

# 数学物理方法

## 学习指导与习题辅导

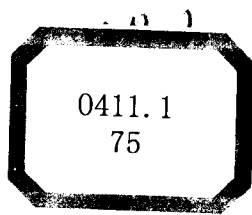
刘继军 编著

- 精选例题
- 背景注解
- 方法拓广
- 工程应用



科学出版社

[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)



# 数学物理方法 学习指导与习题辅导

刘继军 编著



科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书是一本面向大学本科生的数学物理方法课程的学习辅导材料。第1章,首先把本课程中将要用到的高等数学中的有关基本知识(如 Fourier 级数、常微分方程等)作了一个系统的总结和回顾,便于学生使用。在其余几章里,我们以分离变量法这一核心方法为主线,系统介绍了这门课程中的基本内容和方法。第2章讲有限区间上的分离变量法,第3章讲积分变换法,(仍然把它统一到分离变量法的框架下)。第4章讲无界区域上波动方程特有的行波法,并给出了它和有界区域上问题解的联系。第5章给出了工程上有重要背景的 Green 函数法,讨论了工程背景和数学基础。第6章仍然由具体物理问题的分离变量法引进特殊函数的有关理论和方法。第7章为精选的典型例题,并给出解法和评点。本书试图结合工科学生的知识背景来阐述数学物理方法的基本理论和方法,从一个新的角度对学生的学习提供一些帮助。

本书适合工科类及应用数学专业的本科生、研究生使用,也适合相关专业研究人员、工程技术人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法学习指导与习题辅导/刘继军编著。—北京:科学出版社,2006

ISBN 7-03-016806-2

I. 数… II. 刘… III. 数学物理方法-高等学校-教学参考资料 IV. O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006) 第 005073 号

责任编辑:姚莉丽/责任校对:张 琪

责任印制:张克忠/封面设计:陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

深海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2006年5月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2006年5月第一次印刷 印张: 14 1/4

印数: 1—4 000 字数: 277 000

定价: 21.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈路通〉)

## 前 言

数学物理方法是高等院校的一门重要专业基础课,是物理、无线电工程、动力工程、电子工程、自动控制等专业本科生的一门必修课.它前接大学本科的高等数学、数学分析等基础数学课程,后启电路信号系统等专业课程,是本科生迈向各自专业学习过程中的一门重要的课程.本课程中提出的一些思想,在后续专业课程中起着重要的作用.例如,Fourier变换的一个进一步推广就是工程中广泛应用的小波变换,分离变量法的背景就是线性信号系统中的叠加原理.基于本课程对工程理论研究的重要性,在一些相关专业,本课程一直是研究生入学考试的专业选修课之一.另一方面,由于本课程用到了较多的数学分析的基本内容,如常微分方程解的结构、无穷级数、Fourier级数等,对大学生的数学基础提出了很高的要求.近年来,随着高等院校专业教学方案的调整,各门课程的教学时数相对缩减.要在较短的课时内掌握课程的基本内容和方法,对学生而言有难度.

作者在东南大学对不同工科类专业的学生教授本课程已经十余年,期间尝试了不同类型和版本的教材,并与学习这门课程的本科生、工科研究生等进行了广泛的交流.大家的一个普遍反映是,本课程对未来的专业课程确实非常重要,但由于需要的数学背景知识较多,学习难度很大.“课上能听懂,习题不会做”是很多同学的一个基本感受.希望在课堂上多讲一些例题则成为学生的一个普遍要求.但是由于课时的限制,完成教学大纲规定的教学内容已经非常紧张,例题习题的练习及一些相关内容的展开基本无法在课堂上进行.

为了解决教学中的上述矛盾,使学生真正掌握本课程的基本思想和方法,给学生提供一本课程学习的辅导教材供他们在课后自学使用,是一个有效的途径.和已有的一些相关的辅导教材和习题解答相比,作者在这本辅导教材的编写过程中进行了一些新的尝试,特别强调这门课程在工科学生本科学习中的纽带作用,而不仅仅是把它看成一些孤立的公式和方法的堆积.我们的努力可以归结为“消除畏惧感”,“增强归属感”,“激发求知欲”三句话.

首先,我们在本书的不同部分分别解释本课程中一些方法和已经学过的有关数学内容的联系,使学生有一些“似曾相识,原来如此”的感觉,认识到课程中的一些方法本质上只不过是已经学过的一些方法的推广,消除学生对课程学习的畏惧感.例如关于 Sturm-Liouville 特征值问题和线性代数课程中矩阵特征值问题的类比,关于积分变换的基本思想和中学里面引进的对数运算的思想的比较等.

其次,尽量给出课程中一些内容的工程背景以及与相关专业课程中有关方法的联系,增强学生对这门课程在专业上的归属感.本课程仅仅停留在数学层面上的教学和推导会给工科学生带来一定的困惑.在这本辅导材料中,我们重点解释了课程

有关内容和一些工程研究方法的联系, 而不去过分追究数学上的严密性. 由此就增强了学生学习该课程的积极性. 例如 Fourier 积分变换就是同一个信号在时域和频域上的研究, 由外加强迫力导致的工程系统共振的数学描述, 用分离变量法得到波动方程解的叠加和乐器的演奏效果的关系等.

最后, 希望本书能起到激发学生在数学上和工程领域中探索新问题、研究新现象的作用, 并在今后的专业课程学习中加以提高. 由于这门课程不完全是一门数学课程, 它在工程应用上的进一步发展可以引导学生进入其专业领域 (如计算电磁学等), 在数学上的进一步深入则导致了一般的偏微分方程的理论. 因此本书中给出的一些拓展材料, 如分离变量法对不定问题的应用, 一些变系数的微分方程的求解等, 对工科学生, 甚至对数学专业的学生都会激起他们进一步学习的求知欲望.

上面的努力体现在本书的许多注解、拓展和推广中. 为了让不同层次不同兴趣的学生有所选择, 我们把有关拓展的内容列在每一章的最后. 本书中的许多例题也是这种努力的一部分. 有些例题取材于现有的教材和辅导材料, 我们把它们一起列在本书的参考文献中, 不再一一指出, 同时对这些材料的作者表示感谢. 为了使学生了解这门课程学习的基本要求, 我们也选择了历年来东南大学各专业的部分考题甚至包含了一些研究生的入学试题, 给出了相应的解法和评点. 希望有关的评点, 能够有助于学生真正掌握课程的基本思想和方法. 做题目本身并不是目的, 而是通过练习对所学的知识有更系统深入的理解, 满足于“照葫芦画瓢”式的会做题目没有任何意义. 从这个意义上来说, 例题中的评注和分析可能比解题过程本身更重要. 需要指出的是, 最后一章的某些例题, 有相当的难度和综合性, 仅供有兴趣和学有余力的同学参考, 不是这门课程的基本要求. 另外, 考虑到现在的教学改革中, 有关复变函数的一些内容有些学校已经在高等数学课程中讲授过了, 所以本书没有讨论.

本书是基于作者历年来在东南大学数学物理方法课程教学中的讲稿形成的, 包含了作者的一些体会和想法, 有些内容和例题还是和东南大学数学系的同仁特别是管平教授、王明新教授共同讨论过的. 我的研究生导师王元明教授一直对我的教学和科研工作给予了大力的指导和支持, 本书也凝聚了他长期以来对我的教诲和帮助. 同时该工作得到了东南大学教务处工科课程建设基金的资助, 是教改项目“工科数学物理方法课程建设与改革”的一部分. 谨此致谢. 我的研究生黄标章、祝志栋对本书进行了仔细的校对, 在此一并致谢.

由于作者的学识和水平所限, 再加上成书的时间比较紧张, 缺点和不足在所难免, 敬请有关专家学者和广大读者给予指正.

刘继军

2005 年 12 月于东南大学

# 目 录

<b>第 1 章 预备知识</b> .....	1
1.1 常微分方程定解问题 .....	2
1.1.1 一阶常微分方程 .....	2
1.1.2 二阶常微分方程 .....	2
1.1.3 Euler 方程 .....	4
1.2 常微分方程的特征值问题 .....	5
1.2.1 常微分方程特征值问题的提法 .....	6
1.2.2 特征值问题的求解 .....	7
1.2.3 周期边界条件的特征值问题 .....	10
1.3 函数的 Fourier 级数展开 .....	11
1.3.1 周期函数的 Fourier 级数展开 .....	12
1.3.2 有限区间上函数的三角级数展开 .....	15
1.3.3 非周期函数的 Fourier 积分表示 .....	16
1.4 几个重要的积分公式 .....	18
<b>第 2 章 分离变量法</b> .....	24
2.1 基本方法与使用原则 .....	24
2.2 间接使用分离变量法 .....	31
2.2.1 特征函数展开法 .....	31
2.2.2 边界条件齐次化 .....	36
2.2.3 齐次化原理 .....	40
2.3 一般问题的分离变量法 .....	44
2.4 圆域上的定解问题 .....	48
2.4.1 极坐标下的 Laplace 算子 .....	48
2.4.2 圆域上的定解问题 .....	49
2.5 小结与进一步的解释 .....	55
<b>第 3 章 积分变换法</b> .....	58
3.1 两类基本的变换 .....	59
3.2 积分变换的若干性质 .....	64

3.3	广义函数及其积分变换 .....	69
3.4	应用积分变换法解定解问题 .....	73
3.5	方法拓展和小结 .....	78
<b>第 4 章</b>	<b>波动方程定解问题的行波法 .....</b>	<b>87</b>
4.1	行波法的基本思想 .....	87
4.2	行波法的物理意义 .....	92
4.3	半无界区域上的问题 .....	95
4.4	高维波动方程行波法 .....	101
4.5	方程的特征理论和分类 .....	107
4.6	进一步的讨论和推广 .....	113
<b>第 5 章</b>	<b>Green 函数法求解定解问题 .....</b>	<b>121</b>
5.1	方程解的积分表示及 Green 函数的引进 .....	121
5.2	Green 函数的求法和物理意义 .....	125
5.3	Green 函数的进一步推广 .....	129
5.4	Green 函数的一些专门求法 .....	136
<b>第 6 章</b>	<b>特殊函数及应用 .....</b>	<b>142</b>
6.1	引入特殊常微分方程的物理问题 .....	142
6.2	两类特殊函数的导出 .....	145
6.3	特殊函数的若干性质 .....	152
6.4	特殊函数的工程应用 .....	162
<b>第 7 章</b>	<b>例题选讲和评注 .....</b>	<b>169</b>
7.1	分离变量法典型例题 .....	169
7.2	积分变换法典型例题 .....	180
7.3	行波法典型例题 .....	192
7.4	Green 函数法典型例题 .....	200
7.5	特殊函数典型例题 .....	211
	<b>参考文献 .....</b>	<b>220</b>

# 第1章 预备知识

在高等数学课程中,我们已经学过了常微分方程定解问题的求解方法. 该类问题的特点有两个. 首先问题的待求量是未知的函数, 其次函数只有一个自变量. 而问题中给的定解条件(例如初始条件)则给出了唯一确定未知函数所需要的条件. 这类问题用物理的语言来描述, 其背景是很清楚的: 方程描述了一类物理现象满足的普遍规律, 而定解条件则是这类现象中的一个具体的特定现象应该满足的限制条件. 例如, 为了描述一个质点确定的自由落体运动, 除了需要给出质点的位移  $S(t)$  满足一般的二阶常微分方程

$$\frac{d^2 S(t)}{dt^2} = g$$

以外, 还需要给出质点的初始位移  $S(0)$  和初始速度  $S'(0)$ , 才能唯一确定一个位移函数  $S(t)$ .

由于常微分方程中的未知函数仅依赖于一个自变量, 这意味着所描述的物理现象只依赖于一个因素, 这对绝大部分的物理现象而言是不现实的, 或者说, 有相当一部分的物理现象不能用常微分方程来描述. 例如, 我们讲到温度, 必须指出在什么时间什么地点的温度才有意义, 或者说, 温度  $T$  依赖于时间  $(t)$  和地点  $(x)$  两个因素, 记为  $T(x, t)$ . 更精确地说, 指定空间一个点  $x$ , 我们需要三个分量, 即  $x = (x_1, x_2, x_3)$ . 因此现实中的温度场  $T$  是  $(x_1, x_2, x_3, t)$  的四元函数. 要客观描述现实中的温度场, 就必须考虑这种多元函数所满足的微分方程及相应的定解条件. 由于对多元函数求导必须指明是对哪一个变量求导, 因此这类微分方程中出现的导数就是偏导数. 含有未知多元函数及其偏导数的方程称为偏微分方程.

数学物理方程是研究几类特殊的偏微分方程定解问题求解方法的课程, 这些问题都有着明确的物理背景. 大体上分为三类: 热传导方程、波动方程、Poisson 方程. 前两类方程讨论的是与时间有关的物理量的分布规律, 称为发展(瞬态)方程, 最后一类方程讨论的是与时间无关的物理量的分布, 称为稳态方程.

我们已经解释过, 数学物理方程求解的困难之一是其未知函数是一个多变量的函数. 对常微分方程而言, 由于未知函数只有一个自变量, 我们已经学过了一些求解方法. 因此一个很自然的想法就是, 能否把要讨论的关于多元函数的数学物理方程转化为“一系列”的关于单变量函数的常微分方程来求解? 事实上, 这个想法将贯穿于这门课程的始终, 如何转化及转化后问题的解与原问题解的关系是这门课程的两个核心问题. 分离变量法和积分变换法解决了如何转化的问题, 线性叠加原理则给出了由转化后一系列问题的解求原问题解的方法.



因此常微分方程的求解方法在数学物理方法这门课程中起着基本的作用. 在这一章里, 我们首先给出常微分方程定解问题求解的有关结论和公式, 具体的证明细节可以在以前学过的高等数学或数学分析教材中找到.

## 1.1 常微分方程定解问题

在数学物理方程这门课程中, 主要用到一阶和二阶系数的常微分方程定解问题的解法以及一类特殊的变系数二阶常微分方程——Euler 方程的解法. 我们把它们的求解方法罗列如下.

### 1.1.1 一阶常微分方程

我们从一阶常微分方程定解问题

$$\begin{cases} y'(x) + p(x)y(x) = f(x), & x \in (a, b), \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad (1.1.1)$$

的解法开始. 在方程两边同乘以  $e^{\int_a^x p(s)ds}$ , 则方程化为

$$\frac{d}{dx} \left[ y(x)e^{\int_a^x p(s)ds} \right] = f(x)e^{\int_a^x p(s)ds}.$$

在  $[0, x]$  上积分此方程并利用 (1.1.1) 中的边界条件即得

$$y(x) = e^{-\int_a^x p(s)ds} \left[ y_0 + \int_a^x f(z)e^{\int_a^z p(s)ds} dz \right]. \quad (1.1.2)$$

如果  $f(x) = 0$ , 则 (1.1.2) 对不同的  $y_0$  可以看成是 (1.1.1) 中齐次方程的通解. 而当  $y_0 = 0$  时, (1.1.2) 表示的是 (1.1.1) 中方程的一个特解. 因此这个简单的一阶方程的例子已经说明了非齐次线性方程解的结构: 非齐次线性方程的通解等于齐次线性方程的通解加上非齐次线性方程的一个特解.

如果  $p(x) = p_0$  是常数, 则 (1.1.2) 可以简化为

$$y(x) = e^{-p_0(x-a)} y_0 + \int_a^x e^{-p_0(x-z)} f(z) dz, \quad (1.1.3)$$

这种形式的解在热传导方程的分离变量法中是要用到的.

### 1.1.2 二阶常微分方程

非齐次的二阶常数系数常微分方程在数学物理方程求解的分离变量法中起着重要的和基本的的作用. 考虑下面的一般问题

$$\begin{cases} y''(x) + py'(x) + qy(x) = f(x), & x \in (a, b), \\ y(a) = y_0, \quad y'(a) = y_1, \end{cases} \quad (1.1.4)$$

其中  $p, q$  均为常数.

求解这个问题分为两个步骤: 首先求出 (1.1.4) 中微分方程的通解, 再利用 (1.1.4) 中在  $x = a$  的条件来确定通解中的两个任意常数.

第一步: (1.1.4) 中微分方程的通解可以表示为

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y^*(x), \quad (1.1.5)$$

其中  $y_1(x), y_2(x)$  是对应的齐次方程

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0 \quad (1.1.6)$$

的两个线性无关的特解,  $y^*(x)$  是原非齐次方程

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = f(x) \quad (1.1.7)$$

的一个特解. 值得指出的是,  $y_1(x), y_2(x)$  和  $y^*(x)$  都不是唯一的.

第二步: 一旦取定了 (1.1.5) 中的  $y_1(x), y_2(x), y^*(x)$ , 就可以用 (1.1.4) 中的条件来确定 (1.1.5) 中的两个常数  $C_1, C_2$ , 从而得到 (1.1.4) 的解.

先给出如何求  $y_1(x), y_2(x)$ , 它本质上依赖于  $p, q$  的关系. 这里给出的是  $y_1(x), y_2(x)$  的一个常见的形式. 记方程

$$r^2 + pr + q = 0$$

的两个(复)根为  $r_1, r_2$ . 有下面的结果:

- 如果  $p^2 - 4q > 0$ , 则可取  $y_1(x) = e^{r_1 x}, y_2(x) = e^{r_2 x}$ ;
- 如果  $p^2 - 4q = 0$ , 则可取  $y_1(x) = e^{r_1 x}, y_2(x) = x e^{r_1 x}$ ;
- 如果  $p^2 - 4q < 0$ , 则可取

$$y_1(x) = e^{\Re(r_1)x} \cos(\Im(r_1)x), \quad y_2(x) = e^{\Re(r_1)x} \sin(\Im(r_1)x),$$

其中  $\Re(r_1), \Im(r_1)$  分别表示复数  $r_1$  的实部和虚部系数.

在  $p = 0, q = n^2 > 0$  的条件下, 我们有

$$y_1(x) = \cos nx, \quad y_2(x) = \sin nx. \quad (1.1.8)$$

这个结果在分离变量法中是经常要用到的.

再来求 (1.1.7) 的一个特解  $y^*(x)$ , 我们可以采用常数变易法来求. 把 (1.1.6) 的通解表达式

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

中的常数  $C_1, C_2$  变为  $x$  的函数, 设  $y^*(x)$  有形式

$$y^*(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x), \quad (1.1.9)$$

下面来给出确定  $C_1(x), C_2(x)$  的一种方法即可, 因此  $C_1(x), C_2(x)$  的选择有一定的自由度. 由于

$$y^{*'}(x) = C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x),$$

我们要求  $C_1(x), C_2(x)$  满足

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0. \quad (1.1.10)$$

在此条件下再把 (1.1.9) 代入到 (1.1.7), 并利用  $y_1(x), y_2(x)$  满足 (1.1.6) 得到

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \quad (1.1.11)$$

解线性方程组 (1.1.10), (1.1.11) 即得到  $C_1'(x), C_2'(x)$ , 再积分一次即得到  $C_1(x), C_2(x)$ .

**注解 1.1.1** 求解 (1.1.4) 时, 对应齐次方程 (1.1.6) 的两个线性无关的特解起着关键的作用. 这种重要性表现在两个方面. 一是可以将非齐次方程 (1.1.7) 的通解表示为 (1.1.5) 的形式, 再就是可以进而用常数变易法求出其一个特解  $y^*(x)$ . 另一方面, 由于  $y_1(x), y_2(x)$  是线性无关的, 方程组 (1.1.10), (1.1.11) 一定是可解的.

**注解 1.1.2** 由于我们只要求非齐次方程 (1.1.7) 的一个特解  $y^*(x)$ , 它当然是不唯一的, 有很多可能的选择. 因此我们可以假定 (1.1.10), 并且在由  $C_1'(x), C_2'(x)$  求  $C_1(x), C_2(x)$  时的任意常数也可以任意给定.

### 1.1.3 Euler 方程

我们已经讨论了二阶常系数常微分方程通解的求解方法. 总可以将方程的通解至少用已知函数的积分表示出来. 但是如果方程的系数是变系数的 (即也依赖于自变量), 则我们不一定能把方程的解用已知函数显式表达出来. 但是对某些特殊的变系数的常微分方程, 仍然可以借助于一些变换, 给出解的显式表达, 例如下面要介绍的 Euler 方程. 这个方程在讨论圆域上 Laplace 方程边值问题的分离变量法时将会出现.

下面的方程

$$x^2 y''(x) + axy'(x) + by(x) = f(x) \quad (1.1.12)$$

称为二阶 Euler 方程, 其中  $a, b$  都是常数.

这个方程是变系数的, 但是有一定的特殊性. 具体地说, 二阶、一阶、零阶导数项的系数分别是  $x^2, x^1, x^0$ . 如果回忆一下多项式函数的求导法则, 就可以看到, 假

定  $y(x)$  是多项式, 则方程左端仍然是和  $y(x)$  同阶数的一个多项式. 因此如果  $f(x)$  是多项式, 我们就可以期望一个与  $f(x)$  同阶数的多项式作为方程的一个特解.

对一般的  $f(x)$ , (1.1.12) 不一定有多项式解, 但仍然可以通过下面的变换求出通解. 这种方法的可行性来源于该方程的特点.

作自变量代换  $x = e^t$ , 并记  $y(x) = y(e^t) := Y(t)$ . 则由复合函数的求导得到

$$y'(x) = Y'(t)t'(x) = \frac{1}{x}Y'(t), \quad y''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}Y'(t)\right) = -\frac{1}{x^2}Y'(t) + \frac{1}{x^2}Y''(t).$$

将此表达式代入 (1.1.12) 得新函数  $Y(t)$  满足的方程是

$$Y''(t) + (a-1)Y'(t) + bY(t) = f(e^t). \quad (1.1.13)$$

这个方程具有 (1.1.7) 的形式, 我们总可以用 1.1 节的方法求出其通解  $Y(t)$ . 最后得到  $y(x) = Y(\ln x)$ .

(1.1.12) 的一个特例是

$$\rho^2 P''(\rho) + \rho P'(\rho) - \lambda P(\rho) = 0, \quad (1.1.14)$$

其中自变量  $\rho > 0$ ,  $\lambda = n^2 \geq 0$  是一个常数. 记该方程的通解为  $P_n(\rho)$ . 用上面的方法可以求出

$$P_n(\rho) = \begin{cases} c_0 + d_0 \ln \rho, & n = 0, \\ c_n \rho^{-n} + d_n \rho^n, & n > 0. \end{cases} \quad (1.1.15)$$

方程 (1.1.14) 将出现在圆域上 Laplace 方程边值问题的分离变量法中.

**注解 1.1.3** 在数学物理方程中将要讨论的另外两个特殊的变系数的二阶常微分方程是

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0, \quad \nu \geq 0, \quad (1.1.16)$$

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \nu(\nu+1)y(x) = 0, \quad |x| < 1, \quad (1.1.17)$$

分别称为  $\nu$  阶 Bessel 方程和  $\nu$  阶 Legendre 方程. 请将这两个方程分别和 (1.1.12) 比较. 容易看出, (1.1.17) 具有和 (1.1.12) 类似的结构, 它可能存在一个非零的多项式解. 而 (1.1.16) 则不然, 不可能有非零的多项式解. 把这里使用的分析多项式次数的方法推广后用于求 (1.1.16) 和 (1.1.17) 的特解, 就得到了数学物理方程中的另一类重要内容: 特殊函数. 我们将在后面深入讨论.

## 1.2 常微分方程的特征值问题

二阶常微分方程的特征值问题在分离变量法中起着关键的作用. 对广大同学而言则是一个全新的概念. 这里我们给出这类问题的明确解释.

### 1.2.1 常微分方程特征值问题的提法

对二阶常系数常微分方程的边值问题而言, 如果方程和边界条件都是给定的, 则我们知道, 该边值问题是可以求解的. 考虑下面给定的问题:

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = f(x), & x \in (0, l), \\ y(0) = y_0, y(l) = y_1. \end{cases} \quad (1.2.1)$$

对给定的常数  $\lambda, y_0, y_1$  和函数  $f(x)$ , 一定可以用 1.1 节介绍的方法求出其唯一解. 当然对常数  $\lambda > 0, \lambda = 0, \lambda < 0$  三种不同的情形, 由 1.1 节的结果, 我们知道其解的性质是完全不同的. 特别, 如果  $f(x) \equiv 0, y_0 = y_1 = 0$  (称为齐次方程和齐次边界条件), 则不论常数  $\lambda$  的值如何,  $y(x) \equiv 0$  一定是 (1.2.1) 的一个解, 称为问题的零解. 换言之, 对一切的常数  $\lambda, y(x) \equiv 0$  都是问题

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = 0, & x \in (0, l), \\ y(0) = 0, y(l) = 0 \end{cases} \quad (1.2.2)$$

的一个解. 这种解没有什么意义, 通常称为平凡解. 现在的问题是, 有无常数  $\lambda$  使得该问题有非零解? 这样的  $\lambda$ , 就称为问题 (1.2.2) 的特征值, 相应的非零解, 称为对应于特征值  $\lambda$  的特征函数. (1.2.2) 称为特征值问题.

我们还可以考虑 (1.2.2) 中的零边界条件换为其它类型的零边界条件对应的特征值问题. 具体而言, 有下面三种类型的问题:

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = 0, & x \in (0, l), \\ y'(0) = 0, y(l) = 0, \end{cases} \quad (1.2.3)$$

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = 0, & x \in (0, l), \\ y(0) = 0, y'(l) = 0, \end{cases} \quad (1.2.4)$$

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = 0, & x \in (0, l), \\ y'(0) = 0, y'(l) = 0, \end{cases} \quad (1.2.5)$$

问题同样是确定常数  $\lambda$ , 使得相应的问题有非零解.

**注解 1.2.1** 其实, 特征值和特征函数的概念我们并不是第一次学习, 只不过微分方程的特征值问题是第一次遇到罢了. 回忆在线性代数课程中的关于  $n$  阶方阵  $A$  的特征值的如下定义: 如果方程  $Ax = \lambda x$  有非零解  $x \in \mathbb{R}^n$ , 就称  $\lambda$  为矩阵  $A$  的特征值, 相应的  $x$  就称为对应于特征值  $\lambda$  的特征向量.

让我们来改写一下 (1.2.2) 有非零解的叙述. 用记号  $A$  来表示对函数求二阶导数的运算 (称为二阶微分算子), 即  $A := -\frac{d^2}{dx^2}$ , 并规定  $A$  作用于下面的函数集合上 (称为算子  $A$  的定义域):

$$\text{Domain}(A) := \{y(x) : y(x) \in C^2(0, l), y(0) = y(l) = 0\},$$

记号  $C^2(0, l)$  表示在  $(0, l)$  上二阶连续可导的函数的集合. 于是  $\lambda$  是 (1.2.2) 的特征值的定义可重新叙述如下.

**定义 1.2.2** 如果方程  $(Ay)(x) = \lambda y(x)$  有非零解  $y(x) \in \text{Domain}(A)$ , 则称  $\lambda$  是 (1.2.2) 的特征值.

这里方程中的未知量不再是一个数或者是有限维的向量, 而是一个函数, 因此上面定义中的方程是一种函数方程. 非零解  $y(x)$  是指  $y(x)$  不是零函数. 如果把这个定义和注解 1.2.1 中矩阵特征值的定义相类比, 马上可以看出它们是完全类似的. 唯一不同的是, 矩阵  $A$  与  $\mathbb{R}^n$  中向量的乘积运算改成了求导运算  $A$  作用于  $\text{Domain}(A)$  中的元素  $y(x)$  上. 注意到对给定的矩阵  $A$ , 它与向量的乘积运算是一种线性运算, 而对函数求二阶导数的运算也是线性运算, 因此我们可以把求矩阵  $A$  的特征值和求 (1.2.2) 的特征值统一看成是求对应的线性算子的特征值. 在这种更高一层的框架下来考虑特征值问题, 很容易就能理解在导出特殊函数中的方程 (1.1.16), (1.1.17) 时用到的一般的 Sturm-Liouville 特征值问题, 它同样是一类线性二阶微分算子的特征值问题, 只不过二阶微分运算更复杂一点罢了.

### 1.2.2 特征值问题的求解

理解了特征值问题的意义后, 我们就要考虑如何来求一个问题的特征值. 对矩阵  $A$  的特征值问题, 可以求解方程

$$|\lambda I - A| = 0 \quad (1.2.6)$$

来确定特征值  $\lambda$ , 其中  $I$  是单位矩阵,  $|\lambda I - A|$  是矩阵  $\lambda I - A$  的行列式. 之所以如此, 是因为  $\lambda$  满足  $|\lambda I - A| = 0$  和线性方程组  $Ax = \lambda x$  有非零解是等价的.

但是对于 (1.2.2) (或者 (1.2.3), (1.2.4), (1.2.5)) 的特征值问题, 没有类似于 (1.2.6) 的简单方程来直接确定特征值. 我们只有直接从特征值的定义出发, 来讨论什么样的  $\lambda$  能使得 (1.2.2) 有非零解. 由于我们已经介绍过如何求微分方程  $y''(x) + \lambda y(x) = 0$  的通解, 因此求特征值  $\lambda$  的过程可以分为三步:

- 对不同范围的  $\lambda$ , 给定微分方程的含有两个任意常数的通解;
- 由对应的边界条件确定任意常数得到定解问题的解;
- 确定  $\lambda$  的值, 使得到定解问题的解非零.

确定了特征值  $\lambda$  后, 相应的定解问题的非零解就是对应于该特征值的特征函数.

由于在大部分的教材上,都是以 (1.2.2) 为例进行讨论的,我们这里以 (1.2.5) 为例来给出求特征值 (特征函数) 的方法.

Case 1:  $\lambda < 0$ . 此时方程的通解是

$$y(x) = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}.$$

利用 (1.2.5) 中的边界条件得到

$$\begin{cases} -\sqrt{-\lambda}C_1 + \sqrt{-\lambda}C_2 = 0, \\ -\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}l}C_1 + \sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}l}C_2 = 0. \end{cases} \quad (1.2.7)$$

该方程组只有唯一的零解  $C_1 = C_2 = 0$ . 所以 (1.2.5) 在  $\lambda < 0$  时没有非零解. 换言之,  $\lambda < 0$  不是 (1.2.5) 的特征值.

Case 2:  $\lambda = 0$ . 此时方程的通解是  $y(x) = C_1 + C_2x$ . 利用 (1.2.5) 中的边界条件得到  $C_2 = 0$ ,  $C_1$  可以是任意常数. 因此  $\lambda = 0$  是 (1.2.5) 的特征值,  $y(x) \equiv C_1 \neq 0$  是对应的特征函数.

Case 3:  $\lambda > 0$ . 此时方程的通解是

$$y(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

利用 (1.2.5) 中的边界条件得到

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda}C_2 = 0, \\ -\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}l)C_1 + \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}l)C_2 = 0. \end{cases} \quad (1.2.8)$$

由第一个方程得到  $C_2 = 0$ . 代入第二个方程得到  $\sin(\sqrt{\lambda}l)C_1 = 0$ . 因为我们要求的是非零解, 故  $C_1 \neq 0$ . 因此  $\lambda > 0$  应满足  $\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0$ . 由此解出特征值是

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

对应的特征函数是  $y_n(x) = C_n \cos \frac{n\pi x}{l}$ .

对上述问题的已知的特征函数, 它的非零常数倍当然也是特征函数. 并且可以证明, 对任一个确定的特征值, 它对应的所有特征函数之间都只可能相差一个常数倍. 因此为简单起见, 把上面的非零常数  $C_0, C_n$  均取为 1. 从而得到下面的结论.

**定理 1.2.3** 对 (1.2.5), 其特征值是  $\lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ , 对应的特征函数是  $y_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{l}$ , 其中  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

对其他三类的边界条件, 可以用类似的步骤求出特征值和特征函数. 我们把 (1.2.2)~(1.2.5) 四类问题的特征值和特征函数的结果用表 1.1 给出.

表 1.1 四类问题的特征值和特征函数

问题	特征值	特征函数	$n$ 的取值
(1.2.2)	$\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$	$\sin \frac{n\pi x}{l}$	$n = 1, 2, 3, \dots$
(1.2.3)	$\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2$	$\cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$	$n = 0, 1, 2, \dots$
(1.2.4)	$\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2$	$\sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$	$n = 0, 1, 2, \dots$
(1.2.5)	$\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$	$\cos \frac{n\pi x}{l}$	$n = 0, 1, 2, \dots$

对方程  $y''(x) + \lambda y(x) = 0, x \in (0, l)$ , 还有一种是带有第三类边界条件的特征值问题, 它对应的物理现象的意义是在边界上介质与周围的介质有热交换: 交换热流量的大小与两种介质的温度差成比例. 这种特征值问题可以描述为

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = 0, & x \in (0, l), \\ y(0) = 0, \quad y'(l) + hy(l) = 0, \end{cases} \quad (1.2.9)$$

其中  $h > 0$ . 我们来求这个问题的特征值. 和前面同样的讨论知道  $\lambda \leq 0$  不是该问题的特征值. 记  $\lambda = \beta^2 > 0$ , 则方程的通解为

$$y(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x.$$

由  $y(0) = 0$  得  $C_1 = 0$ . 再由  $C_2 \neq 0$  及  $x = l$  的边界条件得  $\beta$  满足

$$\beta \cos(\beta l) + h \sin(\beta l) = 0.$$

记新变量  $\gamma = \beta l$ , 则  $\gamma$  满足下面的超越方程:

$$\tan \gamma = -\frac{1}{hl} \gamma. \quad (1.2.10)$$

虽然这个方程的根  $\gamma$  (它们关于原点对称的) 不能明显写出, 但是下面的事实是清楚的:

- (1) 方程有无穷多个正根  $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n < \dots$ ;
- (2)  $n \rightarrow \infty$  时  $\gamma_n \rightarrow \infty$ .

这些事实可以由方程 (1.2.10) 的图像解法得到, 见图 1.1. 很显然, 特征根  $\beta$  的分布也具有上面的两条性质. 从而 (1.2.9) 的特征根和特征函数为

$$\lambda_n = \left(\frac{\gamma_n}{l}\right)^2, \quad y_n(x) = \sin \frac{\gamma_n x}{l}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.2.11)$$



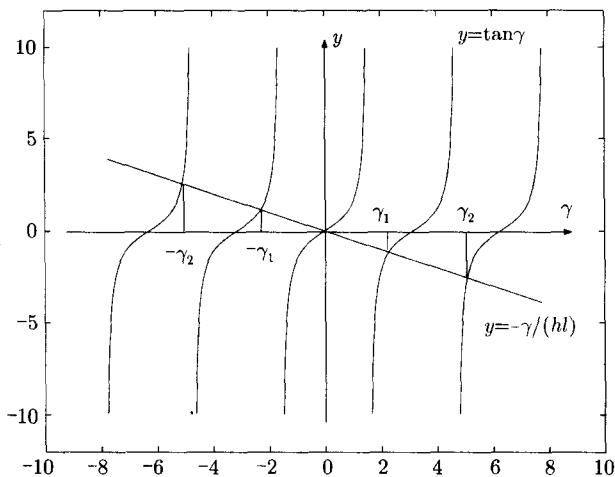


图 1.1 方程 (1.2.10) 的根分布

**注解 1.2.4** 在分离变量法中, 要将一个函数用特征函数系展开. 要使得这种展开成为可能, 必须用到全部的特征函数. 因此, 在求解上面的特征值问题时, 我们必须求出全部特征值和特征函数, 不能遗漏. 例如, 如果对特征值问题(1.2.5)只取  $n = 1, 2, \dots$ , 就把对应的特征值 0 和相应的特征函数 1 丢掉了.

**注解 1.2.5** 在表 1.1 中, 取  $n = 0, 1, 2, \dots$  还是  $n = 1, 2, \dots$  其实并不是关键的, 本质是必须求出全部的特征值和特征函数, 不能多也不能少. 例如, 如果把问题(1.2.3)的特征值和特征函数表示为  $\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right)^2$  和  $\cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l}$ , 则应该取  $n = 1, 2, \dots$ . 弄清楚这一点, 对后面分离变量法的级数展开式中的下标从  $n = 0$  还是  $n = 1$  开始, 是很有意义的.

**注解 1.2.6** 在讨论特征值问题(1.2.9)时, 通过对方程(1.2.10)的根分布的初等分析, 我们得到了特征值分布的两个重要结论. 如果进一步分析表 1.1, 我们知道这两个结论对其它的几个特征值问题也是成立的. 事实上, 这些结论对后面讨论的更一般的特征值问题也是成立的, 这就是一般的 Sturm-Liouville 问题的特征理论.

### 1.2.3 周期边界条件的特征值问题

前面讲了在四类不同的齐次边界条件下特征值问题的求解. 在数学物理方程课程中, 还有一类特征值问题, 称为周期边界条件的特征值问题.

考虑下面的二阶常系数常微分方程的求解问题:

$$\begin{cases} \Phi''(\theta) + \lambda\Phi(\theta) = 0, & \theta \in (-\infty, \infty), \\ \Phi(\theta) = \Phi(\theta + 2\pi), & \theta \in (-\infty, \infty). \end{cases} \quad (1.2.12)$$

这个问题和前面的特征值问题有一点不同: 自变量  $\theta$  不是定义在有限区间上, 因此