高等学校理工科数学基础

高等数学学习辅导与解题指南（下）

主　编　杜先能　孙国正
副主编　蒋　威　侯为波　祝东进

GAODENG SHUXUE XUEXI FUDAO YU JIETI ZHINAN

安徽大学出版社

高等学校理工科数学基础

高等数学
学习辅导与解题指南
（下）

主　编　杜先能　孙国正
副主编　蒋　威　侯为波　祝东进

安徽大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习辅导与解题指南·理工科．下/杜先能，孙国正主编．
合肥：安徽大学出版社，2006．3
ISBN 7-81110-112-2

Ⅰ．高... Ⅱ．①杜...②孙... Ⅲ．高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 021819 号

高等数学学习辅导与解题指南(下) 杜先能 孙国正 主 编

出版发行	安徽大学出版社 (合肥市肥西路 3 号 邮编 230039)	印 刷	中国科学技术大学印刷厂
		开 本	787×960 1/16
联系电话	编辑室 0551－5108438	印 张	23.5
	发行部 0551－5107784	字 数	395 千
电子信箱	ahdxchps@mail.hf.ah.cn	版 次	2006 年 3 月第 1 版
责任编辑	鲍家全 徐 建	印 次	2006 年 3 月第 1 次印刷
封面设计	张 犇	经 销	各地新华书店
ISBN	7-81110-112-2/O·56	定 价	32.00 元

如有影响阅读的印装质量问题，请与出版社发行部联系调换

前 言

微积分是理工科最重要的一门基础课.掌握得好,不仅有利于相关后续课程的学习,还对工作能力的培养有着至关重要的作用.

学习微积分,一方面要对一些重要的基本概念和基本定理做详细的分析,了解这些概念、定理的思想来源与意义;另一方面就是要通过一定量的习题加以巩固和理解,并且从练习当中提高知识运用能力和掌握各种数学思想方法.许多读者在学习微积分的过程中都会遇到这样的问题:上课都能听懂,拿到题目却无从下手.这个问题,其原因一方面是对基本概念和基本定理的理解不够透彻,对概念的思想、意义和定理、结论的条件理解不够深入;同时缺少对题目类型和方法的总结、归纳,因此拿到题目不会运用所学过的知识进行分析、解答.本书正是针对这一问题,按照高等数学的教学顺序,分章、同步对微积分的概念、定理、方法分别作详细的讲解与总结.

一　概念剖析

对微积分中的基本概念作进一步诠释,并结合具体的例子,指出理解这些概念需要注意的问题,以及思想由来与意义,帮助读者更深入地理解和掌握这些概念.

二　知识要点

对微积分中的定理和重要结论做进一步的探讨,着重分析了这些定理与结论所以成立的条件,指出其条件的必要性或充分性以及部分结论的推广,并给出具体例子加以说明.另一方面指出了它们的意义和作用,突出了定理的思想.

三　方法归类与例题选讲

对问题的类型及其解题方法作了较为全面的分析和总结,结合精选的典型例题和历年研究生入学考试(数一、数二)试题进行分析讲解.同时给出各种解法所适用题目的类型和特征.解题过程也做到了步骤详细,指出了其中所运用的知识点,帮助读者能尽快地学会用所学过的知识分析问题和解决问题.

四 数学实验

按照数学建模的思想宗旨,我们安排了这一部分内容,给出了微积分中部分计算相应的Matlab数学软件程序,并加以举例说明.培养读者的数学应用能力与学习兴趣.

五 知识延拓

对微积分学的理论基础与背景作简单介绍,以便读者了解整个微积分理论体系与思想来源,让读者不仅知其然,而且知其所以然.从而一方面可以拓展读者的知识面,另一方面可以提高读者的理论水平,加深对知识的理解.

本书在编写过程中参考了国内外一些著名的高等数学的教材和辅导用书,谨表示感谢!

本书配合《高等数学(下)》(高等学校理工科数学基础)(安徽大学出版社,2003)使用,可作为高等学校理工专业高等数学的教学参考书,也可作为考研的复习资料.

本书是在安徽大学数学与计算科学学院的领导下由鲍炎红同志执笔撰写.安徽大学数学与计算科学学院的许多教师对本书提出了宝贵的意见与建议.在此,一并表示感谢.

限于编者水平,加之时间仓促,书中错误和疏漏之处在所难免,敬请广大读者指正.

编者

2005年3月

目　录

第 9 章

空间解析几何

一 概念剖析

1. 空间直角坐标系 点的坐标

设 $Oxyz$ 为空间直角坐标系，点 P 为空间中任一点，点 P 的坐标为 (x,y,z).

注 1 三个坐标轴的正向必须符合右手规则. 常用的正向画法如图 9.1 所示.

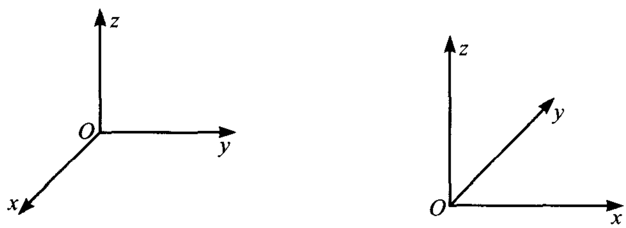

图 9.1

注 2 点 P 的坐标 (x,y,z) 是通过向坐标轴作投影得到的，显然点 P 在 xy 平面内的投影点的坐标为 $(x,y,0)$，对 z 轴的投影点的坐标为 $(0,0,z)$.（其他投影平面与坐标轴有类似的结论.）

注 3 点 $P(x,y,z)$ 在 x 轴上 $\Leftrightarrow y=0, z=0$.（y 轴和 z 轴上的点有类似的结论）.

点 $P(x,y,z)$ 在 xy 平面上 $\Leftrightarrow z=0$.（yz 平面和 zx 平面上的点有类似的结论.）

注 4 设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间任意两点，则 P_1，P_2 之间的距离为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

2. 空间曲面与曲线的方程

2.1 曲面的方程

(1)曲面的一般方程.

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中,曲面 S 的一般方程为 $F(x,y,z)=0$ 是指

(ⅰ)若点 P 在曲面 S 上,则点 P 的坐标 (x,y,z) 满足方程$F(x,y,z)=0$;

(ⅱ)若(x,y,z)满足方程 $F(x,y,z)=0$,则在空间坐标系中,坐标对应为(x,y,z)的点 P 一定在曲面 S 上.

注 1 为表示曲面 S,有时需要对方程 $F(x,y,z)=0$ 有所限制,如 $(x,y)\in D$ 或 $z\in I$. 例如,以原点为球心,以 R 为半径的球面的上半部分的方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2, z\geqslant 0$.

注 2 方程 $F(x,y,z)=0$ 称为曲面 S 的隐式方程. 有时可将方程 $F(x,y,z)=0$ 改写成 $z=f(x,y)$,称 $z=f(x,y)$ 为曲面 S 的显式方程.

注 3 验证曲面的方程时,必须同时验证满足上述的(ⅰ)(ⅱ)两条.

(2)曲面的参数方程.

设空间曲面 S 的参数方程为

$$\begin{cases} x=f(u,v) \\ y=g(u,v), (u,v)\in D \\ z=h(u,v) \end{cases}$$

其中 D 为 uv 平面内某一区域.

注 用参数方程表示曲面,即对任意点 $P(x,y,z)\in S$,存在$(u,v)\in D$,使得

$$\begin{cases} x=f(u,v) \\ y=g(u,v) \\ z=h(u,v) \end{cases}$$

反之,对任意$(u,v)\in D$,点 $P(f(u,v),g(u,v),h(u,v))\in S$.

2.2 曲线的方程

(1)曲线的一般方程(交面式方程).

设在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中,曲线 C 的一般方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$$

注 上述曲线的方程是将曲线 C 视为两个曲面(即曲面 S_1:

$F(x,y,z)=0$与曲面 S_2:$G(x,y,z)=0$)的交线,联立两个曲面方程得到曲线的方程,所以也称为交面式方程.因此,同一条曲线可以看作过该曲线的任何两个不同曲面的交线.

例如 x 轴既可以看成是平面 $y=0$ 与 $z=0$ 的交线,也可以看成是平面 $y+z=0$ 与 $z=0$ 的交线.换句话说,空间曲线的表示法是不唯一的.只要两个方程组等价(解集相同),它们就表示同一条曲线.

(2)曲线的参数方程.

曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t), t\in I \\ z=h(t) \end{cases}$$

其中 $I\subset\mathbf{R}$.

3. 向量及其坐标表示

向量是既有大小又有方向的量,也称为矢量.一般用小写黑体字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\cdots$表示.

注 1 几何直观上,向量可以用一定长度和一定方向的线段来表示,如图 9.2(a)所示,记为 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$.向量 $\boldsymbol{a}$ 是由起点 A 与终点 B 共同决定的,向量 $\boldsymbol{a}$ 与起点无关是指,对于任意一点 A,总存在一点 B,使得 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$.例如,在平行四边形 $ABCD$ 中,$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$,如图 9.2(b)所示.

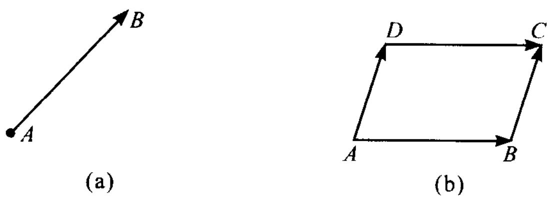

图 9.2

注 2 **零向量**是指长度为零的向量,通常记为 $\mathbf{0}$,约定零向量的方向是任意的.于是零向量与任意向量平行.

单位向量是指长度为 1 的向量.对于任何一个非零向量 $\boldsymbol{a}$,可以实施"单位化",即与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量 $\boldsymbol{e}_a=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

注 3 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 下,对于向量 $\boldsymbol{a}$,若以原点 O 为起点,A 为终点(即$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,注意到这样的点 A 是唯一的),将点 A 的坐标(a_1,a_2,a_3)定义为向量 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系 $Oxyz$ 下的坐标,记为 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$.其中向量 $\boldsymbol{a}$ 称为点 A 的定位向量,向量 $\boldsymbol{a}$ 称为点 A 的径向或

位置向量. 在引入向量的线性运算之后，我们有如下结论成立（注意到这也可以作为定义向量的坐标的另一种方法）：

设 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别为方向与 x,y,z 轴正向同向的单位向量（称为坐标向量或基本向量），$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，则

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}.$$

注 4　在直角坐标系 $Oxyz$ 下，点 A 与 B 的坐标分别为(a_1,a_2,a_3)，(b_1,b_2,b_3)，则向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$的坐标为$(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$.

注 5　设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，则

(1)向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度：$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$；

(2)与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量：$\boldsymbol{e}_a=\dfrac{1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}(a_1,a_2,a_3)$.

注 6　方向角与方向余弦

对于三维非零向量 $\boldsymbol{r}$，设 $\boldsymbol{r}$ 与坐标轴 Ox,Oy,Oz 的正向夹角分别为 α,β,γ，称 α,β,γ 为向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向角，并称 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦.

类似地，可以定义二维非零向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向角 α,β，以及方向余弦 $\cos\alpha,\cos\beta$.

设 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$的方向余弦，则

$$x=|\boldsymbol{r}|\cos\alpha,y=|\boldsymbol{r}|\cos\beta,z=|\boldsymbol{r}|\cos\gamma.$$

即 $\boldsymbol{r}=|\boldsymbol{r}|(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$.

从而

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

方向与 $\boldsymbol{r}$ 一致的单位向量为 $\boldsymbol{e}_r=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，$\alpha,\beta,\gamma$ 可完全确定向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向.

4. 向量的线性运算及其坐标形式

向量的加法、减法和数乘统称为向量的线性运算.

(1)加法：向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 是按三角形法则或平行四边形法则来定义的.

坐标形式 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$

(2)减法：向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 定义为 $\boldsymbol{a}$ 与 $-\boldsymbol{b}$($\boldsymbol{b}$ 的反向量)的和.

坐标形式 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$

(3)数乘：向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 按其长度、方向分两步来定义：

长度：$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；

方向：$\lambda \boldsymbol{a}$ 的方向 $\begin{cases}\lambda>0, \text{与 } \boldsymbol{a} \text{ 同向}, \\ \lambda=0, \text{零向量}, \\ \lambda<0, \text{与 } \boldsymbol{a} \text{ 反向}.\end{cases}$

坐标形式 $\lambda \boldsymbol{a}=(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$.

注 1 向量的线性运算，以及下面的数量积，向量积都是从几何角度来定义的，原始定义并没有用到坐标的概念. 但在建立直角坐标系之后，利用向量的坐标表示，得到各种运算的坐标形式，这给运算带来巨大的方便.

5. 向量的数量积

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos (\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$$

其中$(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

注 1 向量的数量积又称为内积、点乘. 数量积的结果是一个**实数.**

注 2 数量积的坐标形式　设 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$，则 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}=a_1 b_1+a_2 b_2+a_3 b_3$. 对于坐标向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 有

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i}=\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j}=\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}=1, \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j}=\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k}=\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i}=0.$$

注 3 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}=0 \underset{\Leftarrow}{\not\Rightarrow} \boldsymbol{a}=0$ 或 $\boldsymbol{b}=0$；

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}=\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} \underset{\Leftarrow}{\not\Rightarrow} \boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，即点乘不满足消去律.

$|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}| \leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，当且仅当 $\boldsymbol{a} / / \boldsymbol{b}$ 时等号成立.

注 4 一般来说，$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$，前者为平行于 $\boldsymbol{c}$ 的向量，而后者为平行 $\boldsymbol{a}$ 的向量.

注 5 数量积的运算性质

(1)对称性　$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}=\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$；

(2)线性性　$(\lambda \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$，

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}=\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}+\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$；

(3)正定性　$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \geqslant 0$，且 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a}=0$. 显然 $|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$，也记为 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$，但值得注意的是 $\boldsymbol{a}^3, \boldsymbol{a}^4$ 是没有意义的.

6. 向量的向量积

$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 按其长度、方向分两步来定义：

长度：$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin (\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$；

方向：$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 都垂直(等价于垂直于 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 决定的平面)，且

$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\}$满足右手规则.

注 1 向量积又称为外积,向量的叉乘.向量积的结果仍是一个向量.

注 2 向量积的坐标形式(行列式的定义与运算参阅附录 1)

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)$$

注 3 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$(即向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线)$\underset{\Leftarrow}{\not\Rightarrow}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}\underset{\Leftarrow}{\not\Rightarrow}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$,即叉乘不满足消去律;

$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$,当且仅当 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 时等号成立.

注 4 对于坐标向量有 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}$.

注 5 一般来说,$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.参阅五知识延拓 1.双重外积.

注 6 向量积的运算性质

(1)反对称性 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;

(2)线性性 $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$;

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}.$$

注 7 向量之间虽然可以作数量积和向量积,但数量积和向量积都没有逆运算,所以不可能有以向量作为分母的除法,绝不允许出现以向量为分母的情形.

例如,$\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}}=1(\boldsymbol{a}\neq 0)$是绝对错误的.

7.向量的混合积

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$$

注 1 混合积的结果是一个实数,其几何意义是:由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为邻棱的平行六面体的体积为$|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|$.显然当$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$满足右手规则时,$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})>0$,当$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$满足左手规则时,$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})<0$.

注 2 混合积满足轮换(按 $\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{c}\to\boldsymbol{a}$ 变换)对称性:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).$$

但$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$,即其中一个不动,另两个对换,则混合积

相差一个负号.

注 3　$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.

注 4　混合积的坐标形式

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

8. 常见曲面

(1)柱面.

平行于某一固定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 的轨迹称为柱面,其中动直线 L 称为母线,定曲线 C 称为准线.

注 1　以 xy 平面内的曲线 $C:\begin{cases}f(x,y)=0,\\ z=0\end{cases}$ 为准线,母线平行于 z 轴的柱面方程为

$$f(x,y)=0.$$

注 2　当曲面的方程中不显含 z 时(即 $f(x,y)=0$),则该曲面为以曲线 $C:\begin{cases}f(x,y)=0,\\ z=0\end{cases}$ 为准线,母线平行于 z 轴的柱面.(不显含 x 或 y 也有类似的结论).

注 3　柱面上准线是不唯一的.

注 4　以空间曲线 $C:\begin{cases}x=f(u),\\ y=g(u),\\ z=h(u)\end{cases}$ 为准线,母线方向为 $\boldsymbol{l}=(\alpha,\beta,\gamma)$ 的柱面的参数方程为

$$\begin{cases}x=f(u)+v\alpha,\\ y=g(u)+v\beta,\\ z=h(u)+v\gamma.\end{cases}$$

(2)锥面.

通过固定点 A 并沿定曲线 C 移动的直线 L 的轨迹称为锥面,其中动直线 L 称为母线,定曲线 C 称为准线,固定点 A 称为顶点.

注　以 $A(x_0,y_0,z_0)$ 为顶点,以空间曲线 $C:\begin{cases}x=f(u),\\ y=g(u),\\ z=h(u)\end{cases}$ 为准线的锥面的参数方程为

$$\begin{cases}x=x_0+v(f(u)-x_0),\\y=y_0+v(g(u)-y_0),\\z=z_0+v(h(u)-z_0).\end{cases}$$

(3)旋转曲面.

空间中,以一条平面曲线绕其所在平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面,平面曲线和定直线分别称为旋转曲面的母线和轴.母线上的点旋转所得的圆称为纬圆,过轴的半平面与旋转面的交线称为经线.

注 1 将 yz 平面内曲线 $\begin{cases}f(y,z)=0,\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转所得的旋转曲面的方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$. 绕 y 轴旋转所得的旋转曲面的方程为 $f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$.

注 2 将 xz 平面内的一条曲线 $C:\begin{cases}x=f(v),\\z=g(v)\end{cases}$ 绕 z 轴旋转所得的旋转曲面的参数方程为

$$\begin{cases}x=f(v)\cos u,\\y=f(v)\sin u,\\z=g(v).\end{cases}$$

(4)球面.

标准方程 $x^2+y^2+z^2=R^2,R>0$,

参数方程 $\begin{cases}x=R\sin u\cos v,\\y=R\sin u\sin v,\quad 0\leqslant u\leqslant\pi,0\leqslant v\leqslant 2\pi.\\z=R\cos u\end{cases}$

(5)椭球面.

标准方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1(a>0,b>0,c>0)$.

参数方程 $\begin{cases}x=a\sin u\cos v,\\y=b\sin u\sin v,\quad 0\leqslant u\leqslant\pi,0\leqslant v\leqslant 2\pi.\\z=c\cos u\end{cases}$

(6)双曲面.

①单叶双曲面.

标准方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1(a>0,b>0,c>0)$.

参数方程 $\begin{cases}x=a\sec u\cos v,\\y=b\sec u\sin v,\quad -\dfrac{\pi}{2}<u<\dfrac{\pi}{2},0\leqslant v\leqslant 2\pi.\\z=c\tan u\end{cases}$

②双叶双曲面.

标准方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1(a>0,b>0,c>0)$.

参数方程$\begin{cases}x=a\tan u\cos v,\\ y=b\tan u\sin v,\\ z=c\sec u\end{cases}$ $u\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right],v\in[0,2\pi]$.

(7)抛物面.

①椭圆抛物面.

标准方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z(a>0,b>0)$.

参数方程$\begin{cases}x=av\sin u,\\ y=bv\cos u,\\ z=\frac{v^2}{2}\end{cases}$ $0\leqslant u\leqslant 2\pi,-\infty<v<+\infty$.

注 单叶抛物面可视为由 xz 平面内的抛物线$\begin{cases}x^2=2a^2z,\\ y=0\end{cases}$将顶点沿 yz 平面内抛物线$\begin{cases}y^2=2b^2z,\\ x=0\end{cases}$平行移动的轨迹(两条垂直,开口方向一致的抛物线,将其中一个抛物线的顶点固定在另一个抛物线上,平行移动).

②双曲抛物面(马鞍面).

标准方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-2z(a>0,b>0)$.

参数方程$\begin{cases}x=a(u-v),\\ y=b(u+v),\\ z=2uv\end{cases}$ $-\infty<u<+\infty,-\infty<v<+\infty$.

注 双曲抛物面可视为由 xz 平面内的抛物线$\begin{cases}x^2=-2a^2z,\\ y=0\end{cases}$将顶点沿 yz 平面内抛物线$\begin{cases}y^2=2b^2z,\\ x=0\end{cases}$平行移动的轨迹.(两条垂直,开口方向相反的抛物线,将其中一个抛物线的顶点固定在另一个抛物线上,平行移动).

(8)二次柱面.

①圆柱面.

标准方程 $x^2+y^2=R^2$.

参数方程$\begin{cases}x=R\sin u,\\ y=R\cos u,\\ z=v\end{cases}$ $0\leqslant u\leqslant 2\pi,-\infty<v<+\infty$.

②椭圆柱面.

标准方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

参数方程$\begin{cases}x=a\sin u,\\ y=b\cos u,\\ z=v\end{cases}$ $0\leqslant u\leqslant 2\pi,-\infty<v<+\infty$.

③双曲柱面.

标准方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

参数方程$\begin{cases}x=a\sec u,\\ y=b\tan u,\\ z=v\end{cases}$ $0\leqslant u\leqslant 2\pi,-\infty<v<+\infty$.

④抛物柱面.

标准方程 $x^2=2py$.

参数方程$\begin{cases}x=2pu,\\ y=2pu^2,\\ z=v\end{cases}$ $-\infty<u,v<+\infty$.

(9)二次锥面.

标准方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0(a>0,b>0,c>0)$.

参数方程$\begin{cases}x=av\cos u,\\ y=bv\sin u,\\ z=cv\end{cases}$ $0\leqslant u\leqslant 2\pi,-\infty<v<+\infty$.

二　知识要点

1. 利用运算讨论向量之间的关系

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 均为非零向量,λ,μ 为实数,

(1)$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 的条件(也可用于讨论三点共线问题):

①$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$;

②若 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$,则$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$;

③$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$;

④$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.

(2)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的条件:

①$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$;

②$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\Rightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$;