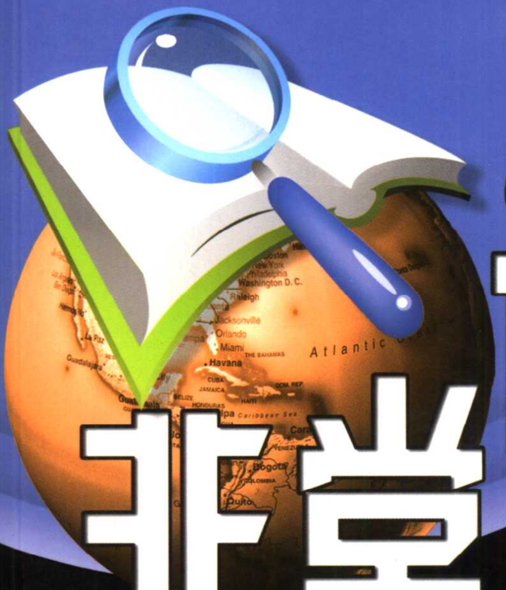
Peculiar Explanation

宋伯涛　总主编

人教统编版

北京朗曼教学与研究中心教研成果



非常讲解

高二数学

教材全解全析（下）

天津人民出版社

Peculiar Explanation

张志朝
高志雄 主编

北京朗曼教学与研究中心教研成果

非常讲解

高二数学

教材全解全析(下)

天津人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

非常讲解．高二数学教材全解全析．下/张志朝主编．-天津:天津人民出版社,2002.

ISBN 7-201-04286-6

Ⅰ.非… Ⅱ.张… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 094267 号

非常讲解
高二数学教材全解全析(下)

张志朝 高志雄 主编

天津人民出版社出版
出版人:刘晓津
(天津市西康路 35 号 邮政编码:300051)
北京市昌平开拓印刷厂印刷 新华书店发行
*
2005 年 11 月第 4 版 2005 年 11 月第 1 次印刷
32 开本 890×1240 毫米 13 印张 字数:389 千字
定价:15.80 元
ISBN 7-201-04286-6

敬告读者

《中学 1+1》《非常讲解》系列丛书汇集了北京朗曼教学与研究中心最新教学科研成果。值此再版之际，北京朗曼教学与研究中心向全国千百万热心读者深表谢意！

在购买《中学 1+1》《非常讲解》系列丛书时，请读者认准封面上“**北京朗曼教学与研究中心教研成果**”“**宋伯涛总主编**”等字样，以防假冒。

近年来，发现个别出版物公然冒用《中学 1+1》《非常讲解》品牌或大量盗用书中内容。在此，本中心**严正声明：凡冒用《中学 1+1》《非常讲解》品牌，盗用书中内容的行为，均为侵犯知识产权行为，本中心将根据有关法规追究侵权者的法律责任。**

保护知识产权，打击盗版、盗用行为是每一个真正尊重知识的忠诚读者的义务。如发现有侵权行为，请及时告知北京朗曼教学与研究中心，本中心对您的正直行为表示由衷的感谢。

如您在使用本书过程中发现有疏漏之处或疑难问题，可来信与本中心联系，我们将悉心听取您的批评和建议，竭诚为您排忧解难。让我们携手共勉，共同打造朗曼光辉的形象！

本书在全国各地均有销售，您也可以来信邮购。

来信请寄：北京市朝阳区亚运村邮局 89 号信箱，北京朗曼教学与研究中心**蒋雯丽**（收）；邮编：100101。

联系电话：010 － 64925885；64925887 转 603，605。

另外，北京朗曼教学与研究中心新建大型教学网站“**朗曼 1+1 网**”已于 **2004 年 5 月 18 日**正式开通。网站科目齐全，内容丰富，欢迎登录！

轻松浪漫的学习旅程，将从点击“朗曼 1+1 网”开始！

网址：http://www.lmedu.com.cn

再版前言

随着国家基础教育课程改革的深入开展，义务教育《课程标准》的实施范围正在逐步扩大，新的教育理念被越来越多的教育工作者和社会人士所接受，我国基础教育事业正经历着一次深刻的变革。这个变革的核心，对于教师来说，就是改变角色定位；对于学生来说，就是变革学习方式。本着这样的精神，同时为了适应课程改革深入发展的需要，今年再版时，我们在广泛征集专家、教师、学生和家长意见的基础上，作了较大程度的修订。

本书按照源于新教材又高于新教材的原则进行修改，对它的各个知识点以及能力要求进行全面的讲解，分析和指导，每节设如下栏目：**课程标准要求、教材解析、方法指引、巩固练习**等。其中教材解析为本书各节的重点，它在新教材的基础上，对章节的各知识点逐个进行详细的讲解和分析，着重知识和技能的拓展与规律方法的揭示与总结，通过典型常规题，创新开放题及实践应用题等让学生对新教材的知识点进行探究和体验，并按以下三点进行设计：

1.对典型例题进行全面剖析，并设以下四个栏目：①**思路点拨**：点拨解题思路，提供解题策略。②**解答**：按照解题方案，给出规范解答。③**误点剖析**：指出解题常见错误，并点击错误产生的原因，进行防错提示。④**评注**：总结解题过程的注意点，剖析解题技巧的关键处。开设以上小栏目，其目的是，开启学生思路，着眼规律方法总结。

2.试解相关题(或变式题)。从不同角度提出与典型例题相关或相近的问题，供学生练习，达到融会贯通，举一反三的目的。

3.每道典型题都针对教材中某一知识点，旨在通过对例题的探索，获得对教材相关内容的实践与体验。

作者在编写过程中，力求讲解教材全部内容，信息量大，做到精讲精析精选，讲解透彻且具有深度，辨析清晰细致，分析讲解新颖独到，与众不同，别具一格，不落窠臼。

《非常讲解》系列丛书讲解细致，分析透彻，层次分明，条理清晰，内容丰富，对掌握教材重点、难点、疑点以及各知识点，对培养并提高理解、分析、判断、领悟、思考以及解决问题能力具有极强的实用性和指导性，是朗曼中心继《中学1+1》系列丛书后又一成功力作，两者堪称姊妹篇。其侧重点各不相同，前者偏重于对教材的讲解与分析，后者偏重于重点及疑难问题的讲解与测试，它们既是一个整体，又互为补充，相得益彰。

学习《课程标准》，更新教育观念，有一个不断深入的过程；课程改革的实施，也需要不断地探索和积累。本书此次修订正是学习《课程标准》，改革教学内容和方法的一个具体的落实。希望我们的努力能给老师和同学们的教学活动带来切实而有效的帮助，同时也期待着来自广大师生和教育专家的批评和指教。

宋伯涛

2005年10月于北师大

目录 CONTENTS

第九章　直线、平面、简单几何体(A)

本章知识导学

从土木建筑到家居装璜，从机械设计到商品包装，从航空测绘到零件视图，……空间图形与我们的生活息息相关.

空间图形的研究非常重要. 例如，如何检查墙面或旗杆是否与地面垂直? 如何刻画人造地球卫星轨道平面与赤道平面所成的"角"? 要解决这类问题，就要用到空间图形的相关知识.

空间中的一些点组成线和面. 这些点、线、面构成空间中的几何图形，可以说空间图形是空间中一些点的集合. 组成空间图形的点可以都在同一平面内，也可以不都在同一平面内. 各点都在同一平面内的图形是平面图形，各点不都在同一平面内的图形是立体图形. 平面图形和立体图形都是空间图形.

研究立体图形，一方面要注意立体图形与平面图形的区别，考虑问题时要着眼于整个空间，而不能局限于一个平面；另一方面要注意立体图形与平面图形的联系，立体图形中有些点在同一平面内，对平面图形的研究是讨论立体图形的基础，立体图形的问题常常转化为平面图形的问题来解决.

学习关于立体图形的知识，需要空间想象力，即对于几何图形的形状、大小、位置关系及其运动变化的认识与处理的能力；运用图形、文字、符号这三种数学语言的能力，即整体认识几何模型，用三种数学语言对之综合描述，并能由一种描述转化为其他描述的能力；需要体会和运用转化的思想方法，善于将空间问题转化为平面问题来处理.

本章将在初中几何知识的基础上，进一步研究有关立体图形的基础知识，研究对象主要包括最基本的立体图形——空间的直线、平面和简单几何体，研究内容主要是这些对象的几何性质、位置关系和判定、画法、度量计算以及相关的应用等.

一、空间直线和平面

9.1 平 面

本节内容是全章的基础.因此,掌握三个公理及三个推论并熟知它们的功能,是学习本节的重点,它可以为今后的推理论证奠定坚实的理论基础,所以也是学好本章的关键.

掌握证明点共线,线共点,点共面,线共面等问题的思路与方法,并能从中体会如何使立体几何问题向平面几何问题转化的"降维法",是本节学习的又一个重点,同时也是一个难点.

理解反证法证明命题的思路,注重命题论证中的严密性及符号语言的表述也是十分重要的.

所以,我们有必要花功夫学好本节的内容,为本章今后的学习打好扎实的基础.

☞课程标准要求

掌握平面的概念、平面的基本性质.

本节内容在高考中不单独考查,往往结合其他内容一起考查,如求角、距离,大都转化到同一平面上,用平面几何知识解决,因此要对公理的条件、结论、功能进行分析、理解,借助实例反复验证,使其成为一种强烈意识.高考中注重考查三种形式的数学语言即图形、文字、符号的描述以及三者之间相互转换的能力,达到对学生空间想象力考查的目的.共面、共线、共点问题是考查的重点.

预测今后高考中对本节知识考查时会设置开放性问题.

☞教材解析

1.平面

(1)平面的概念

常见的桌面、墙面、平静的水面以及球场等,都给我们以平面的形象,但是并不能说它们就是平面.原因是这些面是有大小、厚薄之分的,我们几何里所说的平面是从这些物体中抽象出来的,既无大小又无厚薄,且可以无限延展的.

另外平面与平面几何中的平面图形也是不同的:平面图形如三角形、平行四边形等有大小之分.而平面是无大小可言、可无限延展,或者说平面任你想象成有多

大，它就有多大，类似于直线可以无限延伸，平面具有无限延展性. 因此，我们可以认为桌面、墙面、平静的水面及球场等都是平面的局部形象.

至此，我们可以说，平面是一个只描述而不定义的最基本的原始概念，平面是无限延展的，因此它没有边界，也没有面积.

【例 1】 在下列各种面中，不能认为是平面一部分的应该为 (　　)

A. 黑板面　　B. 乒乓球桌面

C. 篮球的表面　　D. 盆中的水面

思路点拨　平面有两个特征：一是“平”；二是“无限延展”. 而作为平面的一部分，只需“平”即可，由此我们已经可以作出正确选择了.

解：根据上述分析，我们可以发现：黑板面、乒乓球桌面、盆中的水面均可作为平面的一部分. 而篮球的表面是一个曲面，不能作为平面的一部分. 故应选择 C.

误点剖析　易误选 D. 而事实上，盆中的水应该是平静的. 因此，盆中的水平可作为平面的一部分.

评注：上述所说的黑板面、乒乓球桌面及平静的水面只是平面的一部分，并不是真正的平面.

试解相关题

1—1　在下列各种面中，是平面一部分的为 (　　)

A. 课桌面　　B. 被台风猛刮下的湖面

C. 常见的山坡　　D. 圆柱形茶杯的侧面

【例 2】 下列命题中，正确的命题有 (　　)

A. 墙面是平面

B. 3 个平面重叠起来，比 2 个平面重叠起来厚

C. 一个平面的长是 200 cm，宽是 100 cm

D. 平面是平滑的，无厚度的，可以无限延展的，只描述不定义的数学概念.

思路点拨　应和例 1 一样，利用平面的两个特征进行判定.

解：平面是无限延展的，无厚薄之分的，而 D 符合描述平面的两个特征，是正确的. 故应选择 D.

误点剖析　由于在现实生活中接触到的“平面”(如桌面、平整的球场等)，其实均为平面的一个局部. 因此，易误认为 A 或 C 是正确的. 故这里要作出正确的选择，就需真正理解平面概念中的“既无大小又无厚薄，且可以无限延展”的本质.

评注：和直线的概念一样，平面的概念只有描述没有定义，是一个原始概念.

试解相关题

2－1 给出以下结论：

①长为 a，宽为 b 的矩形是面积为 ab 的平面；

②圆锥形漏斗的侧面是平面的一部分；

③因为平展在桌面上的纸面是平面的一部分，且由于 300 页的书比 100 页的书厚，所以 300 个平面重叠起来，比 100 个平面重叠起来厚.

其中正确的结论共有 （ ）

A. 3 个　　B. 2 个　　C. 1 个　　D. 0 个

(2)平面的表示方法

我们无法将一个无限伸展的平面画在纸上，但可以选取它的一部分来表示它，并且将它想象成无限伸展的.

我们通常画一个平行四边形用来表示平面，但应注意以下两点：

①画表示平面的平行四边形时，通常将它的锐角画成 45°，横边为邻边的两倍.

必要时，我们可以把它伸展出来，如同在平面几何中画直线一样：直线是无限延伸的，但在画直线时却只能画出一条线段来表示直线.

②加“通常”两个字的意思，是因为有时根据需要也可用其他平面图形来表示平面，并不强求千篇一律. 例如用三角形、一般的四边形，甚至圆等平面图形来表示平面.

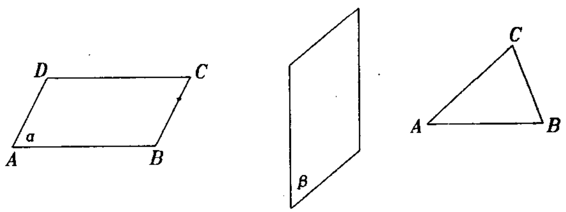


图 9.1-1

平面一般用希腊字母 α、β、γ…等表示，还可以用表示平行四边形的对角顶点的字母来表示. 例如图 9.1-1 中的平面 α、平面 β、平面 AC(或平面 $ABCD$)及平面 ABC.

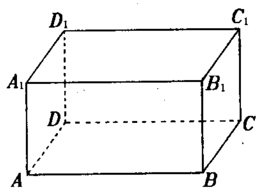


图 9.1-2

【例 3】 如图 9.1-2，已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，试将长方体的六个面(表面)所在平面一一表示出来.

思路点拨　可以利用平行四边形对角顶点的字母来表示.

解：平面 AB_1、平面 BC_1、平面 CD_1、平面 AD_1、平面

AC、平面 A_1C_1.

误点剖析　不能用一条棱上的两个端点表示平面. 例如，平面 AB 是不确定的. 因为，棱 AB 既在平面 AC 内，又在平面 AB_1 内. 故表示矩形所在平面时，应利用相对的两端点表示.

评注：也可以用每一个面的另一对对角顶点的字母表示，还可以表示成：平面 $ABCD$、平面 ABB_1A_1、平面 BCC_1B_1、平面 CDD_1C_1、平面 ADD_1A_1、平面 $A_1B_1C_1D_1$.

试解相关题

3－1　如图 9.1-3所示的几何体共有五个表面，试将它们一一表示出来.

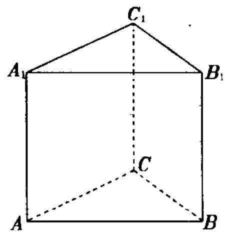


图 9.1-3

2. 平面的基本性质

在日常生活中，人们经过长期的观察与实践总结，对"平直"和"弯曲"这两种状态都有了直观的认识，进而也就产生了平面的基本性质. 下面我们就来研究平面的基本性质.

(1)三个公理

公理 1：如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上的所有点都在这个平面内.

说明：①公理 1 可用来检验某个物体的表面是否平整. 例如：木工常用曲尺来检查工件的表面是不是平的面时，常把曲尺的直角边紧靠在所要检查的面上任意滑动，若曲尺的直角边和面处处密不见缝，这个面就是平的；若曲尺的直角边和面有一处不能密合即见缝了，则这个面就不是平的，而且缝越大，这个面就越不平.

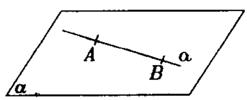


图 9.1-4

②公理 1 还可用来判断直线是否在平面内或证明若干条直线共面的问题，例如：若把细绳的两端拉直，两端点放在平的黑板面上，可以看到细绳就完全落在黑板面上.

③当直线 a 上的所有点都在平面 α 内，则称直线 a 在平面内或称平面 α 经过直线 a，并记作 $a\subset\alpha$ 或 $a\subsetneqq\alpha$. 如图 9.1-4 中，直线 a 在平面 α 内，可记作 $a\subset\alpha$. 又 $\because$ $A\in a, B\in a$，$\therefore$ 又可记作 $AB\subset\alpha$.

以后我们将借用集合中的符号："$\in$"、"$\subset$或$\subsetneqq$"、"$\not\subset$"、"$\cap$"等来表示点与直线，点与平面，直线与平面等的关系. 其读法与集合中的读法有所不同. 如 $A\in a$，读作：点 A 在直线 a 上；$A\notin a$，读作：点 A 不在直线 a 上；$a\subset\alpha$，读作直线 a 在平面 α 内；$a\not\subset\alpha$，读作直线 a 不在平面 α 内等.

【例 4】 若点 A 在直线 a 上，a 在平面 α 内，则 A、a、α 之间的关系可记为 ( )

A. $A\in a\in\alpha$ B. $A\in a\subsetneqq\alpha$ C. $A\subsetneqq a\subsetneqq\alpha$ D. $A\subsetneqq a\in\alpha$

思路点拨 要注意符号语言"$\in$"，"$\notin$"，"$\subseteq$"，"$\cap$"等源于集合中的符号，在理解上有着相同的地方.

解法 1:(直接法)

∵ 点 A 在直线 a 上，∴ $A\in a$.

∵ 直线 a 在平面 α 内，∴ $a\subsetneqq\alpha$.

∴ $A\in a\subsetneqq\alpha$.

∴ 应选 B.

解法 2:(排除法)

∵ 点 A 与直线 a 之间的关系是元素与集合之间的关系，

∴ 只能用符号"$\in$"或"$\notin$"表示，

∴ C、D 可以排除.

∵ 因为直线 a 与平面 α 之间是集合与集合之间的关系，

∴ 只能用符号"$\subseteq$"或"$\nsubseteq$"表示.

∴ A 应排除.

∴ 应选 B.

误点剖析 不能正确使用集合中的符号，没有理解元素与集合，集合与集合之间的关系符号的区别.

评注:对平面中的数学语言(符号语言、文字语言和图形语言)的正确理解直接关系到后面的学习，若不能正确理解，或理解的不深不透，则对后面的学习有着重大的影响.

试解相关题

4－1 用符号语言表示下列语句.

(1)点 A 在平面 α 内，但是在平面 β 外.

(2)直线 a 经过平面 α 外一点 M.

(3)直线 a 在平面 α 内，又在平面 β 内，即平面 α 与 β 相交于直线 a.

4－2 将下面用符号语言表示的关系用文字语言叙述出来，并且用图形语言表示出来.

$\alpha\cap\beta=m, A\in m, AB\subsetneqq\alpha, AC\subsetneqq\beta$.

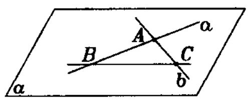


图 9.1-5

【例 5】 如图 9.1-5，已知 $a\subset\alpha, b\subset\alpha$，且 $a\cap b=A$，$B\in a, C\in b$，且 B、C 是异于 A 的两点. 求证：直线 $BC\subset\alpha$.

思路点拨　要证直线 $BC\subset\alpha$，根据公理 1 只要证 B、$C\in\alpha$.

证明：∵　$a\subset\alpha$，$B\in a$，∴　$B\in\alpha$.

同理 $C\in\alpha$.

∴　B、C 是平面 α 内的两点，

∴　根据公理 1 可知：直线 BC 上的所有点都在平面 α 内，即直线 $BC\subset\alpha$.

误点剖析　这里只要说清楚直线 BC 上的两点 B、C 在平面 α 内，则利用公理 1 获得直线 $BC\subset\alpha$ 就不会遇到困难.

评注：根据本例的结论可知：一个三角形，若它有两边在平面 α 内，则它的另一边也必在平面 α 内.

试解相关题

5－1　在下列各结论中，错误的是　（　　）

A. 三角形是平面图形

B. 圆是平面图形

C. 若抛物线 C_1 上两点在平面 α 内，则抛物线 C_1 上的所有点都在平面 α 内

D. 若椭圆 C_2 上有三点在平面 α 内，则椭圆 C_2 上的所有点都在平面 α 内

公理 2：如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线.

说明：①公理 2 反映了两个平面只要有一个公共点，就有无穷多个公共点，而且这些公共点都在同一直线上，反过来该直线上的任一点均为这两个平面的公共点.

也就是说，如果两个平面有一个公共点，它们就有过这一公共点的一条直线，也只有一条这样的直线.

②要理解并掌握公理 2，必须紧紧抓住平面在空间是无限延展的这一特征. 如，教室内相邻的墙面，在墙角处有一个公共点，它们就有过这个点的一条公共直线，这条直线也就是相邻两墙面所在平面的公共直线.

③当我们已知两个平面的一个公共点时，我们只知道这两个平面有一条公共直线，而不清楚这条公共直线的具体位置，当我们已知了两个平面的两个公共点时，这两点的连线就是公共直线. 这是作几何体截面时确定交线的理论依据.

相交平面与相交平面的画法：

①如果两个平面有一条公共直线，则称这两个平面相交，这条公共直线叫做两个平面的交线. 当两个平面相交时，称这两个平面为相交平面.

如图 9.1-6，平面 α 与 β 相交，交线是直线 a；平面 γ 与 δ 相交，交线是直线 b. 我们将它们分别记作：$\alpha\cap\beta=a$，$\gamma\cap\delta=b$.

②画两个平面相交,当其中一个平面被另一个平面遮住时,要把被遮住的部分画成虚线,也可以不画(这样可以增强立体感),如图9.1-6.

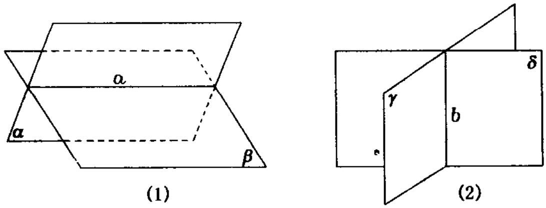


图 9.1-6

画图的具体步骤可分解为以下四步:

1°画两条相交线段,表示两个平面的平行四边形相交的两条边;

2°画两个相交平面的交线;

3°通过两相交线段的端点分别画出与交线平行且相等的线段,连结这些平行线段的端点,可以得到表示平面的两个平行四边形.

4°把被平面遮住的部分画成虚线(或者不画).

要注意,在我们以后作图时,只有被平面遮住部分的线才画成虚线,在解(证)题的过程中添加的辅助线,若被平面遮住,应画成虚线;否则画成实线.这与平面几何中添加辅助线是不同的.

【例 6】 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,画出平面 ABC_1D_1 与平面 A_1B_1CD 的交线.

思路点拨 根据公理 2,要确定两平面的交线,只需找到两平面的两个公共点即可.

解:如图 9.1-7,连结 AD_1 和 A_1D 交于 M,连结 BC_1 和 B_1C 交于 N. ∵ $M\in$ 直线 AD_1,$AD_1\subset$ 平面 ABC_1D_1,∴ $M\in$ 平面 ABC_1D_1. 又∵ $M\in$ 直线 A_1D,$A_1D\subset$ 平面 A_1B_1CD,∴ $M\in$ 平面 A_1B_1CD,从而 $M\in$ 平面 $ABC_1D_1\cap$ 平面 A_1B_1CD. 同理 N 点也是平面 ABC_1D_1 与平面 A_1B_1CD 的公共点. 连结 MN,根据公理 2,直线 MN 就是两平面的交线.

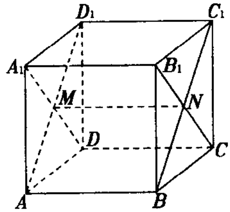


图 9.1-7

误点剖析 找不到平面 ABC_1D_1 与平面 A_1B_1CD 的两个公共点,就作不出这两个平面的交线.

评注:①不要把两个平面的公共点说成是两个平面的交点.

②要确定两平面的交线,关键在于确定两个平面的两个公共点. 其实公理 2 的

主要用途是用来证明多点共线的问题.

试解相关题

6—1 在如图 9.1-8 所示的几何体中,E、F、G 分别是所在棱 AB、AC、AD 上的中点.试作出平面 DEF 与平面 BCG 的交线.

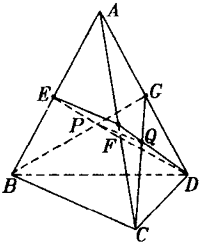


图 9.1-8

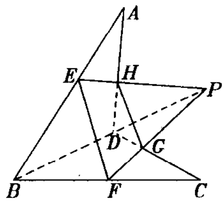


图 9.1-9

【例 7】 如图9.1-9,平面四边形 $EFGH$ 的四个顶点分别在空间四边形 $ABCD$ 的四边上,求证:若 EH 与 FG 所在的两直线相交于点 P,则点 P 必在 BD 所在的直线上.

思路点拨 要证明点 P 在 BD 上,只须证明点 P 既在平面 ABD 内,又在平面 BDC 内,则可得点 P 在平面 ABD 与平面 BDC 的交线上,即点 P 在直线 BD 上.

证明:∵ 点 P 是 EH 与 FG 的交点,∴ 点 P 既在直线 EH 上,也在直线 FG 上.而直线 EH、FG 分别在平面 ABD 和平面 BCD 内,∴ 点 P 既在平面 BCD 内,又在平面 ABD 内.故点 P 必在两平面的交线上,而平面 ABD 交平面 BCD 于 BD,∴ 点 $P\in BD$.

误点剖析 在本例进行证明时,若想不到论证点 P 是平面 ABD 与平面 CBD 的公共点,也就无法获得使本例得证的突破口.

评注:①证明点在线上时,通常先证明这个点既在某一平面上,又在另一个平面上,而此直线就是这两个平面的交线.

②公理 2 是确定两个平面是否相交的依据,它说明两个平面相交,交线是一条直线.要注意理解两个平面不存在只有一个公共点的情形,如果有公共点,则必定有无数多个公共点,且这些点恰好组成一条直线.

试解相关题

7—1 如图 9.1-10,已知 E、F、G、H 分别是空间四边形 $ABCD$ 所在边上的点,且满足$\frac{AE}{AB}=\frac{AH}{AD}=\lambda$,$\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\mu$,若 $\lambda\neq\mu$,得出下列结论: