高职高专"十一五"规划教材

● 公共基础课系列

应用数学

（理工类）上册

总主编 李华 王小军

本册主编 王豪 王小军

数学是研究数量关系与空间形式的一门科学。学习数学有助于提高学生分析问题和解决问题的能力、抽象思维的能力、空间图形想象的能力。本书根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》编写，突出"以学生发展为本"的教育思想，以"必需、够用、好用、实用"为原则，讲解了函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程等内容。

大象出版社

高职高专“十一五”规划教材·公共基础课系列

应·用·数·学

（理工类）

上册

总 主 编　李　华　王小军
本册主编　王　豪　王小军

大象出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用数学.上册:理工类/李华,王小军主编;王豪,
王小军分册主编.—郑州:大象出版社,2006.9
高职高专"十一五"规划教材.公共基础课系列
ISBN 7-5347-4287-0

Ⅰ.应... Ⅱ.①李...②王...③王...④王...
Ⅲ.应用数学-高等学校:技术学校-教材
Ⅳ.029

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第105901号

本书编委会名单

责任编辑 王小军(特约)
责任校对 何 众
封面设计 杜晓燕
出 版 大象出版社(郑州市经七路25号 邮政编码450002)
网 址 www.daxiang.cn
发 行 全国新华书店
印 刷 河南第一新华印刷厂
版 次 2006年9月第1版 2006年9月第1次印刷
开 本 787×1092 1/16
印 张 13.25
字 数 304千字
印 数 1—7 200
定 价 18.20元
若发现印、装质量问题,影响阅读,请与承印厂联系调换。
印厂地址 郑州市经五路12号
邮政编码 450002 电话 (0371)65957860-351

前 言

本套教材是根据教育部颁布的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，组织了河南省内十多所高职院校负责教学工作的领导和多年从事一线教学的教师，经过深入探讨，结合省内高职院校所设专业、学生特点以及教育教学的特点而编写的。

教材突出“以学生发展为本”的教育思想，以“必需、够用、好用、实用”为原则，以培养学生良好的学习习惯、培养学生的创新精神为目的。

教材在编写时注意了以下问题：

1. 考虑到目前高职院校学生的数学基础以及各校基础课程学时数普遍压缩的实际情况，教材编写把握“够用”的原则，不过分强调数学体系的系统性，删去不必要的推导、证明，强调结论、定理的应用；删去在现实生活中、专业学习中涉及不多的内容，突出实际应用。

2. 教材在编写时注意适合大多数教师的教学习惯，同时也便于学生预习，便于自学。

3. 教材在知识点、基本概念的引入、公式结论的应用中注意从实际问题出发，使同学们认识到数学不仅仅是算题，而且可以解决我们身边的很多实际问题。同时还注意为专业课服务，尽量采用专业课所涉及的实例。

4. 考虑到省内高职院校所开设专业的多样性，不同专业对教学的内容、对数学能力的要求也不相同，因此，教材在内容上可供选择的弹性较大，打 * 号的章节可供不同专业选择，有些节中的某个知识点也可供各使用学校在编写教学计划中取舍。

教材在对数学能力的不同要求上也予以考虑。考虑到有的同学基础较好，今后有进一步深造的要求，教材在例题与习题的配备上也编入一些专升本考试中常见的题型，供学有余力的同学阅读，培养这些同学的解题能力。

本套教材分上、下两册。上册内容有：函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程等。大约80学时，供工科类、经济类专业第一学期使用。下册

内容有:空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、二重积分及其应用、曲线积分、级数、线性代数初步、概率统计初步等,供对数学要求较多的专业第二学期选用。

本套教材适合高职高专院校工科类的专业使用。同时高职高专院校经济类的专业、五年制大专以及"3 +2"大专学生学习高等数学课程时也可选用。

本书由李华、王小军任总主编,王豪、王小军任本册主编,张青娥、张晓华任副主编。第一章 1 ~4 节由张晓华编写,第 5 节由王豪编写;第二章由于红霞编写;第三章由卢伟明编写;第四章、附录由马建军编写;第五章、第六章由张青娥、王豪共同编写;第七章由张中灿编写。

参加上册统稿的有:李华,王小军,潘晓伟,陈侃。

在上册编写的研讨、统稿等环节,信阳职业技术学院给予大力的支持,做了大量的工作,在此表示衷心的感谢。

由于我们的水平所限,时间仓促,本教材难免有欠妥之处,敬请广大师生、读者批评指正。

作者

2006.7

目 录

第一章 函数、极限与连续
§1.1 函数 …… (1)
§1.2 极限 …… (11)
§1.3 无穷小量与无穷大量 …… (17)
§1.4 极限的运算 …… (20)
§1.5 函数的连续性 …… (27)
自测题一 …… (33)
第二章 导数与微分
§2.1 导数的概念 …… (36)
§2.2 导数的基本运算法则 …… (45)
§2.3 函数求导的方法 …… (50)
§2.4 高阶导数 …… (56)
§2.5 微分及其计算 …… (59)
自测题二 …… (64)
第三章 导数的应用
§3.1 微分中值定理 …… (67)
§3.2 洛必塔法则 …… (70)
§3.3 函数的单调性与极值 …… (76)
§3.4 函数图形的凹向性与拐点 …… (85)
*§3.5 导数在工程技术中的应用 …… (90)
自测题三 …… (94)
第四章 不定积分
§4.1 不定积分的概念和性质 …… (96)
§4.2 不定积分的基本公式和直接积分法 …… (99)
§4.3 换元积分法 …… (102)
§4.4 分部积分法 …… (108)
§4.5 几种特殊类型函数的积分及积分表的使用 …… (110)
自测题四 …… (117)
第五章 定积分
§5.1 定积分的概念 …… (119)
§5.2 定积分的性质 …… (123)
§5.3 微积分基本公式 …… (126)
§5.4 定积分的换元法 …… (132)

§5.5 定积分的分部积分法 …… (136)
§5.6 广义积分、* Γ 函数 …… (138)
自测题五 …… (144)
第六章 定积分的应用
§6.1 定积分的几何应用 …… (147)
*§6.2 定积分的物理应用 …… (160)
自测题六 …… (162)
第七章 常微分方程
§7.1 常微分方程的基本概念 …… (166)
§7.2 可分离变量的微分方程 …… (169)
§7.3 齐次微分方程 …… (171)
§7.4 一阶线性微分方程 …… (174)
§7.5 可降阶的高阶微分方程 …… (177)
§7.6 二阶常系数线性微分方程 …… (181)
§7.7 微分方程应用举例 …… (190)
自测题七 …… (195)
附录
积分表 …… (197)

第一章 函数、极限与连续

微积分是人类文明发展史上理性智慧的精华，它的出现，不仅使数学的面貌焕然一新，而且极大地推动了数学的发展，同时也推动了天文学、力学、物理学、化学、生物学、工程学、经济学等自然科学、社会科学及应用科学各个分支学科的发展，并在这些学科中有着越来越广泛的应用，特别是计算机的出现，更是有助于这些应用的不断发展.

微积分是微分学和积分学的合称，是高等数学的核心，是专门研究函数的数学分支，故本章进一步研究函数的问题.

§1.1 函数

函数是数学中最重要的基本概念之一，是现实世界中量与量之间的依存关系在数学中的反映，也是微积分学的主要研究对象. 本节将在中学数学已有函数知识的基础上进一步讨论函数概念，并介绍一些函数的简单性态.

一、函数的概念

1. 函数的定义

定义 1.1 设有两个变量 x 和 y，若当变量 x 在实数的某一范围 D 内任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的对应法则 f，有唯一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x),x\in D,$$

其中变量 x 称为**自变量**，变量 y 称为**函数（因变量）**，自变量 x 的取值范围 D 称为**函数的定义域**.

若对于确定的 $x_0\in D$，按照对应法则 f，函数 y 有唯一确定的值 y_0 与之相对应，则称 y_0 为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记作

$$y_0=y|_{x=x_0}=f(x_0),$$

函数值的集合称为函数的值域，记作 M.

显然，一个函数的值域由定义域 D 及对应法则 f 所完全确定，所以，函数的对应法则和定义域称为函数的两个要素.

例如，$f(x)=3x^2+2x-1$，函数 $f(x)$ 确定的对应法则为

$f(\quad)=3(\quad)^2+2(\quad)-1.$

例 1 设$f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$,求$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$,$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$,$f(x+1)$.

解 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1}=\dfrac{4}{5}$.

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}=\frac{x^2}{1+x^2}.$$

$$f(x+1)=\frac{1}{(x+1)^2+1}=\frac{1}{x^2+2x+2}.$$

例 2 设$f(x+1)=x^2+2$,求$f(x)$.

解 方法1:令$x+1=t$,则$x=t-1$,

所以 $f(t)=(t-1)^2+2=t^2-2t+3.$

所以 $f(x)=x^2-2x+3.$

方法2:$f(x+1)=x^2+2=(x+1-1)^2+2$

$=(x+1)^2-2(x+1)+3.$

所以 $f(x)=x^2-2x+3.$

已知变量x,y之间的函数关系为$y=f(x)$,则函数$y=f(x)$的定义域是使$y=f(x)$有意义的x的取值范围;若$y=f(x)$是由实际问题产生,那么函数$y=f(x)$的定义域由该实际问题确定.

所以,$y=x^2$的定义域是实数集$\mathbf{R}$.

一圆盘的半径为r,则其面积A为r的函数,

$$A=\pi r^2$$

考虑问题的实际意义,函数$A=\pi r^2$的定义域为$[0,+\infty)$(注意,定义域不是$\mathbf{R}$).

例 3 求函数$f(x)=\sqrt{2-x^2}+\lg(x+1)$的定义域.

解 当$2-x^2\geqslant 0$时,即 $|x|\leqslant\sqrt{2}$时,$\sqrt{2-x^2}$有定义.所以$\sqrt{2-x^2}$的定义域为$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

当$x+1>0$时,即$x<-1$时,$\lg(x+1)$有定义.所以$\lg(x+1)$的定义域为$(-1,+\infty)$.

当且仅当$\sqrt{2-x^2}$和$\lg(x+1)$同时都有定义时,函数$f(x)$有定义,所以,所求函数的定义域为:

$$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]\cap(-1,+\infty)=(-1,\sqrt{2}).$$

在函数定义中,对应法则用f表示,也可以用其他记号,如$g,h,F,\varphi,\cdots$来表示,所以y与x的函数关系,也可以记为$y=g(x)$,$y=h(x)$,$y=F(x)$,$y=\varphi(x)$,…但应注意,在同一场合,不同的函数应该用不同的记号.

确定一个函数,主要是对应法则和定义域,至于自变量和因变量用什么记号来表示无关紧要.只要定义域相同,f代表同一个对应法则,则$y=f(x)$和$u=f(v)$就是同一个函数.

如,$y=\dfrac{1}{2}x^2+1$与$s=\dfrac{1}{2}t^2+1$就是同一个函数.

2. 函数的表示法

函数可用三种不同的方法来表示：公式法、表格法、图像法.

公式表示法便于理论研究、推导论证、数值计算等，它的优点是形式简明，表达清晰、紧凑，缺点是抽象、不易理解. 表格表示法在设计、统计工作中常用，其优点是使用方便，如：对数表、三角函数表、天气预报中某地某年某月的最高气温统计表等. 它的缺点是不便于分析研究，也不直观. 图像表示法在工程中常用，例如生产的进度、仪器的记录等. 其优点是直观、形象，可直接从图形看出函数的变化.

例如，一质点从距地面高为 H 的高度自由下落，ts 钟后，下落的距离 s 与时间 t 有如下关系

$$s=\frac{1}{2}gt^2\left(0\leqslant t\leqslant\sqrt{\frac{2H}{g}}\right),$$

其中 g 为重力加速度. 此解析式就是区间 $\left[0,\sqrt{\frac{2H}{g}}\right]$ 上的一个函数.

二、分段函数

在电子技术中，经常会遇到一种矩形波（图 1－1），图中表示每隔 100μs 产生一个 10V 的电压脉冲，持续时间是 10μs. 电压 u 随时间 t 而变，在一个周期内，它们之间的依赖关系可以表示成

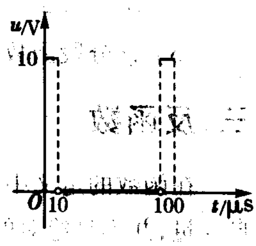


图 1－1

$$u=\begin{cases}10, & 0\leqslant t\leqslant 10,\\ 0, & 10<t<100.\end{cases}$$

像这样，自变量在不同定义区间上用不同的解析式表示的函数称为**分段函数**. 要注意本例是用两个式子表示的函数，而不是两个函数.

这个函数的定义域为 $[0,100)$.

下面列出几个数学上常用的分段函数：

（1）绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 为一分段函数，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，如 $|-2|=2$，$|3|=3$.

（2）符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 为一分段函数，其定义域为 $\mathbf{R}$. 如 $\operatorname{sgn}2=1$，$\operatorname{sgn}(-4)=-1$.

（3）取整函数 $y=[x]$，$x\in\mathbf{R}$. 表示“不超过 x 的最大整数”，如 $[1.2]=1$，$[0.7]=0$，$\left[-\frac{2}{3}\right]=-1$，等等. 其定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

例 4　请把由图 1－2 表示的函数用解析式表达出来.

$$s(t)=\begin{cases}2t, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ 2, & 1<t\leqslant 3,\\ 2(t-2), & 3<t\leqslant 5.\end{cases}$$

该函数 $s(t)$ 为一分段函数，它在不同的区间上用不同的解析式来表示对应法则，其定义域为 $[0,5]$.

分段函数需要分段求值、分段作图.

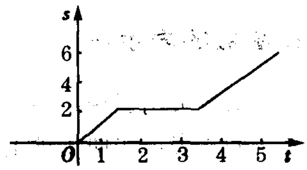


图 1－2

例 5 设有分段函数 $f(x)=\begin{cases}-1+x^2, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1+x^2, & x>0.\end{cases}$

求：(1) $f(x)$ 的定义域；

(2) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f(0)$, $f(-3)$；

(3) 作 $f(x)$ 的图形.

解 (1) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

(2) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$,

$f(0)=0$,

$f(-3)=-1+(-3)^2=8$.

(3) 该分段函数的图形如图 1－3.

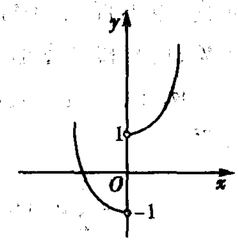


图 1－3

三、反函数

在函数的定义中有两个变量，一个是自变量，一个是因变量，但在实际问题中，哪一个是自变量，并不是绝对的，要根据所研究的具体问题来决定.

例如，一物体以 20km/h 的速度做匀速直线运动. 在 4h 内，所走过的路程与时间之间有函数关系

$$y=20x.$$

显然，定义域为 $[0,4]$，值域为 $[0,80]$.

可以看出，对于任意的 $x\in[0,4]$，都有唯一确定的 $y\in[0,80]$ 与之对应.

反过来，对于任意的 $y\in[0,80]$，也都有唯一确定的 $x\in[0,4]$ 与之对应，所以 x 也是 y 的函数. 即

$$x=\frac{y}{20}.$$

它的定义域为 $[0,80]$，值域为 $[0,4]$.

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M，如果对于任意的 $y\in M$，都可以从关系式 $y=f(x)$ 确定唯一的 $x\in D$ 与之对应，这样就确定了一个以 y 为自变量的新函数，叫做 $y=f(x)$ 函数的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$，其定义域是 M，值域是 D.

在函数 $x=f^{-1}(y)$ 中，y 表示自变量，x 表示函数. 但是习惯上，经常用 x 表示自变量，用 y 表示函数. 因此，反函数通常改写为

$$y=f^{-1}(x).$$

函数 $y=f(x)$ 的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

例 6 求函数 $y=2x-1$ 的反函数.

解　解出 x，得 $x=\frac{1}{2}(y+1)$.

将 x,y 互换，改写为 $y=\frac{1}{2}(x+1)$.

所以，$y=2x-1$ 的反函数为 $y=\frac{1}{2}(x+1)$.

还有许多反函数的例子，如 $y=\arcsin x$ 是 $y=\sin x$ 的反函数；$y=e^x$ 是 $y=\ln x$ 的反函数，等等.

四、基本初等函数及其图形

常数函数 $y=C$（C 为常数）.

幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为常数）（图 1－4）.

指数函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）（图 1－5）.

对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）（图 1－6）.

三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$（图 1－7）.

反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\text{arccot}\, x$（图 1－8）.

这六种函数统称为基本初等函数. 这些函数的性质在中学已学过，今后会经常用到.

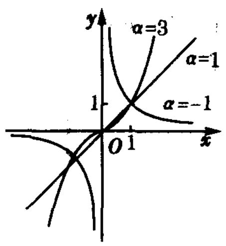


图 1－4

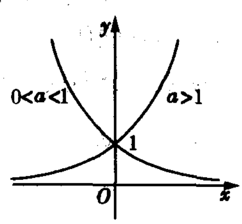


图 1－5

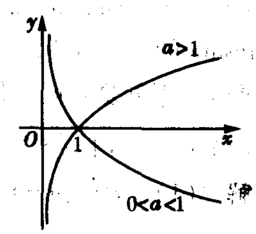


图 1－6

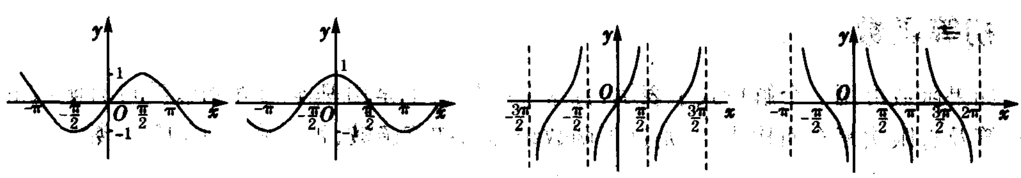

$y=\sin x$　　$y=\cos x$　　$y=\tan x$　　$y=\cot x$

图 1－7

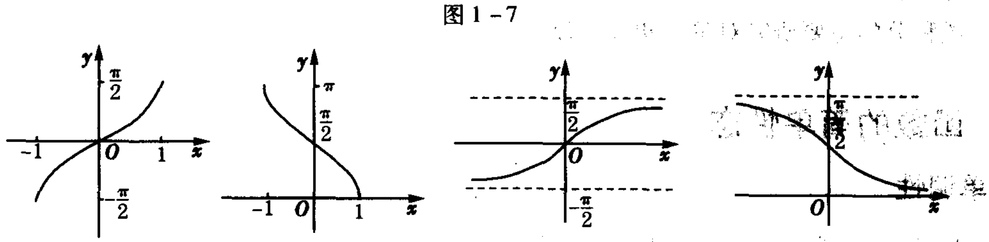

$y=\arcsin x$　　$y=\arccos x$　　$y=\arctan x$　　$y=\text{arccot}\, x$

图 1－8

五、复合函数

对于给定的两个函数，例如 $y=u^2$ 及 $u=\lg x(x>0)$，通过将后一个函数代入前一个函数，就产生一个新的函数

$$y=(\lg x)^2(x>0),$$

称为是由前两个函数复合而成的**复合函数**. 一般地，有如下的复合函数概念：

设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且当后一函数 $u=\varphi(x)$ 的自变量 x 在某一区间 I 上取值时，相应的 u 值可使 y 有定义，那么我们称 y 是 x 的一个定义于 I 的复合函数，记作

$$y=f[\varphi(x)].$$

由复合函数概念可知，构成复合函数的关键是：后一个函数的值域至少要有一部分含于前一函数的定义域中. 如

(1) $y=\sin^2x$ 是由 $y=u^2$，$u=\sin x$ 复合而成的复合函数，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，它也是 $u=\sin x$ 的定义域.

(2) $y=\sqrt{1-x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=1-x^2$ 复合而成的，其定义域为 $[-1,1]$，它只是 $u=1-x^2$ 的定义域的一部分.

(3) $y=\arcsin u$，$u=2+x^2$ 不能复合成一个函数，因为无论 x 取什么值，$u=2+x^2\geqslant 2$，而 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$，相应的 u 值不能使 $y=\arcsin u$ 有定义.

例 7 下列复合函数是由哪些简单函数复合而成的?

(1) $y=(1+\ln x)^5$，　　(2) $y=\sqrt{\cos\sqrt{x}}$.

解 (1) $y=u^5$，$u=1+\ln x$.

(2) $y=\sqrt{u}$，$u=\cos v$，$v=\sqrt{x}$.

六、初等函数

如果函数可用一个解析式子表示，且这个解析式子是由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次复合而构成的，则这类函数统称为**初等函数**，否则称为非初等函数.

例如，$y=\cos(e^x)+3\lg\sqrt{1+x}$ 是初等函数.

分段函数不是初等函数.

微积分的主要研究对象为初等函数.

七、函数的简单性态

1. 单调性

若对于某区间 I 内任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调递增，区间 I 称为单调递增区间；若当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调递减，区间 I 称为单调递减区间.

单调递增函数和单调递减函数统称为**单调函数**，其对应区间统称为**单调区间**. 图 1－9

中表示的函数均为单调递增函数(或增函数).

图 1－9

图 1－10 中表示的函数均为单调递减函数(或减函数).

图 1－10

$y=x, y=x^3, y=\sqrt[3]{x}, y=\sqrt{x}, y=e^x, y=2^x, y=\log_3 x, y=\tan x, y=\arctan x$ 等都是增函数.

而 $y=e^{-x}, y=\log_{\frac{1}{2}} x, y=\cot x, y=\operatorname{arccot} x$ 是减函数.

2. 有界性

若存在正数 M,使得对于某一区间 I 的任何 x 值总有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 I 上有界;否则,称为无界.

$y=\sin x, y=\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$上有界,因为在$(-\infty,+\infty)$上,$|\sin x|\leqslant 1$,$|\cos x|\leqslant 1$.

而 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在$(0,1)$内无界.

一个函数,如果在它的整个定义区间有界,称为有界函数.有界函数的图形必位于两条直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间(图 1－11).

$y=\sin x$ 是有界函数,其图形位于 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间(图 1－12).

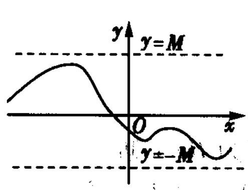


图 1－11

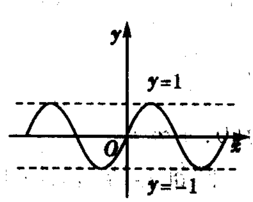
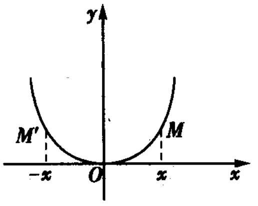


图 1－12

3. 奇偶性

设 I 为关于原点对称的区间,若对于任意 $x\in I$,都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为**偶函数**;若 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称(图 1－13).



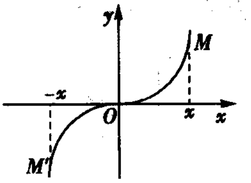


图 1－13

(1) $f(x)=x^2$, $f(x)=\cos x$, $x\in(-\infty,+\infty)$ 为偶函数.

(2) $f(x)=x^3$, $f(x)=\sin x$, $f(x)=\tan x$, $f(x)=\cot x$ 为奇函数.

(3) $f(x)=|\sin x|$, $x\in(-\infty,+\infty)$ 为偶函数.

(2) $f(x)=|x+1|$, $x\in(-\infty,+\infty)$ 为非奇非偶函数.

4. 周期性

若存在不为零的数 T，使得对于任意 $x\in I$，有 $x+T\in I$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**周期函数**. 通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期.

$f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$ 为周期函数，周期为 2π；$f(x)=\tan x$, $f(x)=\cot x$ 为周期函数，周期为 π.

八、建立函数关系应用举例

寻找函数关系是高等数学所要研究的课题之一，下面从几个实际问题入手，介绍利用简单的几何或物理知识建立函数关系. 在以后的一些章节中还将介绍利用微积分建立函数关系.

例 8 用铁皮做一容积为 V 的圆柱形罐头筒，试将它的表面积表示为底半径的函数，并求定义域.

解 设罐头筒的底半径为 r，表面积为 S，且其高为 h(图 1－14)，根据体积公式和面积公式有：$V=\pi r^2h$, $S=2\pi r^2+2\pi rh$

由 $V=\pi r^2h$，得 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}$，代入 $S=2\pi r^2+2\pi rh$，可得

$$S=2\pi r^2+\frac{2V}{r},$$

其定义域为 $(0,+\infty)$.

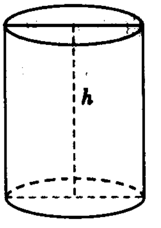


图 1－14

例 9 设有一圆锥容器，容器的底半径为 Rcm，高为 Hcm. 现以 $a\text{cm}^3/\text{s}$ 的速率往容器内注水. 试把容器中的水的容积 V 分别表示成时间 t 及水高 h 的函数(图 1－15).

解 (1) 显然 t 秒时容器中水的容积为

$V=at.$

(2) 设当容器中水的高度为 h 时水的容积为 V，并设此时水面的半径为 r. 根据锥体体积公式有

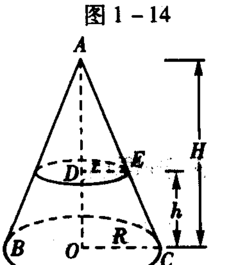


图 1－15

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2H-\frac{1}{3}\pi r^2(H-h). \tag{1}$$

因为$\triangle ABC\backsim\triangle ADE$,所以有

$$\frac{r}{R}=\frac{H-h}{H}.$$

即　$r=\frac{R}{H}(H-h).$

代入式(1),得

$$V=\frac{\pi R^2H}{3}\left[1-\left(1-\frac{h}{H}\right)^3\right],h\in[0,H].$$

例 10　如图 1－16 所示,在 O 与 A 之间引一条平行于 y 轴的直线 MN,试将 MN 左边阴影部分的面积 S 表示为 x 的函数.

解　当直线 MN 位于区间$[0,1]$内,即 $x\in[0,1]$时,

$$S=\frac{1}{2}x^2.$$

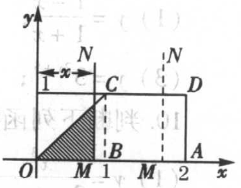


图 1－16

当直线 MN 位于区间$(1,2]$内,即 $x\in(1,2]$时,

$$S=\triangle OBC\text{ 的面积}+\text{矩形 }BCNM\text{ 的面积}$$
$$=\frac{1}{2}+(x-1)=x-\frac{1}{2}.$$

所以面积 S 为

$$S=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2, & x\in[0,1],\\ x-\frac{1}{2}, & x\in(1,2].\end{cases}$$

习题 1-1

1. 列表写出下列函数的定义域、值域,并画出其图形.

$y=C,x,x^2,x^3,\sqrt{x},\sqrt[3]{x},\frac{1}{x},e^x,e^{-x},\ln x,\log_{\frac{1}{2}}x,\sin x,\cos x,\tan x,\cot x,\arcsin x,\arccos x,$ $\arctan x,\operatorname{arccot} x.$

2. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{x^2-4}$;　　(2) $y=\sqrt{\cos x}$;

(3) $y=\frac{1}{\ln(x-1)}$;　　(4) $y=\sqrt{3-x}+\arccos\frac{x-2}{3}$.

3. 若$f(x)=\sqrt{1-x^2}$,求$f\left(\frac{1}{x}\right)$的定义域.

4. 设$f(x)=x^3+x^2+1$,求$f(0),f[f(0)],f(-x),f(x+1),f(x)+1,f\left(\frac{1}{x}\right),\frac{1}{f(x)}$.

5. 求下列分段函数的定义域:

(1) $y=\begin{cases}-1, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$ $\qquad y=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x<0,\\ x, & 0\leqslant x<1,\\ 2, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

6. 设函数$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\geqslant 0,\\ x^2+1, & x<0.\end{cases}$

求$f(0)$,$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$,$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$,$f(x+\pi)$.

7. 设$f(x+1)=x^2+x+1$,求$f(x)$.

8. 若$f(x)=x(x+1)$,求$f(x+1)$.

9. 求下列函数的反函数:

(1) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$; (2) $y=1+\lg(x+2)$;

(3) $y=3^{2x+5}$; (4) $y=2\sin 3x$.

10. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $y=\dfrac{x^3}{2+\cos x}$; (2) $y=|\sin x|$;

(3) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$; (4) $y=|2x+1|$;

(5) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$; (6) $y=x^{\frac{2}{3}}$.

11. 求下列函数的周期:

(1) $y=\ln(2+\sin x)$; (2) $y=\sin 3x$;

(3) $y=\sin^2 x$; (4) $y=\tan\dfrac{x}{2}$.

12. 下列函数是否为初等函数?

(1) $y=e^{-x^2}+\sin 2x$; (2) $y=\begin{cases}x+1, & -1\leqslant x<0,\\ -2x+1, & 0\leqslant x<1.\end{cases}$

13. 下列函数是由哪些简单函数复合而成的?

(1) $y=5^{(2x-1)^3}$; (2) $y=\tan\sqrt{1+x}$;

(3) $y=\cos\dfrac{1}{x-1}$; (4) $y=[\arcsin(1-x^2)]^3$;

(5) $y=\cos^2(1+2x)$.

14. $f(x)=x^2$,$g(x)=\lg x$,求$f[g(x)]$,$g[f(x)]$,$f[f(x)]$,$g[g(x)]$.

15. 设$f(x)=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$作出$f(x)$的图形.

16. 设函数$f(x)$定义在对称于原点的区间I上,试证函数

$F(x)=f(x)+f(-x)$为偶函数;

$G(x)=f(x)-f(-x)$为奇函数.

17. 讨论下列各种情形的结果是偶函数还是奇函数.