成人高等教育系列教材
Chengrengaodengjiaoyuxiliejiaocai

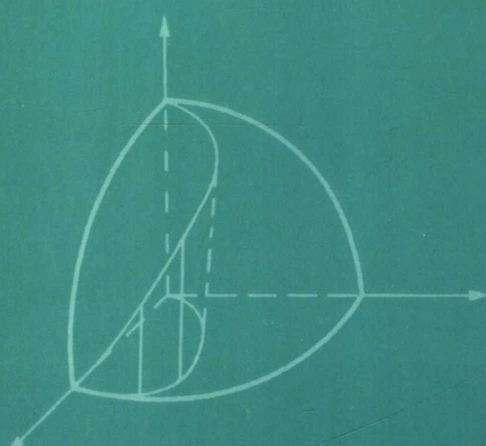
高等数学

[下册]

GaoDengShuXue

GAODENGSHUXUE

主编 陈凤平 副主编 洪潮兴 吴满



华南理工大学出版社

成人高等教育系列教材

高等数学

（下　册）

主　编　陈凤平

副主编　洪潮兴　吴　满

華南理工大學出版社

·广州·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（上下册）/陈凤平主编.—广州：华南理工大学出版社，2001.8（2006.1 重印）
（成人高等教育系列教材）
ISBN 7-5623-1733-X

Ⅰ.高…　Ⅱ.陈…　Ⅲ.高等数学-成人教育：高等教育-教材
Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 048809 号

总 发 行：华南理工大学出版社
（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）
发行部电话：020-87113487　　87111048（传真）
E-mail: scutc13@scut.edu.cn
http://www. scutpress.com.cn
责任编辑：乔 丽
印 刷 者：佛山市浩文彩色印刷有限公司
开　　本：850×1168　1/32　**印张**：20.75　**字数**：530 千
版　　次：2006 年 1 月第 1 版第 4 次印刷
印　　数：9 001～11 000 册
定　　价（上下册）：36.00 元

目 录

第六章　微分方程

微积分研究的对象是变量之间的函数关系，因此，寻求函数关系是数学的一个重要课题．但在许多问题中，往往不能直接找出所需的函数，却比较容易地找出含有待求函数及其导数的关系式．这样的关系式就是所谓的微分方程．通过对微分方程的研究，可以求得未知的函数．本章主要介绍微分方程的一些基本概念以及几类常见微分方程的解法．

第一节　微分方程的基本概念

先看两个实例．

例 1　一条平面曲线通过点(1,2)，且曲线上任一点 $M(x,y)$ 处的切线的斜率为 $2x$．求这曲线的方程．

解　设所求的曲线方程为 $y=y(x)$．根据导数的几何意义，应有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x \tag{6.1}$$

此外，据题意还应满足下列条件：

$$当\ x=1\ 时, y=2 \tag{6.2}$$

方程(6.1)可写成 $dy=2x dx$,对方程两边积分得

$$y=\int 2x dx$$

即

$$y=x^2+c \tag{6.3}$$

其中 c 为任意常数.

把条件(6.2)代入(6.3)式得 $2=1^2+c$,由此定出 $c=1$,再把 $c=1$代回(6.3)式,可得所求曲线方程为

$$y=x^2+1 \tag{6.4}$$

这是过定点(1,2)的一条抛物线.而(6.3)可看做是由曲线(6.4)沿 y 轴上、下平移而得出的一族抛物线.

例 2 把一物体垂直上抛,开始时物体与地面的距离为 h(图 6-1),初速度为 v_0,且设物体的运动只受重力作用,试求该物体的运动方程.

解 选择坐标轴垂直向上为正且坐标原点在地面上.设物体运动经过时间为 t,与地面的距离为 s,根据牛顿运动定律有

$$F=m\frac{d^2s}{dt^2}$$

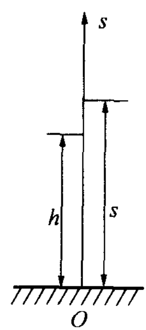


图 6-1

其中 m 为物体的质量,F 为物体所受的力.因物体只受重力作用,所以 $F=-mg$(其中 g 为重力加速度,取负号是因为重力的方向与所选坐标轴的正方向相反),因此得

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=-mg$$

即

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-g \tag{6.5}$$

此外,据题意还应满足两个条件:

$$\begin{cases} s\Big|_{t=0} = h \\ \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = v_0 \end{cases} \tag{6.6}$$

把方程(6.5)两边积分,得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -gt + c_1 \tag{6.7}$$

再对(6.7)式两边积分,得

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2 \tag{6.8}$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

把条件$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = v_0$ 和 $s\Big|_{t=0} = h$ 分别代入(6.7)式和(6.8)式得 $c_1 = v_0$ 和 $c_2 = h$.

再把 c_1 和 c_2 的值代回(6.8)式,得

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h \tag{6.9}$$

这就是物体的运动方程.

上面两个例子中的方程(6.1)和(6.5)都含有未知函数的导数,它们都是微分方程.

一般地,把含有未知函数、未知函数的导数(或微分)以及自变量的方程,称为微分方程.

必须指出:在微分方程中,自变量或未知函数有时可以不出现,但必定应含有未知函数的导数(或微分).

微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数,称为微分方程的阶.例如方程(6.1)是一阶微分方程,方程(6.5)是二阶微分方程.

如果把函数以及它的各阶导数代入微分方程,能使方程成为

恒等式,这函数就称为微分方程的解.例如,函数(6.3)和(6.4)都是微分方程(6.1)的解.

如果微分方程的解中含有任意常数且任意常数的个数正好与微分方程的阶数相同,这样的解称为微分方程的通解.如(6.3)式是方程(6.1)的通解,(6.8)式是方程(6.5)的通解.

应该指出:微分方程通解中的各任意常数必须是彼此独立的,例如

$$\begin{aligned} y &= c_1\sin 2x + c_2\sin x\cos x \\ &= c_1\sin 2x + \frac{c_2}{2}\sin 2x \\ &= \left(c_1 + \frac{c_2}{2}\right)\sin 2x \end{aligned}$$

其中 $c_1+\frac{c_2}{2}$可以合并写成一个任意常数 c,故此函数只含有一个任意常数,而不能说它含有两个任意常数.

在微分方程的通解中,按一定的条件确定出任意常数的特定值,从而得到不含任意常数的解,称之为微分方程的特解,如(6.4)式是方程(6.1)的特解,(6.9)式是方程(6.5)的特解.

从特解的定义可知,微分方程的特解必含在通解之内.不包含在微分方程通解之内的解称为奇解,本书将不考虑微分方程的奇解,且在例题与习题中,若没指明要求特解的,均指求通解.

正如在例1和例2见到的那样,微分方程的特解是按一定条件由通解确定出任意常数后而得到的.如例1中的(6.2)式与例2中的(6.6)式就是用来确定特解的条件.这种条件用以表明曲线经过的特定点或表明物体运动的初始状态,习惯上叫做初始条件.一般地说,当自变量取某值时,规定未知函数及其导数应取给定值的条件,叫做初始条件.如果微分方程是二阶的,则初始条件为当 $x=x_0$时,$y=y_0$,$y'=v_0$,写成

$$y\Big|_{x=x_0}=y_0,\quad y'\Big|_{x=x_0}=v_0$$

其中 x_0,y_0,v_0 都是给定的值.

例 3　验证下列所给函数是微分方程:$y''+4y=4x$ 的解,并指出哪个是通解,哪个是特解?

(1)$y=\cos2x-\sin2x+x$;

(2)$y=c_1\cos2x+c_2\sin2x+x$;

(3)$y=c\cos2x+\sin2x+x$;

(其中 c,c_1,c_2 为任意常数).

解　(1)由 $y=\cos2x-\sin2x+x$ 可求得

$$y''=-4\cos2x+4\sin2x$$

将 y 及 y'' 代入方程 $y''+4y=4x$,有

$$-4\cos2x+4\sin2x+4(\cos2x-\sin x+x)=4x$$

方程成为恒等式,故 y 为所给微分方程的解,又因它不含任意常数,所以是特解.

(2)由 $y=c_1\cos2x+c_2\sin2x+x$ 可求得

$$y''=-(4c_1\cos2x+4c_2\sin2x)$$

将 y 及 y'' 代入 $y''+4y=4x$,有

$$-(4c_1\cos2x+4c_2\sin2x)+4(c_1\cos2x+c_2\sin2x+x)=4x$$

方程成为恒等式,所以 y 是所给微分方程的解,且它所含任意常数的个数与微分方程的阶数都为 2.因此 y 是所给微分方程的通解.

(3)由 $y=c\cos2x+\sin2x+x$ 可求得

$$y''=-(4c\cos2x+4\sin2x)$$

将 y 及 y'' 代入 $y''+4y=4x$,有

$$-(4c\cos2x+4\sin2x)+4(c\cos2x+\sin2x+x)=4x$$

方程成为恒等式,因此 $y=c\cos2x+\sin2x+x$ 是所给微分方程的解,因 y 中只含一个任意常数,而微分方程的阶数为 2,故它不是通解,也不是特解,只能说 y 是微分方程的解.

例 4 验证由方程 $y=\ln(xy)$所确定的隐函数是微分方程 $(xy-x)y''+x(y')^2+(y-2)y'=0$ 的解.

证 把方程 $y=\ln(xy)$两边对 x 求导,得

$$y'=\frac{y+xy'}{xy} \qquad \text{即 } xyy'=y+xy'$$

上式两边再对 x 求导,得

$$yy'+x(y')^2+xyy''=2y'+xy''$$

整理可得

$$(xy-x)y''+x(y')^2+(y-2)y'=0$$

此即为所给的微分方程.因而由方程 $y=\ln(xy)$所确定的隐函数满足所给的方程,于是得证.

此例说明微分方程的解也可用隐函数的形式给出.

例 5 求曲线族 $y=cx+c^2$(其中 c 是任意常数)所满足的微分方程.

解 由 $y=cx+c^2$ 可求得 $y'=c$,并由两式消去 c,可知 $y=xy'+y'^2$ 即为曲线族所满足的微分方程.

习题 6-1

1. 指出下列各微分方程的阶:

(1) $(y')^2+y=x$　　(2) $y'''+y'+x^2y=0$

(3) $x^2\mathrm{d}y+y^2\mathrm{d}x=0$;　　(4) $L\dfrac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}+R\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\dfrac{Q}{c}=0$

2. 验证下列各函数是否为对应微分方程的解?并指出是特解,还是通解?

函　数	微分方程
(1) $y=\mathrm{e}^x$	$y''-y=0$

(2) $y=e^{-x}$ $\qquad y''-y=0$

(3) $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}$ $\qquad y''-y=0$

(4) $y=e^{-3x}+3$ $\qquad y'+3y=0$

(5) $y=x^2e^{x}$ $\qquad y''-2y'+y=0$

(6) $10^{-y}+10^{x}=c$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=10^{x+y}$

3. 求微分方程$\dfrac{dy}{dx}=x^2$的通解,以及满足初始条件$y\Big|_{x=0}=1$的特解,并画出这特解的图形.

4. 写出由下列条件所确定的曲线应满足的微分方程.

(1)曲线在任意点$M(x,y)$处的切线斜率等于该点横坐标与纵坐标的乘积;

(2)曲线上任意点$M(x,y)$处的切线与线段OM垂直;

(3)曲线上任意点$M(x,y)$处的切线与点M和原点的连线,以及横坐标轴所围成的三角形面积为常数a^2.

5. 潜水艇垂直下沉时所遇到的阻力和下沉的速度成正比,如果潜水艇的质量为m,并且是在水面由静止开始下沉,求下沉的速度所应满足的微分方程和初始条件.

第二节 可分离变量的一阶微分方程

如果一阶微分方程能表达成

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y) \tag{6.10}$$

则称为可分离变量的一阶微分方程.它的特点是:未知函数的导数