

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
高职高专计算机系列规划教材



高等数学

(第2版)

钱椿林 主编



电子工业出版社

PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高职高专计算机系列规划教材

高等数学

(第2版)

钱椿林 主编

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 • BEIJING

内 容 简 介

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材,是根据教育部最新制定的《高职高专高等数学课程教学基本要求》编写的。全书共 15 章。在介绍函数和极限概念的基础上,利用极限概念分别引出了导数与积分的运算及其方法,利用微积分解决工程技术与其他实际问题的方法,将常微分方程、无穷级数与矩阵等内容应用于解决实际问题的方法,最后介绍了利用数学实验去实际问题或者解决比较复杂的微积分问题的方法。

本书注重突出应用,各章通过例题,介绍解题思路,学会建立数学模型的方法。每章都有本章小结,其内容为小结本章的基本概念、基本定理、基本方法;其疑点解析的目的是为了巩固所学知识,逐步提高读者用高等数学的方法去分析问题和解决问题的能力。

本书既可作为计算机学科和工程各专业高职高专的教材,也可供有关经济专业的师生和科技工作者阅读和参考。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/钱椿林主编. —2 版. —北京:电子工业出版社, 2006.7

(高职高专计算机系列规划教材)

ISBN 7-121-02411-X

I. 高… II. 钱… III. 高等数学—高等学校: 技术学校—教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 022731 号

责任编辑:吕 迈(lumai@phei.com.cn)

印 刷:北京季蜂印刷有限公司

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

经 销:各地新华书店

开 本:787×1092 1/16 印张:20.25 字数:518 千字

印 次:2006 年 7 月第 1 次印刷

印 数:5 000 册 定价:27.00 元

凡购买电子工业出版社的图书,如有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系。联系电话:(010) 68279077。质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

出版说明

高职高专的计算机专业面临着两方面的巨大变化,一方面是计算机技术的飞速发展,另一方面是高职高专教育本身的改革和重组。

当前,计算机技术正经历着高速度、多媒体及网络化的发展。计算机教育,特别是计算机专业的教材建设必须适应这种日新月异的形势,才能培养出不同层次的、合格的计算机技术专业人才。

自 20 世纪 70 年代末高等专科学校计算机专业相继成立以来,高等专科学校积极探索具有自己特色的教学计划和配套教材。1985 年,在原电子工业部的支持下,由全国数十所高等专科学校参加成立了“中国计算机学会教育委员会大专教育学组”,之后又成立了“大专计算机教材编委会”。从 1986 年到 1999 年,在各校老师的共同努力下,相继完成了 3 轮高等专科学校计算机教材的规划与出版工作,出版了 78 种必修课、选修课、实验课教材,较好地解决了高专层次计算机专业的教材需求。

为了适应计算机技术的飞速发展以及高职高专计算机教育发展的需要,“中国计算机学会教育委员会高职高专教育学组”和“高职高专计算机教材编委会”从 2000 年 7 月开始,又组织了本科高校、高等专科学校、高等职业技术学院和成人教育高等院校的有教学经验的老师,学习、研究、参考了“全国高校计算机专业教学指导委员会”和“中国计算机学会教育委员会”制定的高等院校《计算机学科教学计划 2000》,制定了《高职高专计算机教育 2002》,规划了高专、高职、成人高等教育三教统筹的第 4 轮教材。

第 4 轮教材的编写工作以招标的方式征求每门课程的编写大纲和主编,要求投标老师详细说明课程改革的思路、本课程和相关课程的联系、重点和难点的处理等。在第 4 轮教材的编写过程中,编委会强调加强实践环节、强调三教统筹、强调理论够用为度的原则,特别要求教学内容要适应高职高专教育发展的新形势。经过编委会、编者和出版社的共同努力,第 4 轮教材比前 3 轮教材得到了更广泛的使用,已经出版 60 多种。

在第 4 轮教材的出版过程中,得到了教育部高教司高职高专处的支持、指导和帮助,经过专家的评审,已有 8 种被列为“国家十五规划教材”,14 种被列为“教育部规划教材”。

第 4 轮教材具有以下特点:

1. 在编写上突出高等职业教育的特点,强调淡化理论,加强实训,突出职业技能训练。
2. 内容反映新知识、新技术和新方法,使学生能更快地适应就业岗位的需要。
3. 对实践性较强的课程,本系列设计了主教程、上机指导教程(初级实践指导与练习)和实训教程(高级实践指导与练习)。

4. 为了满足课堂教学和教师备课的需要,教材配有电子教案或电子课件。

5. 为了配合计算机等级考试和认证考试,部分教材的习题中安排了相应的题型。

本系列教材已于 2004 年 7 月至 9 月陆续推出 32 个新品种,使得第 4 轮教材达到近 100 种,基本覆盖了高职高专计算机专业的主要课程。

“中国计算机学会教育委员会高职高专教育学组”和“高职高专计算机教材编委会”恳切希望学生、教师和专家对本套教材提出宝贵的批评和建议。

中国计算机学会教育委员会高职高专教育学组

2004 年 9 月

前言

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材（高职高专教育）。

本书是中国计算机学会大专教育学会大专计算机教材编委会编写计划系列教材之一，并由大专计算机教材编审委员会负责征稿、审定、推荐出版。

在科学技术的研究中，数学方法是一种必不可少的研究方法。数学方法不但广泛应用于自然科学领域的研究活动中，而且也广泛渗透到其他的研究活动中。所谓数学方法，就是运用数学所提供的概念、理论和方法对所研究的对象进行定量的分析、描述、推导和计算，以便从量的关系上认识事物发展变化的规律性的方法。但是，必须说明，这里所说的数学方法，不是指数学家研究数学的方法，而是指除此之外的科研人员以数学概念和理论揭示所研究事物的内在联系和运动规律的方法。

在科学技术的研究中，定量分析和精确计算是掌握客观规律的根本途径。而数学方法是对客观事物进行定量分析和精确计算的重要手段。由于数学具有高度的抽象性、严密的逻辑性、严格的确定性和广泛的适用性的特点，由于它自身在长期的发展中创造了一系列的概念、理论和方法，再加上电子计算机的出现和运用，使得数学方法能适应现代科学技术发展的要求，在科学技术研究中起着越来越重要的作用。

本书所介绍的高等数学方法，称为高等数学，它是一种最基本最重要的数学方法。因此，高等数学是高职高专各专业必修的一门重要基础课，它的内容主要包括一元函数微积分学，多元函数微积分学，微分方程，无穷级数，矩阵等等，其核心内容是微积分。本书在介绍函数和极限概念的基础上，利用极限分别引出了导数与积分的运算及其方法，利用微积分解决工程技术与其他实际问题的方法，将常微分方程、无穷级数与矩阵等内容应用于解决实际问题的方法，利用数学软件包去实际问题或者解决比较复杂的微积分问题的方法，为后继课程的学习打下良好基础。

为满足高职高专院校培养技术应用型人才的需要，贯彻“以能力为主线，必需、够用为度”的原则，结合多年从事在高等数学方面的科研和教学改革的经验，将高等数学、矩阵二部分内容融合在一起，编写了适应高职高专院校计算机专业与工科类各专业的《高等数学》教材，这本教材具有以下几个特点：

1. 依据《高职高专高等数学课程教学基本要求》，内容必须覆盖高职高专学校计算机专业与工科类各专业对高等数学的需求。

2. 贯彻“掌握概念、强化应用”的教学原则。掌握概念要落实到用数学思想及数学概念结合工程实际方面上；强化应用要落实到使学生能运用所学数学方法求解数学模型上。注重学生掌握基本概念，学会用数学方法建模，运用计算机的数学软件包求解。

3. 对难度较大的基础理论不要求严格的论证，只作简单的几何说明。

4. 适当注意数学自身的系统性与逻辑性。

5. 注意到与实际应用联系较多的基础知识、基本方法和基本技能的训练，但不要求过分复杂的计算和变换。

6. 在教学内容上注意到对学生抽象概括能力、逻辑推理能力、自学能力、熟练的运算能力和分析问题、解决问题能力的培养，并对解题的步骤和思路进行适当的归纳。

7. 依据《高职高专高等数学课程教学基本要求》所编写的本教材, 有较宽的适用面, 也可以适用于经济类专业。

8. 每章末都有本章小结, 包括内容提要, 疑点解析二部分, 以方便学生复习巩固, 并突出对于数学方法的总结, 以利于提高学生用高等数学的方法去分析问题和解决问题的能力。

9. 书中全部的数学实验均在 Mathematica4.0 平台上进行编写, 形式上采用了实验指导书的形式, 包括了实验目的与任务、实验内容与实验步骤, 使学生上机实验更加方便。书中所有实验项目全部在 Mathematica4.0 系统中运行通过。

本书由钱椿林任主编, 参编人员为邬枫(第2章至第5章)、吴平(第6章至第10章)、沈京一(第15章)、钱椿林(第1章及第11章至第14章)。全书由钱椿林修改并定稿。

在编写本书的过程中, 俞泳薇副教授对本书稿提出了许多有价值的意见; 赵一鸣副教授、王平一副教授、徐遵副教授对本书稿提出了许多宝贵的建议; 汪军、田立炎、周良英、龚奇敏、肖群华、李平和张晶讲师做了大量的资料收集和整理工作; 戈扬和凌霞老师在电脑制作方面花费了大量的时间与精力, 在此一并致谢。

上海水产大学王英华教授任本书主审, 王教授仔细审阅了全稿, 提出了许多宝贵意见, 在此深表感谢。

由于编者水平有限, 书中难免有不足之处, 诚恳地希望读者批评指正。

编 者

2005 年 10 月于苏州

目 录

第 1 章 绪论	(1)
1.1 数学方法概述与作用	(1)
1.2 微积分所研究的两个基本问题及方法	(2)
1.3 怎样学习高等数学	(5)
习题 1	(5)
第 2 章 函数	(6)
2.1 函数及其性质	(6)
2.1.1 函数的概念	(6)
2.1.2 函数的几种特性	(9)
2.2 初等函数	(9)
2.2.1 基本初等函数	(9)
2.2.2 复合函数	(10)
2.2.3 初等函数	(10)
2.3 数学模型方法概述	(11)
2.3.1 数学模型的概念	(11)
2.3.2 数学模型的建立过程	(11)
2.3.3 函数模型的建立	(12)
2.4 本章小结	(13)
2.4.1 内容提要	(13)
2.4.2 疑点解析	(14)
习题 2	(15)
第 3 章 极限与连续	(16)
3.1 极限的概念	(16)
3.1.1 数列的极限	(16)
3.1.2 函数的极限	(17)
3.1.3 极限的性质	(20)
3.1.4 关于极限概念的说明	(20)
3.1.5 无穷小量	(21)
3.1.6 无穷大量	(22)
3.2 极限的运算	(23)
3.2.1 极限的运算法则	(23)
3.2.2 两个重要极限	(25)
3.2.3 无穷小的比较	(27)
3.3 函数的连续性	(28)
3.3.1 函数的连续性定义	(28)
3.3.2 初等函数的连续性	(30)

3.3.3 闭区间上连续函数的性质	(31)
3.4 本章小结	(32)
3.4.1 内容提要	(32)
3.4.2 疑点解析	(32)
习题 3	(32)
第 4 章 导数与微分	(35)
4.1 导数的概念	(35)
4.1.1 两个实例	(35)
4.1.2 导数的概念	(36)
4.1.3 可导与连续的关系	(39)
4.1.4 求导举例	(40)
4.2 求导法则	(41)
4.2.1 函数的和、差、积、商的求导法则	(41)
4.2.2 复合函数的求导法则	(42)
4.2.3 反函数的求导法则	(44)
4.2.4 基本初等函数的求导公式	(45)
4.2.5 三种常用的求导方法	(46)
4.2.6 高阶导数	(48)
4.3 微分	(49)
4.3.1 微分的概念	(49)
4.3.2 微分的几何意义	(51)
4.3.3 微分的运算法则	(51)
4.3.4 微分在近似计算中的应用	(52)
4.4 本章小结	(54)
4.4.1 内容提要	(54)
4.4.2 疑点解析	(54)
习题 4	(54)
第 5 章 导数的应用	(57)
5.1 微分中值定理	(57)
5.2 洛必达法则	(59)
5.3 函数的单调性、极值与最值	(62)
5.3.1 函数的单调性	(62)
5.3.2 函数的极值	(64)
5.3.3 函数的最大值与最小值	(66)
5.4 函数图形的凸向与拐点	(68)
5.5 本章小结	(72)
5.5.1 内容提要	(72)
5.5.2 疑点解析	(72)
习题 5	(73)

第6章 不定积分	(75)
6.1 不定积分的概念及性质	(75)
6.1.1 不定积分的概念	(75)
6.1.2 基本积分公式	(77)
6.1.3 不定积分的性质	(77)
6.2 不定积分的积分方法	(79)
6.2.1 第一换元积分法(或称凑微分法)	(79)
6.2.2 第二换元积分法	(82)
6.2.3 分部积分法	(85)
6.2.4 简单有理函数的积分	(88)
6.3 本章小结	(91)
6.3.1 内容提要	(91)
6.3.2 疑点解析	(92)
习题6	(92)
第7章 定积分	(95)
7.1 定积分的概念及性质	(95)
7.1.1 定积分的实际背景	(95)
7.1.2 定积分的概念	(96)
7.1.3 定积分的几何意义	(97)
7.1.4 定积分的性质	(98)
7.2 微积分基本公式	(100)
7.2.1 变上限的定积分	(100)
7.2.2 微积分基本公式	(102)
7.3 定积分的计算方法	(103)
7.3.1 定积分的换元法	(103)
7.3.2 定积分的分部积分法	(105)
7.4 无限区间上的广义积分	(106)
7.5 本章小结	(108)
7.5.1 内容提要	(108)
7.5.2 疑点解析	(108)
习题7	(109)
第8章 定积分的应用	(111)
8.1 定积分的几何应用	(111)
8.1.1 定积分的微元法	(111)
8.1.2 用定积分求平面图形的面积	(112)
8.1.3 用定积分求体积	(115)
8.1.4 平面曲线的弧长	(117)
8.2 定积分的物理应用举例	(119)
8.3 本章小结	(121)
8.3.1 内容提要	(121)

8.3.2 疑点解析	(121)
习题 8	(123)
第 9 章 常微分方程	(125)
9.1 常微分方程的基本概念	(125)
9.2 一阶微分方程与可降阶的高阶微分方程	(126)
9.2.1 可分离变量的微分方程	(126)
9.2.2 齐次型微分方程	(128)
9.2.3 一阶线性微分方程	(128)
9.2.4 可降阶的高阶微分方程	(130)
9.3 二阶常系数线性微分方程	(132)
9.3.1 二阶线性微分方程解的结构	(132)
9.3.2 二阶常系数齐次线性微分方程的解法	(133)
9.3.3 二阶常系数非齐次线性微分方程的解法	(134)
9.4 微分方程在数学建模中的应用	(138)
9.5 本章小结	(144)
9.5.1 内容提要	(144)
9.5.2 疑点解析	(145)
习题 9	(146)
第 10 章 空间解析几何与向量	(149)
10.1 空间直角坐标系与向量的概念	(149)
10.1.1 空间直角坐标系	(149)
10.1.2 向量的概念及其线性运算	(150)
10.1.3 向量的坐标表示	(151)
10.2 向量的数量积与向量积	(154)
10.2.1 向量的数量积	(154)
10.2.2 向量的向量积	(156)
10.3 平面与直线	(158)
10.3.1 平面方程	(158)
10.3.2 直线方程	(162)
10.4 曲面与空间曲线	(166)
10.4.1 曲面方程的概念	(166)
10.4.2 柱面	(167)
10.4.3 旋转曲面	(168)
10.4.4 二次曲面	(169)
10.4.5 空间曲线及其在坐标面上的投影	(170)
10.5 本章小结	(172)
10.5.1 内容提要	(172)
10.5.2 疑点解析	(172)
习题 10	(173)

第 11 章 多元函数微分学	(176)
11.1 多元函数的概念、极限及连续	(176)
11.1.1 多元函数	(176)
11.1.2 二元函数的极限与连续	(178)
11.2 偏导数	(179)
11.2.1 偏导数	(179)
11.2.2 高阶偏导数	(181)
11.3 全微分	(182)
11.3.1 全微分的定义	(182)
11.3.2 全微分在近似计算中的应用	(184)
11.4 多元复合函数微分法及偏导数的几何应用	(184)
11.4.1 复合函数微分法	(184)
11.4.2 隐函数的微分法	(187)
11.4.3 偏导数的几何应用	(188)
11.5 多元函数的极值	(191)
11.5.1 二元函数的极值	(191)
11.5.2 多元函数的最大值与最小值	(192)
11.5.3 条件极值	(193)
11.6 本章小结	(194)
11.6.1 内容提要	(194)
11.6.2 疑点解析	(195)
习题 11	(196)
第 12 章 多元函数的积分学	(199)
12.1 二重积分的概念与计算	(199)
12.1.1 二重积分的概念与性质	(199)
12.1.2 在直角坐标系下计算二重积分	(201)
12.1.3 在极坐标系下计算二重积分	(205)
12.2 二重积分应用举例	(207)
12.3 对坐标的曲线积分	(209)
12.3.1 对坐标的曲线积分的概念与性质	(209)
12.3.2 对坐标的曲线积分的计算	(210)
12.4 格林公式	(213)
12.4.1 格林公式	(213)
12.4.2 平面上曲线积分与路径无关的条件	(213)
12.5 本章小结	(215)
12.5.1 内容提要	(215)
12.5.2 疑点解析	(215)
习题 12	(217)
第 13 章 无穷级数	(220)
13.1 数项级数	(220)

13.1.1	数项级数的概念与性质	(220)
13.1.2	正项级数及其敛散性	(222)
13.1.3	交错级数及其敛散性	(226)
13.1.4	绝对收敛与条件收敛	(226)
13.2	幂级数	(227)
13.2.1	幂级数的概念	(227)
13.2.2	幂级数的性质	(230)
13.2.3	将函数展开成幂级数	(231)
13.2.4	幂级数的应用	(235)
13.3	傅里叶级数	(237)
13.3.1	以 2π 为周期的函数展开成傅里叶级数	(237)
13.3.2	以 $2l$ 为周期的函数展开成傅里叶级数	(242)
13.4	本章小结	(243)
13.4.1	内容提要	(243)
13.4.2	疑点解析	(244)
习题 13		(246)
第 14 章	矩阵	(248)
14.1	矩阵及其运算	(248)
14.1.1	矩阵的概念	(248)
14.1.2	矩阵的加法	(249)
14.1.3	数与矩阵的乘法(数乘矩阵)	(250)
14.1.4	矩阵的乘法	(250)
14.1.5	矩阵的转置	(253)
14.2	矩阵的初等行变换与矩阵的秩	(253)
14.2.1	矩阵的初等行变换	(253)
14.2.2	初等矩阵	(254)
14.2.3	矩阵的秩	(255)
14.3	方阵的行列式	(256)
14.3.1	方阵行列式的定义	(256)
14.3.2	行列式的性质	(257)
14.3.3	克拉默法则	(259)
14.4	逆矩阵	(261)
14.4.1	逆矩阵的概念	(261)
14.4.2	逆矩阵的性质	(261)
14.5	矩阵的应用	(264)
14.6	本章小结	(266)
14.6.1	内容提要	(266)
14.6.2	疑点解析	(267)
习题 14		(269)

第 15 章 数学实验	(272)
15.1 作函数图形、求数列或函数的极限的演示与实验	(272)
15.1.1 实验目的	(272)
15.1.2 原理与方法	(272)
15.1.3 内容与步骤	(272)
15.2 函数的导数的演示与实验	(275)
15.2.1 实验目的	(275)
15.2.2 原理与方法	(275)
15.2.3 内容与步骤	(275)
15.3 导数应用的演示与实验	(278)
15.3.1 实验目的	(278)
15.3.2 原理与方法	(278)
15.3.3 内容与步骤	(278)
15.4 函数积分的演示与实验	(279)
15.4.1 实验目的	(279)
15.4.2 原理与方法	(280)
15.4.3 内容与步骤	(280)
15.5 微分方程的解的演示与实验	(282)
15.5.1 实验目的	(282)
15.5.2 原理与方法	(282)
15.5.3 内容与步骤	(282)
15.6 多元函数的偏导数和重积分的演示与实验	(283)
15.6.1 实验目的	(283)
15.6.2 内容与步骤	(283)
15.7 级数的和、函数展开成幂级数的演示与实验	(286)
15.7.1 实验目的	(286)
15.7.2 内容与步骤	(286)
15.8 矩阵的基本运算的演示与实验	(288)
15.8.1 实验目的	(288)
15.8.2 内容与步骤	(288)
15.9 线性方程组的解的演示与实验	(291)
15.9.1 实验目的	(291)
15.9.2 内容与步骤	(291)
习题参考答案	(294)
习题 2	(294)
习题 3	(294)
习题 4	(295)
习题 5	(297)
习题 6	(298)
习题 7	(300)

习题 8 (300)

习题 9 (301)

习题 10..... (302)

习题 11 (304)

习题 12..... (306)

习题 13..... (307)

习题 14..... (308)

参考文献 (310)

第 1 章 绪 论

在科学技术研究中, 数学方法是一种必不可少的研究方法。按照马克思的看法, “一种科学只有成功地运用数学时, 才算达到真正完善的地步”。数学方法不但广泛应用于自然科学领域的研究活动中, 而且也广泛渗透到其他的研究活动中。高等数学方法是一种重要的研究方法。本章将对数学方法进行简单的介绍, 使读者对高等数学方法中的微积分方法所研究的基本问题有一个初步的了解, 并对怎样学习高等数学有一个初步的认识。

1.1 数学方法概述与作用

数学是研究现实世界的数量关系和空间形式的一门基础学科。在人类活动的早期, 由于生产的需要, 产生了算术与几何学, 算术运算后来又发展到一般字母符号的运算, 形成了代数学。从 16 世纪开始, 由于社会生产的要求, 使得代数与几何相结合, 产生了解析几何学。在解析几何学的基础上又产生了微积分, 形成了数学分析学。代数、几何与数学分析三大数学学科各自独立地发展, 互相联系和渗透, 加上其他学科的纵横交叉从而产生和分化出众多的数学分支。相对于初等数学, 它们被称为高等数学。

所谓数学方法, 就是运用数学所提供的概念、理论和方法对所研究的对象进行定量的分析、描述、推导和计算, 以便从量的关系上认识事物发展变化的规律性的方法。但是, 必须说明, 这里所说的数学方法, 不是指数学家研究数学的方法, 而是指除此之外的科研人员以数学概念和理论揭示所研究事物的内在联系和运动规律的方法。

那么, 数学方法具有哪些特点呢? 数学方法的特点与数学本身的特点是统一的。这些特点归纳起来有以下几个方面: 第一, 数学方法具有高度的抽象性。数学概念和理论的抽象性, 决定了数学方法的抽象性。在用数学方法解决问题时, 已经舍弃了研究对象的其他性质, 把全部问题变成了数学符号之间的运算关系。第二, 数学方法具有严密的逻辑性。数学方法在揭示事物量和量的关系时, 不是通过直接的实验方法来实现的, 而是通过一系列的逻辑推理和逻辑证明之后才认为是正确的。这样, 数学方法具有比其他科学方法更严格的逻辑特性。第三, 数学方法具有严格的确定性。数学是描述事物量的关系的科学, 而量是严格确定的。虽然量也可能以变化状态出现, 但它在每个确定条件下都有确定值。第四, 数学方法具有应用的广泛性。这是数学方法最重要的特点。数学的生命力的源泉在于它的概念和结论尽管极为抽象, 但是它们都是从实践中来的, 在实践中研究对象量和量的关系。任何科学都有自己的研究对象和应用范围, 而量和量的关系贯穿于一切领域和一切事物中, 在对不同的领域和不同的事物进行定量分析时, 都离不开数学方法。因此, 同其他科学方法相比, 数学方法具有更加广泛的应用范围。

在科学研究中, 定量分析和精确计算是掌握客观规律的根本途径。而数学方法是对客观事物进行定量分析和精确计算的重要手段。由于数学具有高度的抽象性、严密的逻辑性、严格的确定性和广泛的适用性等特点, 在长期的发展中创造了一系列的概念、理论和方法, 再加上电子计算机的出现和应用, 使得数学方法能适应现代科学技术发展的要求, 在科学技术

研究中起着越来越重要的作用。

数学方法的第一个作用是它为科学研究提供定量分析和精确计算的手段；第二个作用是它为科学研究提供了一种简洁精确的形式化语言；第三个作用是它为科学研究提供了逻辑推理和科学抽象的工具；最后，数学方法还为总结科学理论和创立新学科提供新的手段。

数学模型方法是解决科学技术问题最重要、最常用的一种数学方法。所谓数学模型方法，就是通过建立和研究客观事物的数学模型来揭示事物的本质特征和变化规律的一种方法。这种方法将在本书的有关章节中进行详细讨论。

本书所介绍的高等数学方法，称为高等数学。它是高职高专各专业必修的一门重要基础课，内容主要包括一元函数微积分学、多元函数微积分学、微分方程、无穷级数、矩阵等等，其核心内容是微积分。工程技术人员在所建立的数学表达式中一些繁琐的数学计算与推理，运用微积分方法，过去只能由数学专业人员才能完成的，由于电子计算机与数学应用软件的发展，现在也可以由一般工程技术人员借助计算机与数学应用软件方便地完成。因此，训练学生掌握数学应用软件的使用已成为高等数学教学内容的一部分。

1.2 微积分所研究的两个基本问题及方法

从研究常量到研究变量，是数学发展中的一个转折点。初等数学主要采用形式逻辑的方法，静止地、孤立地研究问题，而高等数学则是用运动的、变化的观点去研究问题。下面，用“速度问题”和“面积问题”这两个经典问题为例，介绍微积分的基本方法。

1. 变速直线运动的瞬时速度

物体最简单的运动是直线运动。在直线运动中，有两种运动：一种是速度始终保持不变的运动，称为匀速直线运动；一种是速度有变化的运动，称为变速直线运动。客观实际中的直线运动常常是变速的，例如，火车和汽车的行驶，飞机的飞行与物体的降落等等，都是变速运动。

设物体沿着直线运动，所走过的路程为 s ，所花费的时间为 t ，匀速直线运动的速度为 v ，则有公式

$$v = \frac{s}{t} \quad (1.1)$$

问题是如何求变速直线运动的速度，下面举例来说明。

例 1.1 求自由落体的运动速度。

由常识可知，从空中落下来的物体越落越快，速度是变化的。假定物体在初始时刻是静止的，并且忽略空气阻力的作用，则在时间 t 内下落的路程 s 由下列公式给出：

$$s = \frac{1}{2} g t^2 \quad (1.2)$$

其中 g 是重力加速度。现在要计算自由落体在每一个时刻的速度，即所谓瞬时速度。

对于匀速直线运动中每一个时刻的速度，可用公式 (1.1) 计算，而对于变速直线运动，如自由落体运动，其速度是随时间变化而变化的，这时不能用公式 (1.1) 计算，用公式 (1.1) 只能算出这段时间内的平均速度，而不能算出这段时间内每一时刻的速度。如何解决这个问题？为此，可以先考察某一很小时间段内速度的变化情况，在整段时间内，速度是变化的，但在很小时间段内，速度可以近似地看成是不变的，即可以近似地“以匀速代变速”来计算。

利用这种思想方法,为了求自由落体在时刻 t_0 的瞬时速度 $v(t_0)$,考察从时刻 t_0 到时刻 $t_0 + \Delta t$ 这段时间内的运动,这里 Δt 表示从时刻 t_0 开始的一段时间。由式(1.2),在这段时间,自由落体所走过的路程为

$$\Delta s = \frac{1}{2} g(t_0 + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} g t_0^2 = g t_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} g (\Delta t)^2$$

如果 Δt 很小,在这段时间内,运动就可以近似地看成是匀速的,所以就可以用这段时间内的平均速度 $\bar{v}(t_0)$ 来表示,即

$$\bar{v}(t_0) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{g t_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} g (\Delta t)^2}{\Delta t} = g t_0 + \frac{1}{2} g \cdot \Delta t \quad (1.3)$$

来近似地代替时刻 t_0 的瞬时速度 $v(t_0)$,即 $v(t_0) \approx \bar{v}(t_0)$, Δt 越小,近似程度越高。但是,无论 Δt 多么小,平均速度 $\bar{v}(t_0)$ 总还是瞬时速度 $v(t_0)$ 的近似值,而不是它的精确值。

为了解决近似值与精确值这对矛盾,即如何把近似值转化为精确值,只要将 Δt 无限地趋近于0,即当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,平均速度 $\bar{v}(t_0)$ 无限接近一个确定的常数就是瞬时速度 $v(t_0)$,记为

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v}(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

因此,在平均速度 $\bar{v}(t_0)$ 的计算公式(1.3)中,当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,得

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v}(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(g t_0 + \frac{1}{2} g \cdot \Delta t \right) = g t_0$$

这就算出了自由落体在时刻 t_0 的瞬时速度 $v(t_0) = g t_0$ 。在把近似值转化为精确值的过程中运用的方法称为取极限。

上述计算的思想方法可以简单表示为:局部以匀速代替变速,以平均速度代替瞬时速度,然后通过取极限的方法,把瞬时速度的近似值转化为它的精确值。

变速直线运动的瞬时速度问题及其求解方法引出微积分中的一个基本问题——微分学。在微分学中的基本概念就是导数,导数就是从这类问题中抽象出来的。在本书的第4章将进一步研究这个问题。

2. 平面图形的面积问题

平面图形的面积的研究引出微积分中的另外一个基本问题——积分学。为此,举例来说明平面图形的面积的求法。

例 1.2 设给定一个如图 1.1 所示的平面图形,它由抛物线 $y = x^2$,直线 $x = 1$ 及 Ox 轴所围成,试计算这个平面图形的面积。

由于该平面图形有一边是曲的,称为曲边三角形,其面积不能用初等数学的方法计算,出现了“曲与直”的矛盾。

为了解决这一矛盾,利用把面积分割成很小的块的思想方法,先把 x 轴上从0到1这线段分成许多小段,再从所有分点引平行于 y 轴的直线,将整个平面图形分成许多很窄的竖条。虽然每一个

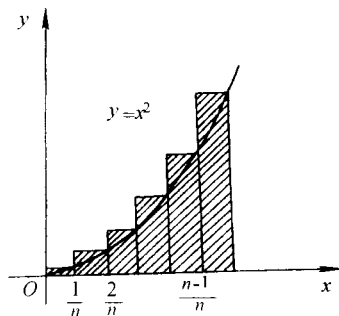


图 1.1