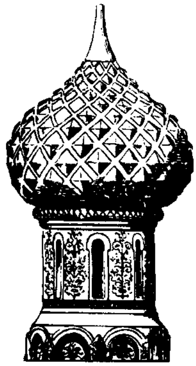
俄罗斯数学
教材选译

常微分方程

(第6版)

□ Л. С. 庞特里亚金 著
□ 林武忠 倪明康 译

高等教育出版社
Higher Education Press



俄 罗 斯 数 学
教 材 选 译

● 数学天元基金资助项目

常微分方程

(第6版)

□ Л. С. 庞特里亚金 著
□ 林武忠 倪明康 译

高等教育出版社
Higher Education Press

图字：01-2005-5737 号

Л. С. Понтрягин
Обыкновенные дифференциальные уравнения, 2001

Originally published in Russian under the title
The ordinary differential equations by L. S. Pontryagin

图书在版编目（CIP）数据

常微分方程：第 6 版 / （俄罗斯）庞特里亚金著；林武忠，倪明康译. —北京：高等教育出版社，2006.6
ISBN 7-04-018399-4

Ⅰ.常… Ⅱ.①庞…②林…③倪… Ⅲ.常微分方程－高等学校－教材 Ⅳ.0175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 052384 号

策划编辑 张小萍　　责任编辑 赵天夫　　封面设计 王凌波
责任印制 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787 × 1092　1/16	版　　次	2006 年 6 月第 1 版
印　　张	18	印　　次	2006 年 6 月第 1 次印刷
字　　数	340 000	定　　价	35.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 18399-00

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要. 《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为主, 也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材, 也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版, 但经多次修订重版, 面目已有较大变化, 至今仍广泛采用、深受欢迎, 反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力, 对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版, 将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来, 对推动我国数学课程设置和教学内容的改革, 对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才, 可望发挥积极的作用, 并起着深远的影响, 无疑值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

原书的序

本书是以我多年在国立莫斯科大学数学力学系教学的讲义为蓝本编写而成的. 在编写该课程教学大纲时我从这样的原则出发, 就是内容的选取不应该是随意的, 也不应该仅仅依靠原有的传统. 常微分方程在振动理论和自动控制理论中找到了相当重要的和引人入胜的应用, 这些应用也成了我选材的指导思想. 毫无疑问,振动理论和自动控制理论在整个近代物质文明的发展中起了十分重要的作用, 所以我认为, 这样选择课程材料的途径即使不是唯一的, 但在任何情况下也是合理的. 我希望给予大学生们的不只是对技术应用有效的纯粹数学工具, 同时也要展示应用的本身, 所以我在讲义中加进了一些技术问题, 它们在本书的第 13, 27, 29 节中进行讲述. 这些问题构成了我的课程, 因而也是本书不可分割的组成部分.

除了讲义中介绍的内容外, 还编入了一些在大学生讨论班上研究的比较困难的问题. 它们被放在本书的第 19, 31 节中. 包含在第 14, 22, 23, 24, 25, 30 节中的一部分内容在课堂上讲过, 但不是每年都讲.

为了读者的方便, 在本书的末尾添加了两个附录; 虽然它们不是常微分方程的内容, 但对学习该课程很重要. 在第一个附录 (上一版没有写) 中介绍了欧氏空间中集合的基本拓扑性质, 并给出了隐函数定理的证明; 第二个附录是有关线性代数的知识.

在这第二版中, 采用新方法介绍了解对初值和参数的连续依赖性和可微性定理, 并做了许多小的修改.

最后我想感谢我的学生和工作中的密友 В. Г. 博尔强斯基, Р. В. 加姆克列利泽和 Е. Ф.米先柯, 他们帮助我对本书的出版做了许多整理、编写和打印工作. 同样我想指出对我的科学兴趣起过决定性影响的前苏联杰出的振动理论和自动控制理论

专家亚历山大·亚历山大洛维奇·安德罗诺夫, 我与他多年来保持着友好的关系. 他的影响决定了本书的特点和方向.

Л. С. 庞特里亚金

目　录

第一章　引论

这一章首先给出下面就要研究的那些概念的定义, 譬如什么是常微分方程组, 什么叫做它的解, 以及存在多少这种解, 这样一些主要问题都要在本章中给以回答. 解的数量是由一些存在和唯一性定理来确定, 在这里只对它们进行叙述而不加以证明. 这些定理以及一系列其他同样类型定理的证明都将在第四章给出, 到那时在本章中所叙述的这些定理已经被多次用过而弄清楚它们的意义了. 除了这些基本知识以外, 在第一章还要给出几种最简单类型微分方程的解法. 本章最后讨论了复值函数的微分方程以及它们的复值解, 并且介绍了有关线性微分方程组的最简单知识.

§1. 一阶微分方程式

微分方程是指这样的方程, 其中未知的是单变量或多变量的 (一个或几个) 函数, 而且在方程中不仅含有函数本身而且含有它们的导函数. 如果方程中的未知函数是多变量函数, 那么称这类方程为**偏微分方程**; 否则, 即当所讨论的函数只是单变量函数时, 那么就称这种方程为**常微分方程**. 我们今后只讨论常微分方程.

因为在许多物理应用中, 未知待求函数的自变量是时间, 通常把它记为 t, 所以今后用 t 表示自变量; 而用 x, y, z 等表示未知函数. 函数关于 t 的导数一般用点来表示: $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$, 等.

当使用这种记法不方便或者不可能时, 我们就用带括弧的上标来指出导数的阶数, 例如, $x^{(n)} = \dfrac{d^n x}{dt^n}$.

首先我们着手讨论一个**一阶微分方程**, 亦即只含未知函数一阶导数的方程, 它

可以写成如下形式:

$$F(t, x, \dot{x}) = 0 . \tag{1}$$

这里t是自变量, x是t的未知函数, $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$是未知函数的导数; 函数F是三个变量的给定函数.

函数F可能不是对其变量所有的值都有定义, 所以要讨论**函数F的定义域**B. 这里的区域B指的是三个变量$t, x, \dot{x}$坐标空间中的点集. 当自变量t的函数$x = \varphi(t)$在某个区间$r_1 < t < r_2$(不排除$r_1 = -\infty, r_2 = +\infty$的情形)上有定义, 而且当用$\varphi(t)$代替(1)式中的$x$时, 得到了在整个区间$r_1 < t < r_2$上的恒等式, 就称这个函数$x = \varphi(t)$是方程(1)的**解**; 而称区间$r_1 < t < r_2$为解$\varphi(t)$的**定义区间**. 显然, 只有当函数$\varphi(t)$在整个区间$r_1 < t < r_2$上有一阶导数 (特别, 函数是连续的) 时才可能在关系式(1)中做替换$x = \varphi(t)$; 为了能够在关系式(1)中做替换$x = \varphi(t)$, 还必须使得当变量t在区间$r_1 < t < r_2$中取任一值时, 以$(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t))$为坐标的点属于函数$F$的定义集合$B$.

关系式(1)联系着三个变量t, x, $\dot{x}$. 在某些情形下, 它把变量$\dot{x}$确定作为自变量t, x的单值隐函数. 这时, 微分方程(1)等价于形式为

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{2}$$

的微分方程. 我们称(2)是**已解出导数的**微分方程, 它与较一般的微分方程(1)相比, 在某些方面更容易研究. 我们现在就是讨论已解出导数的方程, 且不再认为关系式(2)是由形式(1)的方程关于$\dot{x}$解出来的结果, 而是以两个自变量t, x的给定函数$f(t, x)$作为出发点.

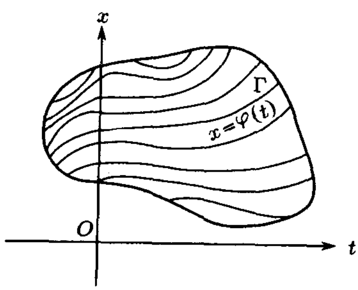


图 1

为了利用直观的几何表示, 我们在讨论中引进了变量t和x的坐标平面P; 这时, 我们将把自变量t放在横坐标轴上, 而把未知函数x放在纵坐标轴上. 确定微分方程(2)的函数f可能不是对自变量t和x所有的值都有定义, 或者用几何语言来说, 不是在平面P的所有点处而仅在P的某一集合Γ上有定义(图 1). 关于集合Γ, 我们今后总假设它是**开的**; 这就意味着, 对Γ中的每一点p, 同时还有一个中心在点p处, 半径为正的圆整个位于Γ中 (参看§32). 关于函数f还假设它本身及其偏导数$\dfrac{\partial f}{\partial x}$在整个集合$\Gamma$上都是$t, x$这对变量的连续函数. 于是方程(2)的解$x = \varphi(t)$在平面$P$上的几何表示就是以$x = \varphi(t)$为方程的曲线. 这条曲线处处有切线, 而且完全落在开集Γ中; 这条曲线就称为微分方程(2)的**积分曲线**.

存在和唯一性定理

如所周知, 在代数学中回答各种代数方程组解的个数问题的定理起了很大的作

用, 例如, 证明 n 次多项式正好有 n 个根 (有几重就算几个) 的**代数基本定理**就是这样. 完全一样, 在微分方程理论中, 有关微分方程存在多少个解的问题也是重要的理论问题. 结果是每一个微分方程都有一个**无限多个解**的集合, 所以对微分方程应当提出的不是关于解的个数问题, 而是关于如何描述给定微分方程所有解的集合. 在本节中叙述而不加证明的**存在和唯一性定理** (定理 1) 回答了这个问题. 至于这个定理的证明, 我们在本书相当后面 (见 § 20) 才给出.

定理 1 *给定微分方程*

$$\dot{x} = f(t, x); \tag{3}$$

假设函数 $f(t,x)$ 在变量 (t,x) 平面 P 的某一个开集 Γ 上有定义, 并且在整个开集 Γ 上函数 f 本身及其偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 都是 t, x 的连续函数; 那么定理断定:

1° 对于集合 Γ 的任一点 (t_0, x_0), 方程 (3) 都存在着解 $x = \varphi(t)$, 它满足条件:

$$\varphi(t_0) = x_0; \tag{4}$$

2° 如果 $x = \psi(t)$ 和 $x = \chi(t)$ 是方程 (3) 的两个解, 只要它们在某一个值 $t = t_0$ 处是一样的, 也就是如果满足

$$\psi(t_0) = \chi(t_0),$$

那么对于两者都有定义的变量 t 值, 它们是恒等的.

数 t_0, x_0 称为解 $x = \varphi(t)$ 的**初始值**, 而关系式 (4) 称为这个解的**初始条件**. 我们也说, 解 $x = \varphi(t)$ **满足初始条件** (4), 或者说它**具有初始值** t_0, x_0. 当确定 $x = \varphi(t)$ 满足初始条件 (4) (或者具有初始值 t_0, x_0) 时, 总认定解 $x = \varphi(t)$ 的定义区间 $r_1 < t < r_2$ 含有点 t_0.

于是定理 1 断定, 集合 Γ 任一点 (t_0, x_0) 的坐标都是方程 (3) 某一解的初始值, 并且两个具有相同初始值的解是完全一样的.

定理 1 的几何涵义在于, **通过集合 Γ 的每一点 (t_0, x_0), 有且只有方程 (3) 的一条积分曲线通过** (见图 1).

一般来说, 过集合 Γ 的每一点 (t_0, x_0) "只有一条" 积分曲线通过; 要是允许在某一点处不是这样, 那么方程 (3) 确实除了存在于完全确定区间 $r_1 < t < r_2$ 上有定义的解函数 $x = \varphi(t)$ 之外, 还可能存在函数 $x = \psi(t)$, 它也满足方程 (3) 以及具有同样初始值 t_0, x_0, 但它是在另外一个区间 $s_1 < t < s_2$ 上有定义. 定理 1 的第二部分断定: 仅在两者都有定义的区间上, 函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 才完全相同, 但是绝对没有说过, 它们的定义区间 $r_1 < t < r_2$ 和 $s_1 < t < s_2$ 是一样的.

如果区间中之一, 例如 $s_1 < t < s_2$, 完全包含了另一个区间, 那么我们就称定义在区间 $s_1 < t < s_2$ 上的解 $x = \psi(t)$ 为解 $x = \varphi(t)$ 的**延拓**. 这时人们的注意力自然都集中在那些既不能向左, 又不能向右延拓的解上. 我们称这种解为**不可延拓的解**. 不难证明 (但这将在较后面作出, 见 § 22), 每一个解都可以用唯一的方法延拓到不可延

拓解. 现在如果把不可延拓解放在积分曲线图之中, 那么过每一点 (t_0, x_0) 通过唯一积分曲线的结论就是正确的.

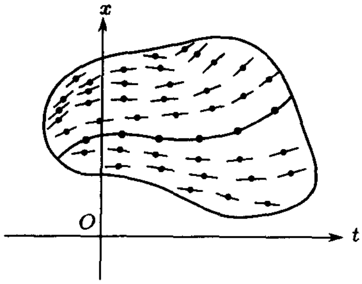


图 2

我们已经用函数 $\varphi(t)$ 的图形对方程 (3) 的每一解 $x=\varphi(t)$ 作了几何解释. 现在来给出方程 (3) 本身的几何解释: 过集合 Γ 的每一点 (t,x), 引一条斜率为 $f(t,x)$ 的直线 $l_{t,x}$, 我们就得到了对应于方程 (3) 的**方向场**, 这就给出了该方程的几何解释.

方程的几何解释与它的解的几何解释之间的联系是: **任一积分曲线** $x=\varphi(t)$ **在它的每一点** $(t,\varphi(t))$ **处与直线** $l_{t,\varphi(t)}$ **相切** (图 2).

例题

1. 为了说明定理 1 的意义 (在此是指它的第二部分), 我们求解微分方程

$$\dot{x} = \alpha x, \tag{5}$$

其中 α 是实数. 这里

$$f(t,x) = \alpha x,$$

从而函数 f 实际上只依赖于变量 x; 在这种情况下, 函数 f 的定义集合是整个平面 P. 函数 $f(t,x)=\alpha x$ 本身及其导数 $\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x}=\alpha$ 都是变量 t 和 x 在整个平面 P 上的连续函数, 因此, 对于方程 (5) 可以应用定理 1. 直接把函数

$$x = ce^{\alpha t} \tag{6}$$

代入方程 (5), 可以验证函数 (6) 的每一个函数都是方程 (5) 的解, 其中 c 是任一实数. 解 (6) 是不可延拓的, 因为它已经定义在整条直线 $-\infty<t<+\infty$ 上. 我们来证明, 当给数 c 以所有可能的值时, 就得到方程 (5) 所有的解. 假设 $x=\varphi(t)$ 是该方程的任意解, 我们来证明, 可以选择常数 c 使得 $\varphi(t)=ce^{\alpha t}$. 为此令 t_0 是解 $\varphi(t)$ 存在区间中的某一点, 而且 $x_0=\varphi(t_0)$. 于是我们若取 $c=x_0e^{-\alpha t_0}$, 则方程 (5) 的解 $x=\varphi(t)$ 和 $x=ce^{\alpha t}=x_0e^{\alpha(t-t_0)}$ 有相同的初始值 (t_0, x_0), 因此由定理 1 的第二部分, 它们是同一个解. 所以公式 (6) 给出了微分方程 (5) 所有解的集合.

2. 我们来给出放射性物质**衰变过程**的数学描述. 用 $x(t)$ 表示到时刻 t 还没有衰变的物质数量, 由物理的设想推出 (如果没有条件得到整个反应过程的话), 衰变速度, 即导数 $\dot{x}(t)$, 是与放射性物质尚未衰变的数量成正比:

$$\dot{x}(t) = -\beta x(t),$$

其中β是一个依赖于放射性物质性质的常数正比例系数，而右边的负号表示$x(t)$是减小的. 我们看出，函数$x(t)$满足例题1中所讨论的最简单的微分方程，所以

$$x(t) = c\,e^{-\beta t}.$$

为了确定常数c，只要指定初始值就够了. 例如，如果知道在时刻$t=0$时，物质的数量是x_0，那么$c = x_0$，而且有

$$x(t) = x_0\,e^{-\beta t};$$

这里衰变速度是用量纲为1/ 秒的量β表示的. 常常用所谓**半衰期**，即物质衰变一半所用的时间，来代替量β对衰变速度性质的描述. 以T表示半衰期，我们来建立量β与T之间的关系. 我们有

$$\frac{x_0}{2} = x_0\,e^{-\beta T},$$

由此得到

$$T = \frac{1}{\beta}\ln 2.$$

§2. 一些初等的求积方法

当我们研究微分方程时，所面临的主要问题就是求出它的解. 在微分方程理论中，正像在代数学中那样，关于所谓寻找方程解的问题可以用不同方式来理解. 在代数学中，最初是企图找出利用开根的办法来求出任意次方程解的一般公式，例如二次方程解的公式，三次方程解的卡尔旦 (Cardan) 公式和四次方程解的费拉里 (Ferrari) 公式. 后来证明了，运用开根来求解四次以上方程的一般公式是不存在的. 可是，始终存在着求出数值系数方程近似解的可能性，以及还可以研究方程的根对其系数的依赖性. 在微分方程理论中，解的概念大致也是这样演变的，开始时总是力图去求出微分方程的解，或者所谓“用求积方式积分出微分方程”，也就是说试图用初等函数以及它们的积分来表示出解. 以后，当弄清楚只有对少数类型的方程才存在这种意义下的解时，理论的重心就转移到对解的性态的一般规律性研究.

在这一节中，我们将介绍某些最简单一阶方程的求积方法.

(A) 全微分方程 我们来求解方程

$$\dot{x} = \frac{g(t,x)}{h(t,x)}, \tag{1}$$

它的右边是函数$g(t,x)$与函数 $h(t,x)$商的形式. 假设函数$g(t,x)$和$h(t,x)$在变量t, x平面P的某个开集Γ上有定义且连续，分母$h(t,x)$在这个集合的每一点处都不为零，而且表达式$h(t,x)dx - g(t,x)dt$在整个集合Γ上是全微分. 最后这个假设意味着存在一个定义于集合Γ上的函数$F(t,x)$，它在整个集合Γ上满足条件

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = h(t,x), \quad \frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = -g(t,x). \tag{2}$$

于是将方程 (1) 约定写成如下形式的方程

$$h(t,x)dx - g(t,x)dt = 0,$$

它的左边是全微分. 因此对方程 (1) 的每一个解 $x=\varphi(t)$, 都有恒等式

$$f(t,\varphi(t)) \equiv \text{常数}$$

成立. 反之, 每一个由 (含有任意常数 c 的) 方程

$$F(t,x) = c \tag{3}$$

确定的且定义在某个区间上的隐函数 $x=\varphi(t)$, 都是微分方程 (1) 的解.

我们来证明命题 (A). 设 $x=\varphi(t)$ 是微分方程 (1) 定义在区间 $r_1 < t < r_2$ 上的解, 于是对这个区间所有的点我们有

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{g(t,\varphi(t))}{h(t,\varphi(t))},$$

由此得到

$$h(t,\varphi(t))\dot{\varphi}(t) - g(t,\varphi(t)) = 0.$$

由 (2), 这个等式的左端是函数 $F(t,\varphi(t))$ 对 t 的全导数, 因此在整个区间 $r_1 < t < r_2$ 上有

$$\frac{d}{dt}F(t,\varphi(t)) = 0.$$

根据分析上的已知定理, 即知函数 $F(t,\varphi(t))$ 在整个区间上是常数.

反之, 设 $x=\varphi(t)$ 是方程 (3) 在某个区间上的解, 因此有

$$F(t,\varphi(t)) \equiv c.$$

将这个恒等式对 t 求导, 由 (2) 我们即得

$$h(t,\varphi(t))\dot{\varphi}(t) - g(t,\varphi(t)) = 0,$$

由此看出, $x=\varphi(t)$ 是微分方程 (1) 的解. 于是命题 (A) 得证.

在命题 (A) 中所叙述的结果可以作出如下几何解释. **微分方程 (1) 的每一条积分曲线都完全位于函数 $F(t,x)$, 亦即由方程 (3) 确定, 的某条水平线上. 反之, 每一条水平线的连通部分 (亦即方程 (3) 定义在某个区间 $r_1 < t < r_2$ 上解的图形) 都是积分曲线.**

由于函数 $F(t,x)$ 的水平线可能是由分开的几段组成, 所以在这种情况下 $F(t,x)$ 的水平线就不只是一条积分曲线, 而是分布着几条的积分曲线. 换句话说, 根据隐方程 (3), 一个常数 c 可能确定几个 (甚至无限多个, 参看例 3) 不同的不可延拓解.

(B) 线性方程 我们求解方程

$$\dot{x} = a(t)x + b(t), \tag{4}$$

其中 $a(t)$ 和 $b(t)$ 在某个区间 $r_1 < t < r_2$ (不排除 $r_1 = -\infty$ 和 $r_2 = +\infty$ 的情况) 上有定义且连续. 因此, 在平面 P 中的开集 Γ 是由加在 t 上的条件 $r_1 < t < r_2$ 和任意的 x 所确定. 如果 r_1 和 r_2 都是有限的, 那么这个集合 Γ 就是带形区域; 如果量 r_1, r_2 中只有一个是有限的, 那么这个集合就是半平面; 如果两个量 r_1, r_2 都是无限的, 那么就是平面. 在整个集合 Γ 上, 方程 (4) 右边的函数及其对 x 的偏导数都是连续的, 所以对于方程 (4), 定理 1 的条件都满足了. 令 t_0 为区间 $r_1 < t < r_2$ 中的某一个点. 我们记

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau. \tag{5}$$

函数 $A(t)$ 在整个区间 $r_1 < t < r_2$ 上都有定义. 于是, 方程 (4) 所有解的集合就写成公式

$$x = \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(\tau)}b(\tau)d\tau\right)e^{A(\tau)}, \tag{6}$$

这里 x_0 是任意常数. 这些解中的每一个都在整个区间 $r_1 < t < r_2$ 上有定义, 从而是不可延拓的 (因为在这个积分上下限之外, 方程 (4) 的右端没有定义).

为了证明命题 (B), 我们首先注意到关系式 (6) 给定的函数 x 是方程 (4) 的解. 这可用代入的方法直接验证.

我们证明公式 (6) 包含了方程 (4) 所有的解. 令 $x = \varphi(t)$ 是方程 (4) 定义在区间 $s_1 < t < s_2$ 上的任一解. 这个区间应当被包含在区间 $r_1 < t < r_2$ 之中, 因为方程 (4) 的右边只在区间 $r_1 < t < r_2$ 上有定义. 令 τ_0, ξ_0 为解 $x = \varphi(t)$ 的初始值. 我们证明, 可以这样选择公式 (6) 中的数 x_0, 使得用这个公式确定的解, 其初始值就是 τ_0, ξ_0,, 亦即满足条件

$$\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(\tau)}b(\tau)d\tau\right)e^{A(\tau_0)} = \xi_0. \tag{7}$$

由此即可证明 (见定理 1) 解 $x = \varphi(t)$ 与解 (6) 在整个区间 $s_1 < t < s_2$ 上完全一样.

关系式 (7) 对于未知量 x_0 来说是一次方程, 而且 x_0 的系数 $e^{A(\tau_0)}$ 不等于零, 从而方程 (7) 关于未知量 x_0 是可解的. 于是命题 (B) 得证.

为了进行对比, 我们介绍另一个 (在大量教科书中采用的) 便于记忆的有关公式 (6) 的推导. 首先考虑**齐次**方程

$$\dot{y} = a(t)y. \tag{8}$$

这是一个全微分方程 (见 (A)). 事实上, 它可约定写成形式

$$\frac{dy}{y} - a(t)dt = 0.$$

于是对应的函数 $F(t,x)$ 由公式

$$F(t,x)=\ln|y|-A(t)$$

给出, 因此根据 (A), 齐次方程 (8) 的解由关系式

$$\ln|y|-A(t)=c_1$$

的隐函数确定. 由此得到 $|y|=e^{A(t)+c_1}$, 或者写成另一个样子

$$y=c\,e^{A(t)}, \tag{9}$$

其中 c 可以取任意实数值. (这个推导含有不准确性, 因为函数 $h(t,y)=y$, 而 y 可以等于零, 从而命题 (A) 的第一个条件就不满足; 这种不准确性容易消除, 然而在此我们不这样做, 因为公式 (9) 只是公式 (6) 的特殊情形, 而后者在上面已完全证明.)

为了利用公式 (9) 去求出非齐次方程 (4) 的解, 我们利用所谓的**常数变易法**. 这就是寻找方程 (4) 具有 (9) 那样形式的解, 其中 c 已不再是常数, 而是变量 t 的某个未知函数. 将所设想的这个解代入方程 (4), 即得

$$\dot{c}\,e^{A(t)}+ca(t)e^{A(t)}=a(t)ce^{A(t)}+b(t),$$

或者同样写成

$$\dot{c}\,e^{A(t)}=b(t).$$

由此找到

$$c=\int e^{-A(t)}b(t)dt=x_0+\int_{t_0}^{t}e^{-A(\tau)}b(\tau)d\tau,$$

其中 x_0 为积分常数.

例题

1. 我们来求解所谓的**可分离变量方程**

$$\dot{x}=f(t)g(x).$$

我们假设函数 $f(t)$ 在区间 $r_1<t<r_2$ 上有定义且连续, 而函数 $g(x)$ 在区间 $q_1<x<q_2$ 上有定义、连续且不等于零. 于是所考虑的方程是一个全微分方程. 也就是它可以约定地写成形式:

$$\frac{dx}{g(x)}-f(t)dt=0.$$

其对应的函数 $F(t,x)$ 用公式

$$F(t,x)=\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{g(\xi)}-\int_{t_0}^{t}f(\tau)d\tau$$