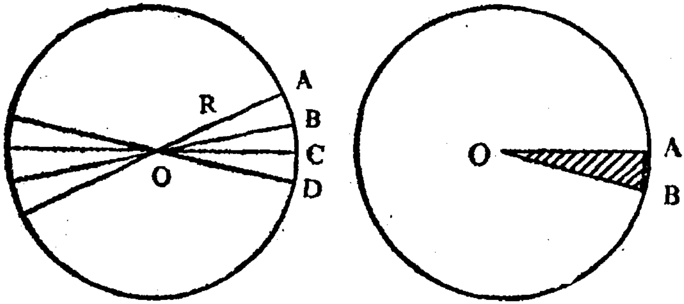
他们煞费苦心，巧妙构思，不怕困难，为求圆面积作出了十分宝贵的贡献。

酒桶的学问

十六世纪的德国天文学家开普勒，是一个重视观察、肯动脑筋的人。他曾把丹麦天文学家第谷遗留下来的大量天文观测资料，认真地进行整理分析，提出了著名的“开普勒三定律”。开普勒第一次告诉人们，地球围绕太阳运行的轨道是一个椭圆，太阳位于其中的一个焦点上。

开普勒当过数学教师，他对求面积的问题非常感兴趣，曾进行过深入的研究。他想，古代数学家用分割的方法去求圆面积，所得到的结果都是近似值。为了提高近似的程度，他们不断增加分割的次数。但是，不管分割多少次，几千几万，只要是有限次，所求出来的总是圆面积的近似值。要想求出圆面积的精确值，必须分割无穷多次，把圆分成无穷多等分才行。

开普勒也模仿切西瓜的方法，把圆分割成许多小扇形；不同的是，他一上来就把圆分成无穷多个小扇形。



因为这些小扇形太小了，小弧 $\overset{\frown}{AB}$ 也太短了，所以开普勒就把小弧 $\overset{\frown}{AB}$ 和小弦 $\overline{AB}$ 看成是相等的，即 $\overset{\frown}{AB}=\overline{AB}$。

这样一来，小扇形 AOB 就变成为小三角形 AOB 了；而小三角形 AOB 的高就是圆的半径 R。于是，开普勒就得到：

小扇形 AOB 的面积 = 小三角形 AOB 的面积 $=\frac{1}{2}R\times\overline{AB}$。

圆面积等于无穷多个小扇形面积的和，所以

$$圆面积\ S=\frac{1}{2}R\times\overline{AB}+\frac{1}{2}R\times\overline{BC}+\frac{1}{2}R\times\overline{CD}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2}R\times(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\cdots\cdots)$$

$$=\frac{1}{2}R\times(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}+\cdots\cdots)。$$

在最后一个式子中，各段小弧相加就是圆的周长 $2\pi R$，所以有

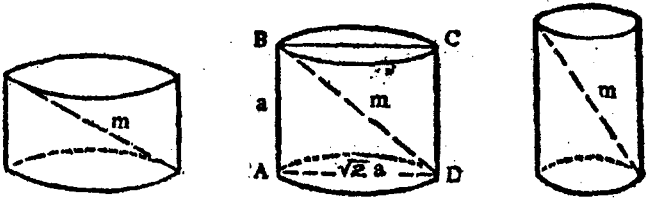
$$S=\frac{1}{2}R\times 2\pi R=\pi R^2。$$

这就是我们熟悉的圆面积公式。

开普勒运用无穷分割法，求出了许多图形的面积。1615 年，他把自己创造的这种求面积的新方法，发表在《葡萄酒桶的立体几何》一书中。

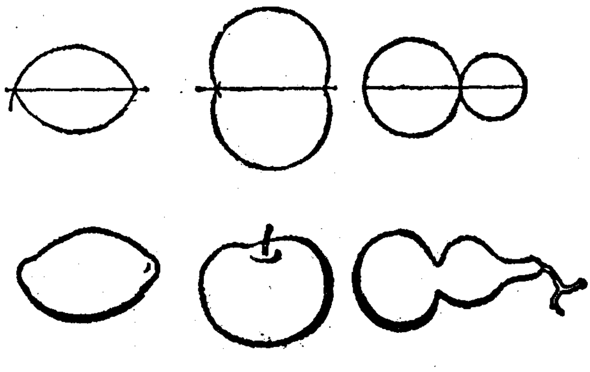
这个奇怪的书名是有来由的。有一天，开普勒到酒店去喝酒，发现奥地利的葡萄酒桶，和他家乡莱茵的葡萄酒桶不一样。他想，奥地利葡萄酒桶为什么偏要做成这个样子呢？高一点好不好？扁一点行不行？这

里面会不会有什么学问？经过研究，开普勒发现，当圆柱形酒桶的截面 ABCD 的对角线长度固定时，比如等



于 m，以底圆直径和高的比为$\sqrt{2}$时体积最大，装酒最多。奥地利的葡萄酒桶，恰好是按这个比例做成的。这一意外发现，使开普勒非常高兴，决定给这本关于求面积和体积的书，起名为《葡萄酒桶的立体几何》。

在这本书中，开普勒除介绍了他求面积的新方法外，还介绍了他求出的近百个旋转体的体积。比如，他计算了圆弧绕着弦旋转一周，所产生的各种旋转体的体积。这些旋转体的形状，有的象苹果，有的象柠檬，有的象葫芦。

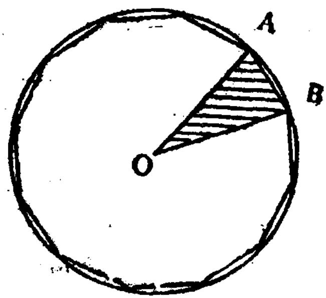


问题在哪里?

开普勒大胆地把圆分割成无穷多个小扇形，又果敢地断言：无穷小的扇形面积，和它对应的无穷小的三角形面积相等。他在前人求面积的基础上，向前迈出了重要的一步。

《葡萄酒桶的立体几何》一书，很快在欧洲流传开了。数学家高度评价开普勒的工作，称赞这本书是人们创造求面积和体积新方法的灵感源泉。

一种新的理论，在开始的时候很难十全十美。开普勒创造的求面积的新方法，引起了一些人的怀疑。他们问道：开普勒分割出来的无穷多个小扇形，它的面积究竟等于不等于零？如果等于零，半径OA和半径OB就必然重合，小扇形OAB就不存在了；如果它的面



积不等于零，小扇形 OAB 与小三角形OAB的面积就不会相等。开普勒把两者看作相等就不对了。

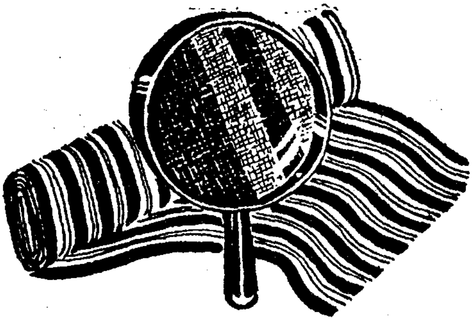
面对别人提出的问题，开普勒自己也说不清楚。

他在想什么？

卡瓦利里是意大利物理学家伽利略的学生，他研究了开普勒求面积方法中的问题。

卡瓦利里想，开普勒把圆分成无穷多个小扇形，这每个小扇形的面积到底等于不等于零，就不好确定了。但是，只要小扇形还是图形，它是可以再分的呀。开普勒为什么不再继续分下去了呢？要是真的再细分下去，那分到什么程度为止呢？这些问题，使卡瓦利里陷入了沉思之中。

有一天，当卡瓦利里的目光落到自己的衣服上时，他忽然灵机一动：唉，布不是可以看成为面积嘛！布是由棉线织成的，要是把布拆开的话，拆到棉线就为止了。我们要是把面



积也象布一样拆开，拆到哪儿为止呢？应该拆到直线为止。几何学规定直线没有宽度，把面积分到直线就应该不能再分了。于是，他把不能再细分的东西叫做“不可分量”。棉线是布的不可分量，直线是平面面积的不可分量。

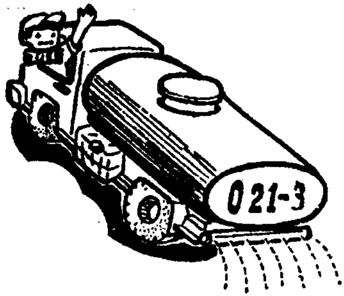
卡瓦利里还进一步研究了体积的分割问题。他想，可以把长方体看成为一本书，组成书的每一页纸，应该是书的不可分量。这样，平面就应该是长方体体积的不可分量。几何学规定平面是没有薄厚的，这样想也是有道理的。

卡瓦利里紧紧抓住自己的想法，反复琢磨，提出了求面积和体积的新方法。

1635 年，当《葡萄酒桶的立体几何》一书问世二十周年的时候，意大利出版了卡瓦利里的《不可分量几何学》。在这本书中，卡瓦利里把点、线、面，分别看成是

直线、平面、立体的不可分量；把直线看成是点的总和，把平面看成是直线的总和，把立体看成是平面的总和。

独特的方法

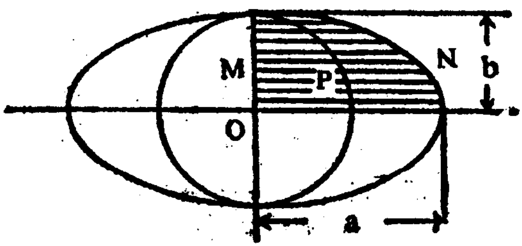


卡瓦利里怎样用不可分量求面积的呢？现在以椭圆为例，介绍如下：

椭圆有一条长轴和一条短轴，如图相交于 O，把椭圆分成了四等份。

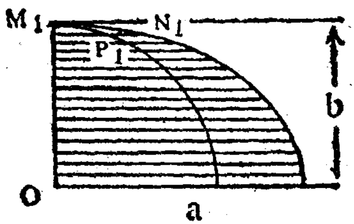
卡瓦利里设 a 和 b 是长轴和短轴的一半；以椭圆中心 O 为圆心，以 b 为半径，在椭圆内作一个圆。

他根据不可分量的想法，把椭圆面积的四分之一，看成是由无穷多条平行于 a 的线段组成，每一条线段与圆交于一点。



卡瓦利里根据椭圆的性质推出，任一条和 a 平行的线段 MN，与圆交于 P，一定有

$$\frac{MP}{MN}=\frac{b}{a}。$$



他把这样引出的无穷多条平行线段，由小到大编上M_1N_1，M_2N_2，M_3N_3，……就可以得到一大串比例式

$$\frac{M_1P_1}{M_1N_1}=\frac{M_2P_2}{M_2N_2}=\frac{M_3P_3}{M_3N_3}=\cdots\cdots=\frac{b}{a}。$$

比例有这样一个性质：如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$成立，那么$\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}$也成立。他利用比例的这个性质，就得到

$$\frac{M_1P_1+M_2P_2+M_3P_3+\cdots\cdots}{M_1N_1+M_2N_2+M_3N_3+\cdots\cdots}=\frac{b}{a}。$$

在卡瓦利里看来，分子的和就是圆面积的四分之一，分母的和就是椭圆面积的四分之一。

因为$\dfrac{\frac{1}{4}\text{圆面积}}{\frac{1}{4}\text{椭圆面积}}=\dfrac{\text{圆面积}}{\text{椭圆面积}}=\dfrac{b}{a}$，

即$\frac{\pi b^2}{椭圆面积}=\frac{b}{a}$,

所以，椭圆面积$=\pi ab$。

这就是我们现在求椭圆面积的公式。

卡瓦利里使用不可分量的方法，求出了许多前人不会求的面积,受到了人们的拥护和尊敬。

卡瓦利里还根据不可分量的方法指出，两本书的外形虽然不一样,但是,只要页数相同,薄厚相同,而且每一页的面积也相等,那么,这两本书的体积就应该相等。他认为这个道理,适用于所有的立体,并且用这个道理求出了很多立体的体积。这就是有名的“卡瓦利里原理”。

事实上，最先提出这个原理的，是我国数学家祖暅。祖暅是祖冲之的儿子,生于公元五到六世纪,比卡瓦利里早一千多年，所以我们叫它“祖暅原理”或者“祖暅定理”。