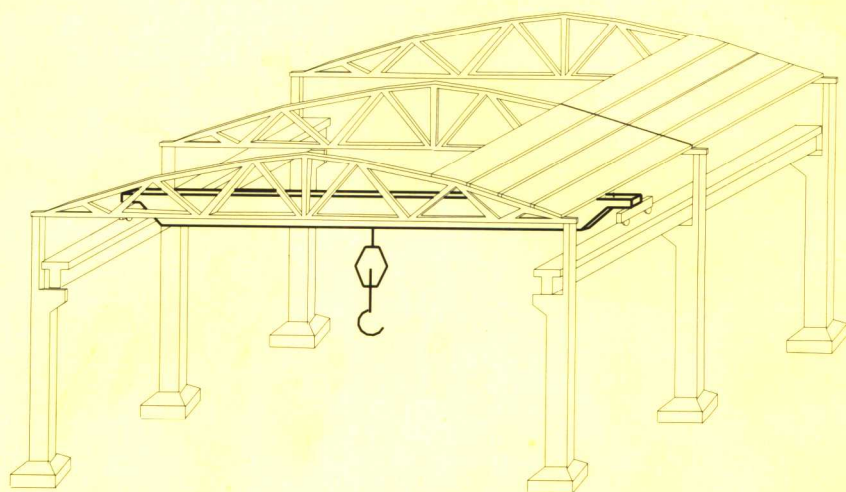


21世纪高等院校规划教材

结构力学

(下册)

崔恩第 主编
崔恩第 王永跃 周润芳 刘克玲 编



国防工业出版社

National Defense Industry Press

21 世纪高等院校规划教材

结构力学

(下册)

崔恩第 主编

崔恩第 王永跃 周润芳 刘克玲 编

国防工业出版社

· 北京 ·

内 容 简 介

本书根据教育部最新颁布实施的《普通高等学校本科专业目录》中规定的土木工程专业的培养目标和国家教育委员会批准的《结构力学课程教学基本要求》(多学时)编写。

本书分上、下两册,不仅涵盖了高等学校土木工程专业指导委员会制定的《结构力学》教学大纲所规定的教学内容,而且还编入了进一步加深、加宽的内容。选学内容在章、节标题前冠以“*”号。每章均有复习思考题、习题及习题答案。上、下两册书后各附有自我考核题两组。考核题的题型与国家教育委员会审定的“结构力学试题库”题型一致。

本书可作为土木工程专业土建、路桥、水利等各类专门化方向的教材,也可以作为成人教育、高等教育自学考试教材,并可供考研和有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

结构力学.下册 / 崔恩第主编. —北京:国防工业出版社, 2006. 6

21 世纪高等院校规划教材

ISBN 7-118-04422-9

I. 结... II. 崔... III. 结构力学 - 高等学校 - 教材 IV. 0342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 018604 号

※

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100044)

天利华印刷装订有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 13 字数 295 千字

2006 年 6 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—4000 册 定价 20.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)68428422

发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535

发行业务:(010)68472764

前 言

本书根据教育部最新颁布实施的《普通高等学校本科专业目录》中规定的土木工程专业的培养目标和国家教育委员会批准的《结构力学课程教学基本要求》(多学时)编写。适用于普通高等学校土木工程专业土建、路桥、水利等各类专门化方向的本科生,也可供参加成人教育考试及高等教育自学考试的学生、研究生和有关工程技术人员参考。

本书分上、下两册。上册是基本部分,内容包括绪论、几何组成分析、静定结构和超静定结构的计算及结构在移动荷载下的计算等。下册以结构力学专题为主,包括能量原理、结构矩阵分析、结构动力计算、极限荷载和结构的稳定计算。在结构矩阵分析部分给出了连续梁和平面刚架内力位移计算的程序框图、源程序和程序说明。本书不仅涵盖了高等学校土木工程专业指导委员会制定的《结构力学》教学大纲所规定的教学内容,而且还编入了进一步加深、加宽的内容。选学内容在章、节标题前冠以“*”号。每章均有复习思考题、习题及习题答案。上、下两册书后各附有自我考核题两组。考核题的题型与国家教育委员会审定的“结构力学试题库”题型一致。

结构力学是土木工程专业的一门专业(技术)基础课。一方面,它以高等数学、理论力学、材料力学等课程为基础;另一方面,它又是钢结构、钢筋混凝土结构、土力学与地基基础、结构抗震等专业课的基础。该课程在基础课与专业课之间起着承上启下的作用,是土木工程专业的一门重要主干课程。本书在选择和编写教材内容时,力求取材适当,既要为打好基础精选内容,又要反映本学科的新发展;力求叙述透彻,脉络清晰,符合认识规律,既方便教师教学,也方便学生自学。

本书由崔恩第主编,参加编写工作的有:崔恩第(第1章、第7章、第8章、第12章、附录),王永跃(第2章、第4章、第11章、第14章),周润芳(第3章、第5章、第13章),刘克玲(第6章、第9章、第10章、第15章)。

天津大学李增福教授、张韫美教授审阅了书稿,提出了宝贵意见,对此,我们表示衷心的感谢。限于编者水平,书中难免有疏漏和不妥之处,敬请读者批评指正。

编 者
2006年5月

目 录

第 11 章 最小势能原理	1
11.1 概述	1
11.2 线弹性变形体系的变形势能	1
11.3 线性变形体系的最小势能原理	2
11.4 里兹法	6
复习思考题	10
习题	10
第 12 章 结构矩阵分析	12
12.1 概述	12
12.2 矩阵位移法的概念及连续梁的计算	13
12.3 局部坐标系中的单元分析	20
12.4 单元刚度矩阵的坐标变换	23
12.5 结点、单元及未知位移分量编号	25
12.6 平面杆件结构的整体刚度矩阵	30
12.7 非结点荷载的处理	35
12.8 平面杆件结构分析举例	37
* 12.9 连续梁及平面刚架静力分析源程序	41
复习思考题	71
习题	71
第 13 章 结构的动力计算	76
13.1 动力计算概述	76
13.2 单自由度体系的自由振动	80
13.3 单自由度体系在简谐荷载作用下的强迫振动	88
13.4 单自由度体系在任意荷载作用下的强迫振动	95
13.5 多自由度体系的自由振动	98
13.6 多自由度体系主振型的正交性	116
13.7 多自由度体系在简谐荷载作用下的强迫振动	117
13.8 多自由度体系在一般动荷载作用下的强迫振动	123
* 13.9 无限自由度体系的自由振动	128

13.10 近似法求自振频率	131
复习思考题	137
习题	138
第 14 章 结构的稳定计算	143
14.1 两类稳定问题概述	143
14.2 确定临界荷载的静力法和能量法	146
14.3 弹性支承等截面直杆的稳定计算	154
14.4 剪力对临界荷载的影响	158
14.5 组合压杆的稳定	159
* 14.6 用矩阵位移法计算刚架的临界荷载	164
复习思考题	170
习题	171
第 15 章 梁和刚架的极限荷载	173
15.1 概述	173
15.2 极限弯矩、塑性铰及破坏机构	173
15.3 确定极限荷载的几个定理	176
15.4 超静定梁的极限荷载	177
* 15.5 用机动法求简单刚架的极限荷载	184
* 15.6 用增量变刚度法求刚架的极限荷载	185
复习思考题	190
习题	190
附录 下册自测题	193
参考文献	199

第 11 章 最小势能原理

11.1 概 述

在结构静力分析中,可以直接应用平衡条件、几何变形条件和物理条件求解结构的内力和位移。这就是一般的静力法。如果将平衡条件或几何变形条件用相应的能量原理代替,以此为基础建立的解法叫做能量法。在静力法中有两个基本方法,即位移法(以结构的位移为基本未知量)和力法(以某些多余未知力为基本未知量)。与此对应,在能量原理中也有两种基本原理:与位移法对应的是最小势能原理;与力法对应的是最小余能原理。

在第 6 章中已经讨论过的虚功原理,并给出了虚位移原理建立的虚功方程形式下的结构的平衡方程;由虚力原理建立起了结构位移计算公式。在第 9 章中应用机动法作影响线也是能量法的具体应用。

本章将重点讨论应用较广的最小势能原理。最小势能原理可以用来求精确解,但更重要的是用来求复杂问题的近似解。为此,本章将介绍一种以最小势能原理为基础的近似解法,即里兹法。

11.2 线弹性变形体系的变形势能

为了讨论能量法中的最小势能原理,首先说明弹性体的应变能的概念。

材料力学中已经讨论过线弹性体的应变能。对于杆件承受拉、压、剪、扭、弯时的变形能,其表达式如下。

1) 拉伸应变能

$$U = \int_0^l \frac{N^2}{2EA} ds = \frac{l}{2EA} N^2 = \frac{EA}{2l} \Delta l^2 \quad (11-1)$$

式中, N 是轴力; EA 是截面抗拉刚度; Δl 为杆件的伸长量; U 表示变形能。

2) 弯曲应变能

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} ds = \int_0^l \frac{EI\kappa^2}{2} ds \quad (11-2)$$

式中, M 是弯矩; EI 是截面抗弯刚度; κ 为曲率。

3) 剪切应变能

梁发生横力弯曲时,除有弯曲应变能外,还有剪切应变能。

$$U = \int_0^l \frac{kQ^2}{2GA} ds = \int_0^l \frac{GA\gamma_0^2}{2} ds \quad (11-3)$$

式中, Q 是剪力; GA 是截面抗剪刚度; γ_0 为平均剪应变; k 是与截面切应力分布规律有关的系数。

4) 圆轴扭转应变能

$$U = \int_0^l \frac{M_n^2}{2GI_p} ds = \frac{lM_n^2}{2GI_p} = \frac{GI_p}{2l} \varphi^2 \quad (11-4)$$

式中, M_n 是扭矩; GI_p 是截面抗扭刚度; φ 为扭转角; I_p 是截面极惯性矩。

体系在外力作用下将产生变形和内力, 这时, 外力做功。对线性变形体系来说, 当外力全部卸除后, 体系即完全恢复原状。而且, 如果不考虑在这一过程中的任何能量损耗, 则外力所做的功将全部以变形能的形式储存于体系内, 我们称之为应变能, 也称为变形势能。结构是由若干根杆件组成的, 整个结构体系的应变能应为各杆件的应变能之和。体系的应变能即可表示为

$$U = \sum \int \frac{M^2}{2EI} ds + \sum \int \frac{N^2}{2EA} ds + \sum \int \frac{kQ^2}{2GA} ds + \sum \int \frac{M_n^2}{2GI_p} ds \quad (11-5)$$

$$\text{或} \quad U = \sum \int \frac{EI\kappa^2}{2} ds + \sum \int \frac{EA\epsilon^2}{2} ds + \sum \int \frac{GA\gamma_0^2}{2} ds + \sum \int \frac{GI_p}{2} \theta^2 ds \quad (11-6)$$

对于线弹性变形体系, 应变能有以下的性质。

(1) 应变能总是正的, 因为在它的计算公式中, M 、 N 和 Q 都是二次方。

(2) 计算应变能时不能应用叠加原理, 即体系在几个力同时作用下的应变能, 不能由这几个力分别作用下的应变能相叠加而得到(以单个杆同时受轴力 N_1 和 N_2 的作用为例), 即

$$\frac{l}{2EA} (N_1 + N_2)^2 \neq \frac{l}{2EA} (N_1^2 + N_2^2)$$

(3) 应变能是状态函数。从式(11-6)可以看出, 只要体系的最后变形状态确定, 应变能即唯一地确定。也就是说, 如果有几组荷载作用于同一体系, 不论其作用的先后次序如何, 只要最后的变形形态相同, 则在体系内储存的变形势能也都相同。

11.3 线性变形体系的最小势能原理

首先给出线性变形体系总势能 Π 的定义, 即

$$\Pi = U + W \quad (11-7)$$

式中, U 为体系的应变能; W 为体系的外力势能。设结构上作用荷载 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ 。结构在某一位移状态中与荷载 P_i 对应的位移为 Δ_i , 则结构的外力势能为

$$W = - \sum P_i \Delta_i \quad (11-8)$$

例 11-1 结构如图 11-1 所示, 承受荷载 P 的作用, 设结点 A 有任一竖向位移 Δ , 试求结构在此位移状态下的势能 Π , 并分析 Π 与 Δ 之间的函数特性。

解 将位移 Δ 视为独立变量, 势能 Π 看作变量 Δ 的函数。现研究任一位移状态下的结构势能。此时, 两根杆件的对应的伸长量 $\Delta_{AB} = \Delta_{AC}$ 为

$$\Delta_{AB} = \Delta_{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Delta$$

轴力为

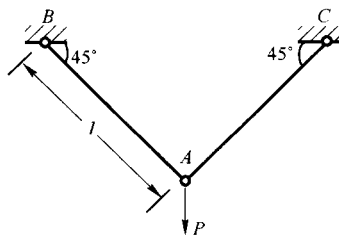


图 11-1 例 11-1 图

$$N_{AB} = N_{AB} = \frac{EA\Delta_{AB}}{l} = \frac{\sqrt{2}EA}{2l}\Delta$$

结构的应变能为

$$U = 2 \frac{EA\Delta_{AB}^2}{2l} = \frac{EA\Delta^2}{2l}$$

则结构的势能为

$$\Pi = \frac{EA\Delta^2}{2l} - P\Delta$$

在平衡状态下,与荷载 P 对应的位移为 Δ_1 。由平衡条件可知

$$P = \sqrt{2}N_{AB} = \frac{EA\Delta_1}{l}$$

则势能有

$$\Pi = \frac{EA}{2l}(\Delta^2 - 2\Delta_1\Delta) = \frac{EA}{2l}[(\Delta - \Delta_1)^2 - \Delta_1^2]$$

上式即为势能 Π 与位移 Δ 之间的函数关系,并由图 11-2 表示出来。

从式中和图中可以看出势能 Π 具有下列特性。

(1) 势能 Π 是位移参数 Δ 的二次函数。

(2) 在平衡状态下,即 $\Delta = \Delta_1$ 时, $\frac{d\Pi}{d\Delta} = 0$, 势能

Π 为驻值。

(3) 在稳定的平衡状态下,即 $\Delta = \Delta_1$ 时, Π 取得极小值。

由此我们给出势能的驻值原理:在弹性结构的一切容许位移中,真实位移使势能处于驻值状态,即

$$\delta\Pi = 0 \quad (11-9)$$

由于势能 Π 函数包含了积分式,且可以用位移变量来表示,则在变分法中称为泛函。泛函 Π 取驻值的必要条件是它的一阶变分等于零,即 $\delta\Pi = 0$ 。而“容许位移”是指满足体系给定的位移边界条件的位移(称为容许位移),也就是几何可能的位移。容许位移可有无限多种,它们满足全部变形谐调条件,但不一定满足平衡条件。容许位移中只有同时(通过几何和物理关系)满足全部平衡条件者才是所给力学问题的真实解答。由此可知,势能驻值条件式(11-9)实际上就是用能量形式表示的平衡条件。

由于势能 Π 是体系位移的函数,且位移都是预先满足变形谐调条件的容许位移,若再使式(11-9)成立,则也满足了全部平衡条件,因此必是真实解答。反过来,如果体系的位移状态是真实的,对应的位移是真实解答,则必满足所有平衡条件,从而必使 $\delta\Pi = 0$ 。已知式(11-9)是势能 Π 取驻值的必要条件,如果考虑二阶变分就可以证明,对于稳定的平衡状态,这个极值是极小值。于是得出结论:在几何可能的一切容许位移中,真实的位移使结构体系的势能取最小值;反之,使势能取最小值者必也是真实的位移。这就是最小势能原理。

现在来证明真实的位移使势能取最小值。为简便计算,在应变能中只考虑弯曲的影响。

首先,考虑真实位移状态。相应的势能为

$$\Pi = \int \frac{EI}{2} \kappa^2 ds - \sum P_i \Delta_i \quad (11-10)$$

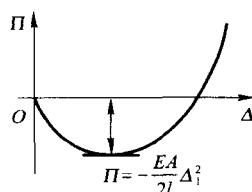


图 11-2 势能 Π 与位移 Δ 的曲线

其次,考虑任一可能位移状态,曲率为 $(\kappa + \delta\kappa)$,荷载 P_i 相应的位移 $(\Delta_i + \delta\Delta_i)$,相应的势能为

$$\Pi' = \int \frac{EI}{2} (\kappa + \delta\kappa)^2 ds - \sum P_i (\Delta_i + \delta\Delta_i) = \Pi + \delta\Pi + \delta^2\Pi \quad (11-11)$$

式中, $\delta\Pi$ 由 $\delta\kappa$ 、 $\delta\Delta_i$ 的一次项组成,即一阶变分,即

$$\delta\Pi = \int EI\kappa\delta\kappa ds - \sum P_i\delta\Delta_i \quad (11-12)$$

由驻值条件式(11-9),可知 $\delta\Pi = 0$ 。

$\delta^2\Pi$ 为 $\delta\kappa$ 、 $\delta\Delta_i$ 的二次项组成,即二阶变分,即

$$\delta^2\Pi = \int \frac{EI}{2} (\delta\kappa)^2 ds \quad (11-13)$$

由于 $\delta\kappa$ 不会恒为零,所以 $\delta^2\Pi > 0$ 。于是得到

$$\Pi' > \Pi \quad (11-14)$$

式(11-14)表明:在体系处于稳定平衡的情况下,与各种几何可能的位移相比,真实的位移使势能取极小值。

最小势能原理有广泛的应用。在许多场合下我们可以用势能的极值条件来导出或者代替体系的平衡方程和力的边界条件。在近似解法中,最小势能原理是里兹法的理论基础。

例 11-2 用最小势能原理求图 11-3(a)所示结构的内力。设 EI 为常数。

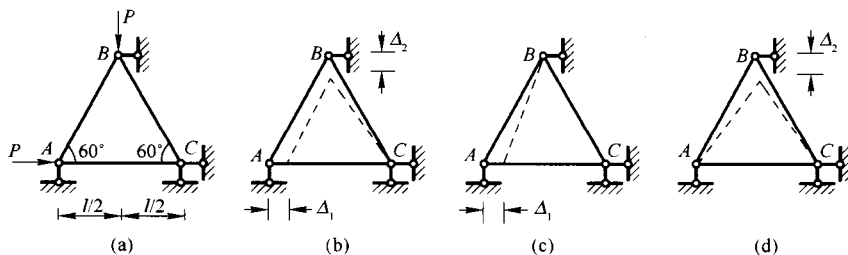


图 11-3 例 11-2 图

(a) 计算简图;(b) 变形图;(c) 只有 Δ_1 时变形图;(d) 只有 Δ_2 时变形图。

解 1) 建立结构的势能

结点 A 的位移为 Δ_1 , 结点 B 的位移为 Δ_2 , 如图 11-3(b) 所示。利用图 11-3(c) 和 (d), 求出各杆的伸长量:

$$\Delta_{AB} = -\frac{1}{2}\Delta_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\Delta_2$$

$$\Delta_{AC} = -\Delta_1$$

$$\Delta_{BC} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\Delta_2$$

应变能为

$$U = \frac{EA}{2l} (\Delta_{AB}^2 + \Delta_{AC}^2 + \Delta_{BC}^2) = \frac{EA}{2l} \left[\left(\frac{1}{2}\Delta_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\Delta_2 \right)^2 + \Delta_1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\Delta_2 \right)^2 \right] = \frac{EA}{2l} \left(1.25\Delta_1^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\Delta_1\Delta_2 + 1.5\Delta_2^2 \right)$$

结构的势能为

$$\Pi = \frac{EA}{2l} \left(1.25\Delta_1^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\Delta_1\Delta_2 + 1.5\Delta_2^2 \right) - P\Delta_1 - P\Delta_2$$

2) 应用势能驻值条件求位移

势能驻值条件为

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_1} = 0, \frac{EA}{2l} \left(2.5\Delta_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\Delta_2 \right) - P = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \Delta_2} = 0, \frac{EA}{2l} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\Delta_1 + 3\Delta_2 \right) - P = 0$$

由此解出

$$\Delta_1 = \frac{1000P}{506EA}, \Delta_2 = \frac{1000P}{144EA}$$

3) 求内力

根据 Δ_1 、 Δ_2 求解各杆的内力:

$$N_{AB} = \frac{EA}{l} \Delta_{AB} = -0.735P$$

$$N_{AC} = \frac{EA}{l} \Delta_{AC} = -0.632P$$

$$N_{BC} = \frac{EA}{l} \Delta_{BC} = -0.415P$$

例 11-3 试用势能驻值原理求如图 11-4(a) 所示结构的内力, 绘弯矩图。线弹性材料, $EI = \text{常数}$ 。

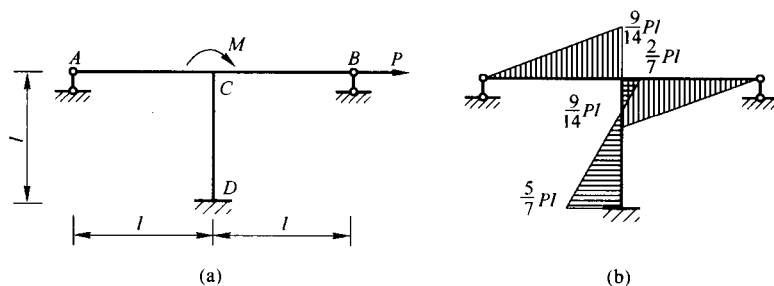


图 11-4 例 11-3 图

(a) 计算简图; (b) 弯矩图。

解 以结点 C 的转角 φ_C 和柱 CD 的侧移 Δ 为基本未知量。由转角位移方程给出各杆端弯矩:

$$\left. \begin{aligned} M_{CA} &= 3i\varphi_C \\ M_{CB} &= 3i\varphi_C \\ M_{CD} &= 2i \left(2\varphi_C - \frac{3\Delta}{l} \right) \\ M_{DC} &= 2i \left(\varphi_C - \frac{3\Delta}{l} \right) \end{aligned} \right\} \quad (11-15)$$

式中

$$i = \frac{EI}{l}$$

由于刚架的剪切应变能和拉压应变能与弯曲应变能相比数值较小,可忽略不计。当杆件上无其他荷载作用时,其应变能在数值上等于杆端弯矩和杆端剪力在相应的杆端角位移和线位移上所做的功。则结构的应变能为

$$U = \frac{1}{2} M_{CA} \varphi_C + \frac{1}{2} M_{CB} \varphi_C + \frac{1}{2} M_{CD} \varphi_C + \frac{1}{2} Q_{CD} \Delta \quad (11-16)$$

将式(11-15)代入式(11-16),可得

$$U = 5i\varphi_C^2 - \frac{6i}{l} \Delta \varphi_C + \frac{6i}{l^2} \Delta^2 \quad (11-17)$$

结构的外力势能为

$$W = -M\varphi_C - P\Delta \quad (11-18)$$

则结构的势能为

$$\Pi = U + W = 5i\varphi_C^2 - \frac{6i}{l} \Delta \varphi_C + \frac{6i}{l^2} \Delta^2 - M\varphi_C - P\Delta \quad (11-19)$$

由势能的驻值条件,即

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_C} &= 0, 10i\varphi_C - \frac{6i}{l} \Delta - M = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta} &= 0, -\frac{6i}{l} \varphi_C + \frac{12i}{l^2} \Delta - P = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11-20)$$

求解式(11-20)可得

$$\varphi_C = \frac{2Ml + Pl^2}{14EI}, \Delta = \frac{3Ml^2 + 5Pl^3}{42EI} \quad (11-21)$$

如果取 $M = Pl$, 则 $\varphi_C = \frac{3Pl^2}{14EI}$, $\Delta = \frac{4Pl^3}{21EI}$ 。代入式(11-15),计算出杆端弯矩:

$$M_{CA} = M_{CB} = \frac{9}{14} Pl, M_{CD} = -\frac{2}{7} Pl, M_{DC} = -\frac{5}{7} Pl \quad (11-22)$$

其弯矩图如图 11-3(b)所示。

11.4 里兹法

以上我们看到,应用最小势能原理可以求得桁架、梁、刚架等问题的精确解,这是因为这些问题的势能可以用有限个位移参数来描述,体系的全部几何可能的位移状态可用有限个待定的位移参数来表示,而真实的位移状态就是其中的一种,利用势能的驻值条件即可求出这些位移参数的确定值。

但是,在许多场合下(例如,结构上有任意分布的外荷载时),体系的势能难于精确地用有限个结点位移表示出来。实际上,在一般情况下,弹性杆件的各种几何可能的位移状态需用无限多个位移参数才能描述。如果将杆件的位移展开为无穷级数,级数展开式中的无限多个系数便构成未知参数。因此,结构一般属于无限自由度体系,其各种几何可能的位移状态需用无限多个参数才能完备地表示出来。

里兹法是建立在最小势能原理基础上的一种近似分析方法,是由瑞雷(Rayleigh)于 1877

年,里兹(Ritz)于1908年提出的。其基本思路是在位移的级数展开式中取有限项,使无限多个未知参数变为有限个,并根据最小势能原理应用势能的驻值条件来求解。里兹法就是将一个无限自由度体系用有限自由度体系来代替,并依据最小势能原理求得近似解。

里兹法求近似解是结合能量原理进行的。结合能量原理来求近似解有其方便之处,这是因为能量原理的一个显著特点是将问题归结为在某个空间内求能量的极小值的问题。如果从这个空间近似地选取一个子空间来求能量的极小值,这样就得到一个近似解。如果取一系列子空间来逼近原空间,则可得到一系列近似解,它们将逐次逼近于真解。

以基于势能原理的里兹法为例,对无限自由度体系进行近似分析的基本思路是:把无限自由度体系近似地用有限自由度体系来代替。要描述一个无限自由度体系的各种可能位移状态,需要用无限个位移参数才能完备地表示出来。如果近似地只用有限个位移参数来表示,则等于只能得到了原体系的近似解。

总之,里兹法是结合能量原理求近似解的一种方法使无多个未知参数变为有限个。

下面用基于势能原理的里兹法求梁的挠曲线。

梁的挠曲线函数 $v(x)$ 是所求的未知函数,梁是一个无限自由度体系。

1. 选取几何可能位移

应用势能原理时,首先根据几何边界条件来选取几何可能位移。设几何边界条件都是齐次条件(即几何边界条件中的给定位移都是零位移)。设已设 $\varphi_i(x) (i=1,2,\dots,n)$ 是满足几何边界条件的 n 个可能挠度函数,则它们的线性组合

$$v(x) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x)$$

显然是由这 n 个函数组成的可能挠度函数的一般表达式。

2. 将势能表示为含 n 个参数的函数

梁的势能可表示为

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EI (v'')^2 dx - \int_0^l q v dx = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i'' \right)^2 dx - \int_0^l q \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i dx$$

这里,势能 Π 是 n 个参数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的二次函数。

3. 应用势能驻值条件

势能驻值条件为

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0, \dots, \frac{\partial \Pi}{\partial a_n} = 0$$

上式为一 n 阶线性方程组,可求解出 n 个参数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 。代入式(11-9),即得出该有限自由度体系的挠度的精确解,同时也就是梁(无限自由度体系)的挠度的近似解。

例 11-4 试用里兹法求图 11-5 所示悬臂梁的挠曲线方程。设置 $EI = \text{常数}$, 不计剪切变形的影响。

解 1) 选取几何可能位移

悬臂梁应满足的位移条件共有两个,即在固定端 A 处的挠度 $v(0) = 0$ 和转角 $\frac{dv(0)}{dx} = 0$ 。符合这两个几何

条件的可能位移有无限多个,挠曲线有无限多个参数。我们假设可能挠度曲线方程为一个多项式:

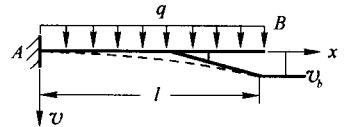


图 11-5 例 11-4 图

$$v(x) = a_1 x^2 + a_2 x^3 + \cdots + a_n x^{n+1} \quad (11-23)$$

由于在 $x=0$ 处要满足 $v=0$ 和 $\frac{dv}{dx}=0$ 的几何条件,故在式(11-23)中未包含常数项和一次项。因此,按式(11-23)选定几何可能位移之后,原来的无限自由度体也就近似地看作为具有 n 个自由度的体系。

2) 按单自由度体系计算

在式(11-23)中只取第一项,即设挠度方程为

$$v(x) = a_1 x^2 \quad (11-24)$$

这时我们将梁按单自由度体系计算。

体系的势能为

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EI (v'')^2 dx - \int_0^l qv dx = 2Ell a_1^2 - \frac{1}{3} ql^3 a_1$$

由驻值条件

$$\frac{d\Pi}{da_1} = 4Ell a_1 - \frac{1}{3} ql^3 = 0$$

得

$$a_1 = \frac{ql^2}{12EI}$$

故

$$v(x) = \frac{ql^3}{12EI} x^2$$

自由端 B 的挠度 $v_B = \frac{ql^4}{12EI} = 0.083 \frac{ql^4}{EI}$, 与精确解 $v_B = 0.125 \frac{ql^4}{EI}$ 相比,误差较大。

3) 按两个自由度计算

为了提高计算精度,在式(11-23)中只取前两项,即设挠度方程为

$$v(x) = a_1 x^2 + a_2 x^3 \quad (11-25)$$

此时,梁的势能为

$$\Pi = \frac{1}{2} EI (4la_1^2 + 12l^2 a_1 a_2 + 12l^3 a_2^2 - q \left(\frac{1}{3} l^3 a_1 + \frac{1}{4} l^4 a_2 \right))$$

由势能驻值条件

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0, 4Ell a_1 + 6Ell^2 a_2 - \frac{1}{3} ql^3 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0, 6Ell^2 a_1 + 12Ell^3 a_2 - \frac{1}{4} ql^4 = 0$$

解出

$$a_1 = \frac{5ql^2}{24EI}, a_2 = -\frac{ql}{12EI}$$

则

$$v(x) = \frac{q}{24EI} (5l^2 x^2 - 2lx^3)$$

计算 B 端挠度 $v_B = 0.125 \frac{ql^4}{EI}$, 与精确解相同。此时跨中 C 点 ($x=l/2$) 的挠度 $v_C =$

$0.0417 \frac{ql^4}{EI}$, 与精确解 $v_C = 0.0443 \frac{ql^4}{EI}$ 误差很小。

4) 在式(11-23)中取三项

此时,有

$$v(x) = a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4$$

同理可得

$$v(x) = \frac{q}{24EI} (6l^2 x^2 - 4lx^3 + x^4)$$

上式实际为挠曲线的精确解,这是因为所选的多项式包含了真实位移状态。

例 11-5 试用正弦级数求图 11-6 所示简支梁的挠度方程和弯矩方程。

解 1) 选取几何可能位移

简支梁的位移边界条件是

$$v(x) = 0, v(l) = 0 \quad (11-26)$$

选取可能位移时,设挠度为正弦级数:

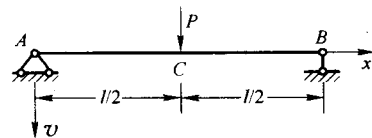


图 11-6 例 11-5 图

$$v(x) = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \cdots + a_n \sin \frac{n\pi x}{l} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (0 \leq x \leq l) \quad (11-27)$$

可以看出级数的每一项 $a_n \frac{n\pi x}{l}$ 都满足边界条件(11-26),因而,式(11-27)即为简支梁的可能位移状态。梁的势能为

$$\Pi = \frac{1}{2} \int EI [v''(x)]^2 dx - Pv \left(\frac{1}{2} \right)$$

将式(11-27)代入上式并展开,注意到三角函数的正交关系,经积分运算得

$$\Pi = \frac{EI\pi^4}{4l^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_n^2 - P \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} a_n$$

利用势能驻值条件

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_n} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

可求得位移参数 a_n 为

$$\begin{aligned} \text{当 } n = 2, 4, 6, \dots \text{ 时, } a_n &= 0 \\ \text{当 } n = 1, 3, 5, \dots \text{ 时, } a_n &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2Pl^3}{\pi^4 EI n^4} \end{aligned} \quad (11-28)$$

因此挠曲线方程为

$$v(x) = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EI} \left(\sin \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{3^4} \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^4} \sin \frac{5\pi x}{l} - \cdots \right) \quad (11-29)$$

中点的挠度为

$$v_c = \frac{2Pl}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots \right) \quad (11-30)$$

只取第一项,得

$$v_c = \frac{2Pl^3}{\pi 4EI} = 0.0253 \frac{Pl^3}{EI}$$

与精确解 $v_c = \frac{Pl^3}{48EI} = 0.02083 \frac{Pl^3}{EI}$ 比较, 误差只有 1.5%。

梁的弯矩为

$$M(x) = -EIv''(x) = \frac{2Pl}{\pi^2} \left(\sin \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^2} \sin \frac{5\pi x}{l} - \dots \right) \quad (11-31)$$

荷载作用点 C(跨中)弯矩

$$M_c = \frac{2Pl}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right)$$

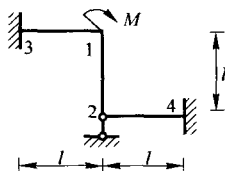
复习思考题

1. 体系势能取得驻值, 说明体系的势能处于什么状态?
2. 里兹法的基本思路是什么?

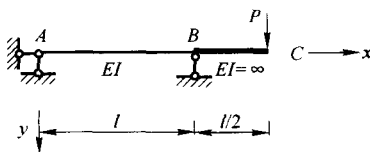
习 题

习题 11-1 试用势能驻值原理求图示结构的内力, 绘弯矩图。线弹性材料, $EI = \text{常数}$ 。

习题 11-2 试用瑞利—李兹法求梁 C 点的竖向线位移。设 $y(x) = A_1 x(x-l) + A_2(x-l)^2 x$ 。



习题 11-1 图



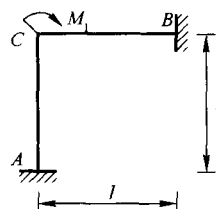
习题 11-2 图

习题 11-3 试用势能驻值原理求图示刚架各杆杆端弯矩。 $EI = \text{常数}$ 。

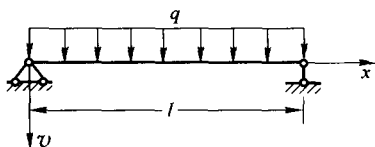
习题 11-4 试用里兹法求图示简支梁的挠曲线。设挠曲线为

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

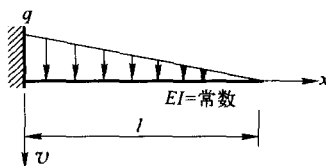
习题 11-5 试用里兹法求图示简支梁的挠曲线。设挠曲线为 $v(x) = a_1 x^2 + a_2 x^3 + \dots$ 。



习题 11-3 图



习题 11-4 图



习题 11-5 图

习题答案

$$\text{习题 11-1} \quad \varphi_1 = \frac{2M}{15i}, \varphi_1 = -\frac{M}{30i}$$

$$\text{习题 11-2} \quad y_C = Pl^3/(12EI)$$

$$\text{习题 11-3} \quad M_{CB} = \frac{M_1}{2}, M_{CA} = \frac{M_1}{2},$$

$$M_{BC} = \frac{M_1}{4}, M_{AC} = \frac{M_1}{4}$$

$$\text{习题 11-4} \quad v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5ql^4}{384EI}$$

$$\text{习题 11-5} \quad \text{按两项计算} \quad v = \frac{qlx^2}{EI} \left(\frac{l}{48} - \frac{x}{200} \right)$$