

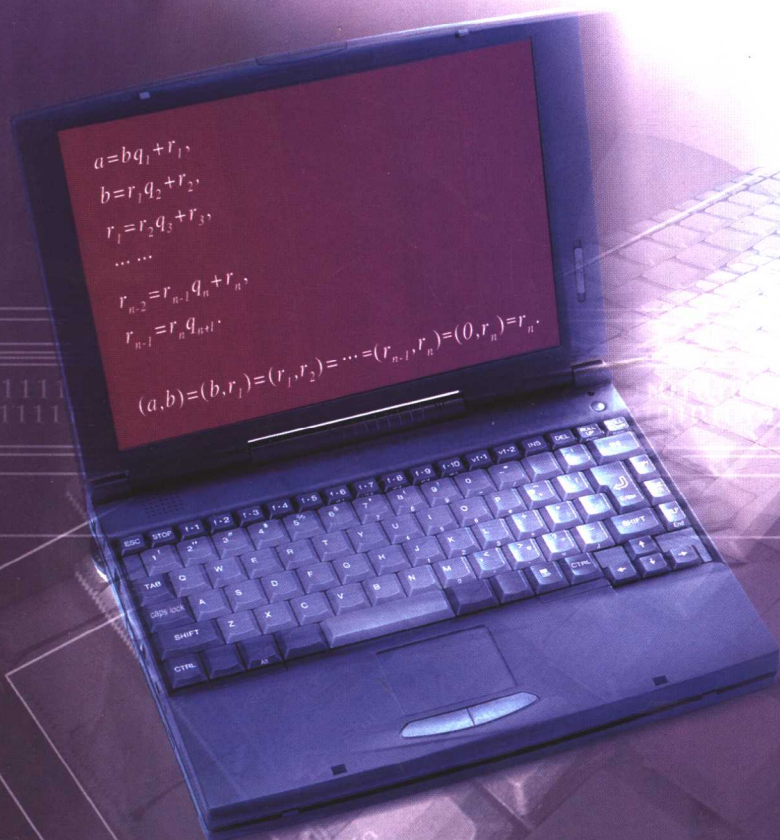
普通高中课程标准实验教科书

数学 选修 4-6

初等数论初步

教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所 编著
中学数学课程教材研究开发中心



人民教育出版社

A 版

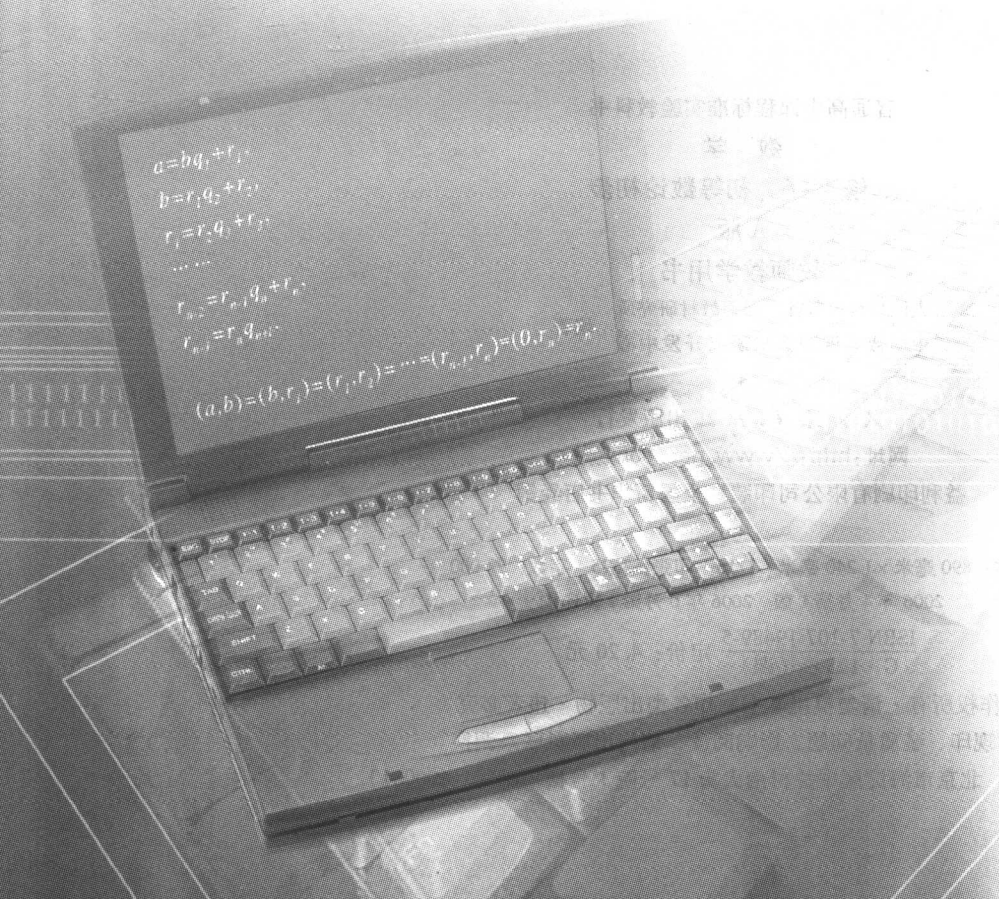
普通高中课程标准实验教科书

数学 选修 4-6

初等数论初步

教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所 编著
中学数学课程教材研究开发中心



人民教育出版社
A版

普通高中课程标准实验教科书

数 学

选修4-6 初等数论初步

A 版

教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著

*

人民教育出版社 出版发行

网址: <http://www.pep.com.cn>

益利印刷有限公司印装 全国新华书店经销

*

开本: 890 毫米×1 240 毫米 1/16 印张: 3.75 字数: 92 000

2006 年 4 月第 1 版 2006 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 7-107-19489-5
G·12579 (课) 定价: 4.20 元

著作权所有·请勿擅用本书制作各类出版物·违者必究

如发现印、装质量问题,影响阅读,请与出版科联系调换。

(联系地址: 北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼 邮编: 100081)

主 编：刘绍学

副 主 编：钱珮玲 章建跃

编 者：胡永建

责任编辑：张劲松

本教材以普通高中课程标准实验教科书《数学(A版)》为基础，在保持原有教材整体框架的基础上，对教材进行了重新编写。本教材包括必修教材、选修教材、教师用书和学生用书。本教材在编写过程中，广泛听取了专家、学者的意见和建议，力求做到科学、严谨、规范、实用。本教材在编写过程中，广泛听取了专家、学者的意见和建议，力求做到科学、严谨、规范、实用。

本教材在编写过程中，广泛听取了专家、学者的意见和建议，力求做到科学、严谨、规范、实用。本教材在编写过程中，广泛听取了专家、学者的意见和建议，力求做到科学、严谨、规范、实用。本教材在编写过程中，广泛听取了专家、学者的意见和建议，力求做到科学、严谨、规范、实用。

1. “亲和力”，以生动活泼的呈现方式，激发兴趣和美感，引发学习激情。

尽量选取与内容密切相关的、典型的、丰富的和学生熟悉的素材，用生动活泼的语言，创设能够引发学生思考的问题情境，使学生感到数学是有趣的、有用的，使学习数学成为自觉自愿的行为。在体现知识形成过程中，注重对数学思想方法的渗透，使学生对数学产生浓厚的学习兴趣，引发学生“刨个究竟”的冲动，从而积极主动地投入学习。

在体现知识形成过程中，注重对数学思想方法的渗透，使学生对数学产生浓厚的学习兴趣，引发学生“刨个究竟”的冲动，从而积极主动地投入学习。在体现知识形成过程中，注重对数学思想方法的渗透，使学生对数学产生浓厚的学习兴趣，引发学生“刨个究竟”的冲动，从而积极主动地投入学习。

2. “问题性”，以恰当的问题引导学生思考，培养问题意识，孕育创新精神。

在知识形成过程的“关键点”上，在应用数学思想方法产生问题策略的“转折点”上，在数学知识之间联系的“跃结”上，在数学问题之间联系的“发源点”上，在学生思维的“最近发展区”内，通过“观察”“思考”“探究”等环节，提出恰当的问题，使学生对数学产生浓厚的学习兴趣，引发学生“刨个究竟”的冲动，从而积极主动地投入学习。

问题是创新的开始，“看过问题不思考，不会做题也空问”只有通过恰当的问题，提出好问题，培养学生主动提问的习惯，使他们对问题产生浓厚的兴趣，引发他们更加主动、有兴趣地学，富有实践性地学，逐步培养学生的创新意识，孕育创新精神。

3. “思想性”，通过上升地安排核心数学概念和重要数学思想，加强数学思想方法的渗透与概括。

以数及其运算、函数、方程与不等式、数形结合、向量、导数、统计、随机观念、算法等数学核心概念和基本思想为骨架，贯穿在教材的“灵魂”，体现寻求一般性概

说明

人教版普通高中课程标准实验教材·数学(A版),是以教科书为基础的系列化教材,包括基本教材和配套教学资源.基本教材是教科书和教师教学用书,配套教学资源包括新课程导学·数学、教学设计与案例、教学投影片、信息技术支持系统等.

人教版《普通高中课程标准实验教科书·数学(A版)》包括教育部制定的《普通高中数学课程标准(实验)》中规定的全部内容.本套教科书在坚持我国数学教育优良传统的前提下,认真处理继承、借鉴、发展、创新之间的关系,体现**基础性、时代性、典型性和可接受性**等,具有如下特点:

1. “亲和力”:以生动活泼的呈现方式,激发兴趣和美感,引发学习激情.

尽量选取与内容密切相关的、典型的、丰富的和学生熟悉的素材,用生动活泼的语言,创设能够体现数学的概念、结论及其思想方法发生发展过程的学习情境,使学生感到数学是自然的,水到渠成的,激发学生对数学的亲切感,引发学生“看个究竟”的冲动,兴趣盎然地投入学习.

在体现知识归纳概括过程中的数学思想、解决各种问题中数学的力量、数学探究和论证方法的优美和精彩之处、数学的科学和文化价值等地方,将作者的感受用“旁批”等方式呈现,与学生交流,增强了教科书的“亲和力”,启发学生更深入的数学思考,不断引发学习激情.

2. “问题性”:以恰时恰点的问题引导数学活动,培养问题意识,孕育创新精神.

在知识形成过程的“关键点”上,在运用数学思想方法产生解决问题策略的“关节点”上,在数学知识之间联系的“联结点”上,在数学问题变式的“发散点”上,在学生思维的“最近发展区”内,通过“观察”“思考”“探究”等栏目,提出恰当的、对学生数学思维有适度启发的问题,引导学生的思考和探索活动,使他们经历观察、实验、猜测、推理、交流、反思等理性思维的基本过程,切实改进学生的学习方式.

提问是创新的开始.“看过问题三百个,不会解题也会问”,通过恰时恰点地提出问题,提好问题,给学生示范提问的方法,使他们领悟发现和提出问题的艺术,引导他们更加主动、有兴趣地学,富有探索性地学,逐步培养学生的问题意识,孕育创新精神.

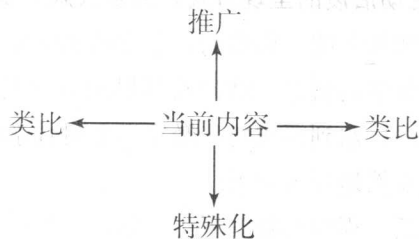
3. “思想性”:螺旋上升地安排核心数学概念和重要数学思想,加强数学思想方法的渗透与概括.

以数及其运算、函数、空间观念、数形结合、向量、导数、统计、随机观念、算法等数学核心概念和基本思想为贯穿整套教科书的“灵魂”,体现寻求一般性模

式的思想和追求简洁与形式完美的精神等，引导学生领悟数学本质，体验数学中的理性精神，加强数学形式下的思考和推理训练，从而提高教科书的“思想性”。

4. “联系性”：通过不同数学内容的联系与启发，强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法的运用，学习数学地思考问题的方式，提高数学思维能力，培育理性精神。

利用数学内容的内在联系，使不同的数学内容相互沟通，提高学生对数学的整体认识水平。特别地，在教科书中强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法，尽最大可能展示以下常用的逻辑思考方法：



以使学生体会数学探索活动的基本规律，逐步学会借助数学符号和逻辑关系进行数学推理和探究，推求新的事实和论证猜想，从而发展学生认识事物的“数”“形”属性和规律、处理相应的逻辑关系的悟性和潜能，养成逻辑思维的习惯，能够有条理地、符合逻辑地进行思考、推理、表达与交流。

教科书力求使数学内容的呈现做到脉络清晰，重点突出，体系简约，在学生原有认知结构基础上，依据数学学习规律、相关内容在不同模块中的要求以及数学内在的逻辑联系，以核心知识（基本概念和原理，重要的数学思想方法）为支撑和联结点，循序渐进、螺旋上升地组织学习内容，形成结构化的教材体系。

选修系列4的教师教学用书，按照相应教科书的内容顺序编排，包括总体设计、教科书分析、习题解答、教学设计案例、自我检测题、拓展资源等栏目。

1. 总体设计是对整个专题作概括性介绍，重点说明教科书设计思想，包括：课程目标、学习目标、内容安排（知识结构框图及说明）、课时分配等。

(1) 课程与学习目标说明学生通过学习本专题内容应达到的要求，表述时关注了目标的可测性；

(2) 内容安排中给出了本专题的知识结构框图及其对内容安排的概括性说明，以利于教师从整体上把握本章知识发生、发展的脉络；

(3) 课时分配根据具体内容的分量提出课时分配的建议，教师可以根据自己的教学实际进行调整。

2. 教科书分析按照教科书内容顺序、以讲为单位进行分析,着重说明了编写意图与教学建议. 主要包括:本讲知识结构、重点与难点、编写意图与教学建议等.

(1) 本讲知识结构说明本讲知识点及其发生、发展过程(逻辑关系). 说明学习本讲内容时,涉及的前后相关知识,采用“知识框图”或“表格”的方式表述;

(2) 重点不仅指数学概念、数学结论,而且包括数学思想方法、数学能力等方面的内容;难点说明学生在学习过程中可能遇到的困难和问题;

(3) 编写意图与教学建议主要对教科书“为什么要这样写”进行分析,包括学习相应内容应具备的认知发展基础,如何理解其中的一些关键概念,知识中蕴含的数学思想方法,突破重点、难点的建议,如何激发学生学习兴趣,渗透能力培养,以及数学应用意识、创新意识的培养等;对例题要达到的目的进行说明;对“观察”“思考”“探究”中的内容以及边空的问题,给出解释或解答.

教学建议主要对教师如何引导学生学习进行分析,从教科书编写者的角度结合具体内容给教师提出一些建议.

(4) 教学设计案例选取了一些具有典型性的、教学难度大、新增知识、适宜使用信息技术的内容,包括概念课、研究(探究)课、习题课、复习课等不同课型. 具体包括了下面一些内容:

1° 教学任务分析重点对学习相应内容时的认知要求进行分析;

2° 教学基本流程以框图的形式表示出教学的基本进程;

3° 重点和难点表述了本课内容的重点,以及学习中可能碰到的困难;

4° 教学情境设计以“问题串”为主线,在提出问题的同时,说明了设计意图.

(5) 习题解答不仅给出解答过程,讲清楚“可以这样解”,而且还对一些典型问题分析了解答中的数学思想方法,说明“为什么可以这样解”,从而体现了习题作为巩固知识,深化概念学习,深刻理解知识,开展研究性学习,应用知识解决实际问题,培养学生的数学能力、创新精神和实践能力等功能.

(6) 拓展资源为教师提供了一些教学中有用的资料,既有知识性的,又有数学历史、数学文化方面的资料. 同时,在适当的地方,对数学教学中如何使用科学计算器、计算机、网络等进行说明或解释.

3. 自我检测题提供了本专题的自我检测题目,目的是检测学生掌握本专题知识内容的情况. 教学时,教师可直接使用.

本书是选修系列4-6《初等数论初步》的教师教学用书,它包含整数的整除、同余与同余方程、一次不定方程和数论在密码中的应用等四讲内容. 全书共18课

时，具体分配如下（仅供参考）：

第一讲 整数的整除	约 5 课时
第二讲 同余与同余方程	约 7 课时
第三讲 一次不定方程	约 3 课时
第四讲 数论在密码中的应用	约 2 课时
学习总结报告	约 1 课时

由于“第四讲 数论在密码中的应用”主要是介绍性的知识，属于学生了解的内容，供学生阅读。目的是进一步加深对数论在密码中应用的了解，知道数论不仅是一门学科，而且在实践中有广泛的应用。在本书“教科书分析”部分略去该讲相应的内容。

参加本书编写的是胡永建，责任编辑张劲松。

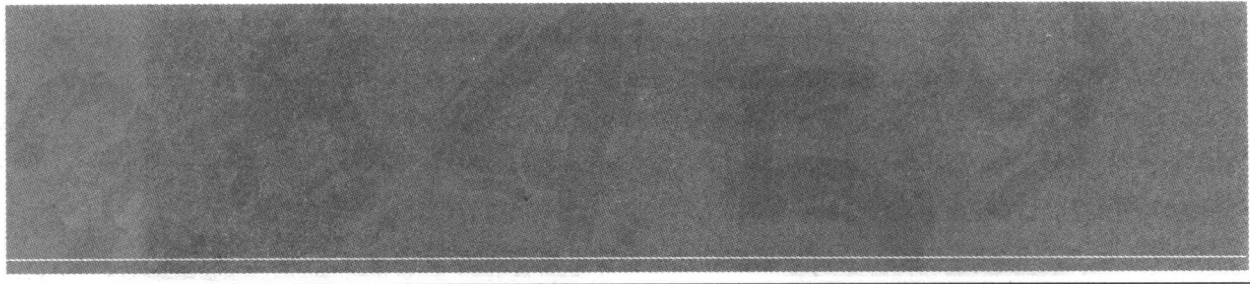
我们在广泛听取广大教师、教学研究人员意见的基础上，对教师教学用书进行了较大的改进，希望它能够较好地满足广大教师的教学需要。由于是对教师教学用书编写工作的一次新尝试，其中肯定存在许多值得改进的地方，希望广大教师在使用过程中提出宝贵意见，我们愿意根据大家的意见作出修正，使其更好地为教师教学服务。

目录

I 总体设计 1

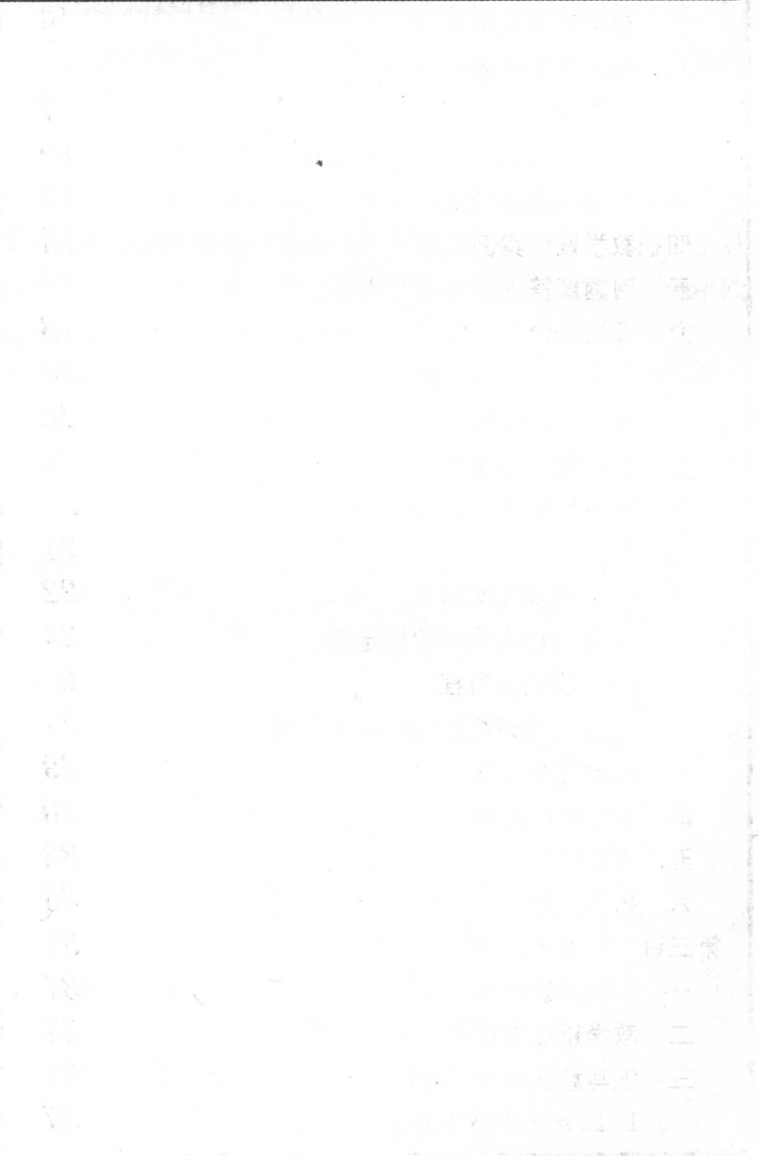
II 教科书分析 6

第一讲 整数的整除	6
一 本讲知识结构	6
二 教学重点与难点	6
三 编写意图与教学建议	7
1. 整除	7
2. 最大公因数与最小公倍数	10
3. 算术基本定理	13
四 教学设计案例	13
五 习题解答	16
六 拓展资源	18
第二讲 同余与同余方程	20
一 本讲知识结构	20
二 教学重点与难点	20
三 编写意图与教学建议	21
1. 同余	21
2. 剩余类及其运算	22
3. 费马小定理和欧拉定理	24
4. 一次同余方程	25
5. 拉格朗日插值法和孙子定理	27
6. 弃九验算法	29
四 教学设计案例	30
五 习题解答	32
六 拓展资源	35
第三讲 一次不定方程	37
一 本讲知识结构	37
二 教学重点与难点	37
三 编写意图与教学建议	37
1. 二元一次不定方程	37



2. 二元一次不定方程的特解	39
3. 多元一次不定方程	40
四 教学设计案例	41
五 习题解答	43
六 拓展资源	47

III 自我检测题 48



I 总体设计

一、课程与学习目标

1. 课程目标

本专题包括四方面内容：整数的整除、同余与同余方程、一次不定方程、数论在密码中的应用。

通过本专题学习，应当使学生达到如下目标：

- (1) 获得必要的数学基础知识和基本技能，理解基本的数学概念，理解定理的本质和证明过程，了解数学概念、定理等产生的相关背景和应用，能够解决与数论有关的一些简单的实际问题。
- (2) 通过不同形式的自主学习和探究活动，体验数学发现和创造的历程，掌握探究数学问题的基本方法，如类比、由特殊到一般、推广等，提高数学表达和交流的能力，发展独立获取数学知识的能力。
- (3) 提高数学地提出、分析和解决问题的能力，以及抽象概括、推理论证的能力，能够编写计算机程序解决一些简单的数论问题。
- (4) 发展数学应用意识和创新意识，对现实世界中的信息安全传送的数学模型进行思考和做出判断。
- (5) 体会数论中常用的数学思想方法，了解我国古代在数论方面取得的一些重要成就，提高学习数学的兴趣，树立学好数学的信心，形成锲而不舍的钻研精神和科学态度。
- (6) 开阔数学视野，逐步认识科学的科学价值、应用价值和文化价值，形成批判性的思维习惯，崇尚数学的理性精神。

2. 学习目标

第一讲 整数的整除

(1) 整除

①理解整除、因数和倍数的概念，能够证明整除的下列基本性质：

若 $a|b$, $b|a$, 则 $a=b$, 或 $a=-b$;

若 $a|b$, $b|c$, 则 $a|c$;

若 $a|b$, $a|c$, 则对任意整数 x, y , 恒有 $a|bx+cy$;

②探索能被 3, 9, 11, 7 等整除的整数的判别法，能够用判别法解决某些整除问题；

③理解带余除法的内容，能够用带余除法解决简单的数论问题，探索用取整函数表示带余除法中的商和余数；

④理解素数的概念，了解确定素数的一种方法，如埃拉托斯特尼筛法，知道素数有无穷多个；

⑤理解任何大于 1 的整数可以分解成一些素数的乘积。

(2) 最大公因数与最小公倍数

①理解公因数、最大公因数、互素等概念，通过实例探索利用辗转相除法求两个整数的最大公因数的方法；

②理解辗转相除法的算法程序框图，能够根据程序框图编写计算机程序，并在条件允许的情况下

上机实现：

③通过实例探索三个、多于三个整数的最大公因数的求法，体会由特殊到一般发现数学结论的方法；

④能够用辗转相除法证明最大公因数的如下重要性质：

设整数 a, b 不同时为零，则存在一对整数 m, n ，使得 $(a, b) = am + bn$ ；

⑤能够用最大公因数的上述性质证明整除的下列两条性质：

若 $a|bc$ ，且 $(a, b) = 1$ ，则 $a|c$ ；

设 p 为素数，若 $p|ab$ ，则 $p|a$ ，或 $p|b$ ；

⑥理解公倍数、最小公倍数的概念以及它们之间的整除关系，即两个非零整数的最小公倍数一定整除它们的公倍数；

⑦通过具体例子探索 (a, b) ， $[a, b]$ 和 ab 之间的关系，进一步体会由特殊到一般发现数学结论的方法；

⑧能够通过求最大公因数来求两个或多个非零整数的最小公倍数。

(3) 算术基本定理

①理解算术基本定理的内容和定理的证明过程；

②能够用素因数分解式计算两个整数的最大公因数和最小公倍数。

第二讲 同余与同余方程

(1) 同余

①理解同余的概念，认识同余和整除之间的内在联系；

②探索同余的下列三条基本性质：

$$a \equiv a \pmod{n}；$$

$$\text{若 } a \equiv b \pmod{n}，\text{ 则 } b \equiv a \pmod{n}；$$

$$\text{若 } a \equiv b \pmod{n}，b \equiv c \pmod{n}，\text{ 则 } a \equiv c \pmod{n}，$$

体会模 n 同余是整数之间的一种关系，利用它可以对整数集进行分类；

③能类比等式的性质，探究同余式的其他性质，体会类比探究数学问题的方法；

④理解同余意义下的消去律，以及消去律成立的条件；

⑤能够用同余的性质解决星期几问题，体会同余方法在解决整除问题中的应用。

(2) 剩余类及其运算

①理解剩余类的概念，以及剩余类的表示与代表元的选取无关；

②通过实例探索剩余类加法和剩余类乘法运算，理解剩余类加法和剩余类乘法运算的定义，开阔关于运算的眼界；

③理解模 n 的剩余类环的概念，认识一些具体的剩余类环；

④通过实例，探索剩余类加法和剩余类乘法运算遵循交换律、结合律和分配律；

⑤通过探索认识剩余类环中零元、单位元、负元和逆元，能类比数中的相反数和倒数的概念理解剩余类中的负元和逆元的概念；

⑥探索模 n 的剩余类环中一个非零元有逆元的充要条件，并能给出证明；

⑦体会数的乘法运算与剩余类乘法运算的联系和区别。

(3) 费马小定理和欧拉定理

①通过实例探索模 m (m 为素数) 的剩余类环中存在如下规律：

$$\text{对任意整数 } a，[a^m] = [a]；$$

由实例归纳出费马小定理，体会从特殊到一般发现数学结论的方法；

- ②理解费马小定理的内容和费马小定理的证明过程;
- ③理解欧拉定理内容的本质, 会证明欧拉定理;
- ④了解欧拉函数的概念及其表达式, 知道费马小定理是欧拉定理的特殊情形;
- ⑤通过具体的例子, 体会费马小定理和欧拉定理在整除问题和同余问题中的应用.

(4) 一次同余方程

①了解同余方程产生的背景, 理解一次同余方程及其解的概念, 认识一次同余方程的解与一元一次方程的解之间的联系与区别;

- ②探索一次同余方程 $ax \equiv b \pmod{n}$ 有解的充要条件、解的个数、有解时解的描述等问题;
- ③会解一次同余方程 $ax \equiv b \pmod{n}$;
- ④了解大衍求一术算法的历史背景和内容, 能够用现代数学的语言正确叙述大衍求一术的算法步骤;
- ⑤通过探索将大衍求一术算法步骤中余数 r_i 表示成 $ax + ny$ 形式的规律, 理解大衍求一术的算法原理;
- ⑥能够用大衍求一术解形如 $ax \equiv 1 \pmod{n}$ 的一次同余方程.

(5) 拉格朗日插值法和孙子定理

①了解“物不知其数”问题、孙子定理(或中国剩余定理)、程大位的算法口诀及其相关的历史背景知识;

- ②认识同余方程组, 理解同余方程组解的概念;
- ③经历拉格朗日插值公式的建立过程, 体会先特解而后求通解的思路;
- ④能够依照先特解而后求通解的思路求解“物不知其数”问题, 并解释程大位的算法口诀;
- ⑤能够从实例抽象出孙子定理, 理解孙子定理的内容, 能用孙子定理求解一些简单的同余方程组.

(6) 弃九验算法

- ①理解弃九验算法的内容及其原理, 能够用弃九验算法验算算式的正确性;
- ②通过具体的例子, 认识弃九验算法只能“检错”, 不能“判正”的事实.

第三讲 一次不定方程

(1) 二元一次不定方程

- ①了解我国古代数学家在不定方程研究方面取得的重要成就;
- ②探索二元一次不定方程有整数解的条件、解的个数、有解时通解的描述等问题, 能够根据二元一次不定方程的一个特解写出通解的表达式;
- ③能够解一些简单的二元一次不定方程.

(2) 二元一次不定方程的特解

①理解用辗转相除法计算二元一次不定方程特解的过程以及算法程序框图, 尝试根据程序框图编写计算机程序, 在条件允许的情况下上机实现;

- ②能够用辗转相除法计算二元一次不定方程的一个特解.

(3) 多元一次不定方程

①经历三元一次不定方程有整数解的充要条件, 体会三元一次不定方程的解法, 会将三元一次不定方程化归为二元一次不定方程进行求解;

②探索四元一次不定方程有整数解的充要条件, 会将四元一次不定方程化归为二元一次不定方程进行求解.

第四讲 数论在密码中的应用

(1) 信息的加密与去密

①了解信息传送的一些简单模型和这些模型中信息传送的机制，了解同余在信息的加密和去密过程中的应用；

②了解传统信息传送模型在信息安全方面的不足。

(2) 大数分解和公开密钥

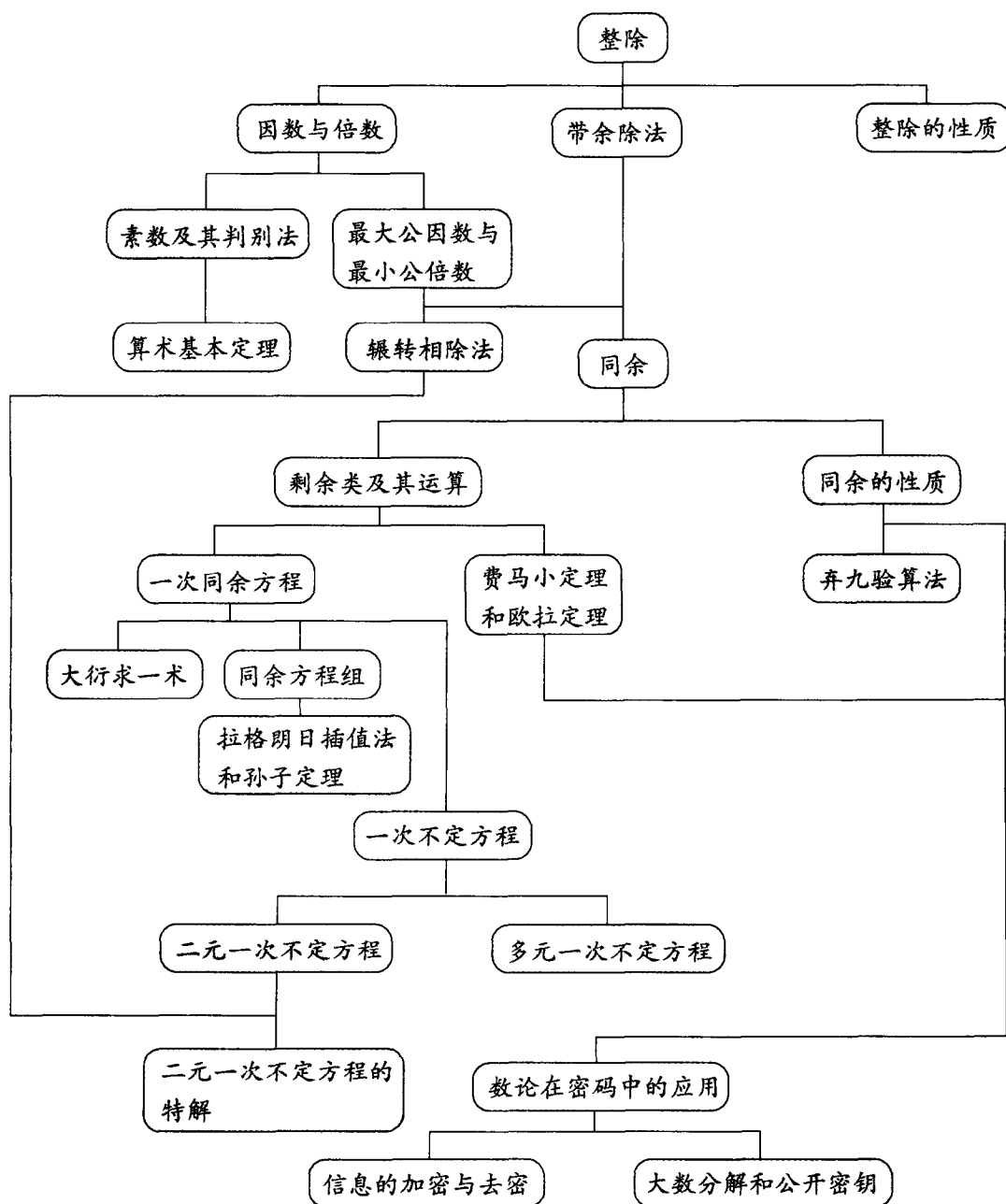
①了解大数分解和公开密钥体制，了解欧拉定理在公开密钥体制中的应用。



二、内容安排

1. 本专题知识结构框图

本专题分为四讲，每讲的内容有相对的独立性，同时又有内在的联系。知识结构框图如下：



2. 对内容安排的说明

学习初等数论的初步知识,可以培养学生的逻辑思维能力、发展学生的智力.围绕这个目标,本专题在内容的安排上体现如下特点:

(1) 注重知识系统性与逻辑性.第一、二、三、四讲的内容相对独立,每一讲的内容依托自身的逻辑起点展开,自成一个系统的知识体系,同时这四者之间又有一定的逻辑关系.例如,第一讲介绍的整数的整除理论是本专题其他三讲的理论基础,其中介绍的辗转相除法在第二讲求解一次同余方程和第三讲求解一次不定方程时经常要用到.又如,第二讲介绍的费马小定理和欧拉定理在通信技术中的重要应用体现在第四讲介绍的公开密钥体制中.另外,第二讲介绍的一次同余方程和第三讲介绍的一次不定方程可以相互转化,一个典型的例子就是“物不知其数”问题.

(2) 强调从特殊到一般地引入知识.例如,通过观察月历表中同一列整数被7除后的余数的特征,引出同余的概念.又如,通过考察一些特殊的模 n (n 为素数)的剩余类环中乘法运算的规律,归纳、猜想出费马小定理的结论,然后给出证明.这种由特殊到一般的引入方式,既符合知识产生的历程,也符合学生的认识规律,对于培养学生提出问题的意识和能力都是有益的.

(3) 突出知识的探究与发展.在重要性质的引入方面,通过知识形成的方式展开,力图使学生在经历知识的产生过程中认识对象和建构知识.本专题一方面在对重要结论的呈现上突出探究性,另一方面在一些例题和习题中渗透探究思想,使学生既掌握“概念性”知识,又掌握“方法性”知识,同时发展学生探究新知的能力.

(4) 在知识中渗透数学思想方法.本专题中的主要数学思想方法包括:特殊化思想方法、化归的思想方法、类比的思想方法、分类讨论的思想方法,还涉及到观察、猜想等合情推理的方法,也涉及到演绎推理、反证法等逻辑推理方法.这些思想方法以知识为载体,是在知识的学习中形成和发展的.



三、课时分配

本专题教学时间为18课时,具体分配如下(仅供参考):

第一讲 整数的整除	约5课时
一、整除的概念和性质	约2课时
二、最大公因数与最小公倍数	约2课时
三、算术基本定理	约1课时
第二讲 同余与同余方程	约7课时
一、同余	约1课时
二、剩余类及其运算	约2课时
三、费马小定理和欧拉定理	约1.5课时
四、一次同余方程	约1课时
五、拉格朗日插值法和孙子定理	约1课时
六、充九验算法	约0.5课时
第三讲 一次不定方程	约3课时
一、二元一次不定方程	约1课时
二、二元一次不定方程的特解	约1课时
三、多元一次不定方程	约1课时
第四讲 数论在密码中的应用	约2课时

- 一、信息的加密与去密
二、大数分解和公开密钥
学习总结报告

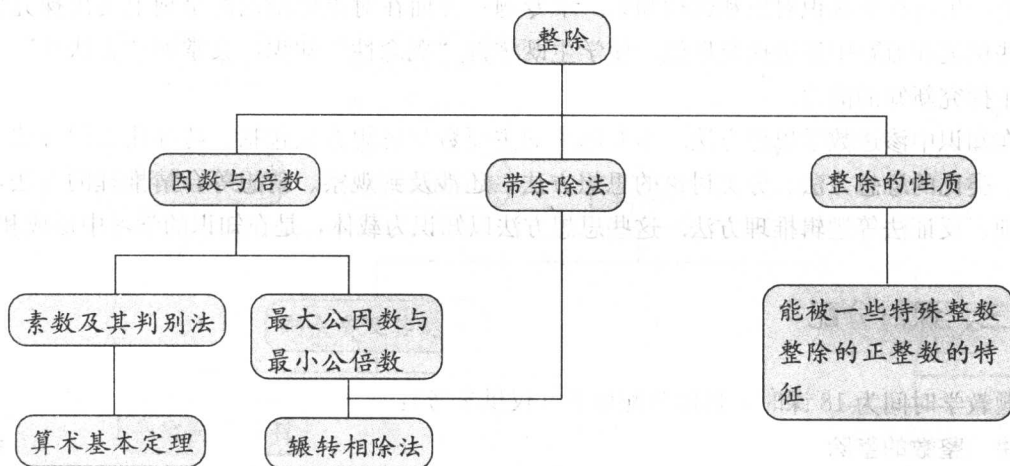
约1课时
约1课时
约1课时

II 教科书分析



第一讲 整数的整除

一、本讲知识结构



二、教学重点与难点

重点:

1. 理解整除、因数、倍数、素数、最大公因数与最小公倍数的概念和性质;
2. 理解带余除法的内容和证明过程;
3. 理解辗转相除法, 会用辗转相除法求两个整数的最大公因数;
4. 理解算术基本定理的内容与证明过程;
5. 体验整数整除的本质, 感受和体会蕴涵在知识与探究过程中的数学思想方法.

难点:

1. 带余除法定理的证明;
2. 应用辗转相除法求两个整数的最大公因数;
3. 理解最大公因数的性质, 并会灵活运用这些性质解决整除问题;
4. 算术基本定理的证明.



三、编写意图与教学建议

整数的整除理论是整个初等数论的基础. 学生在小学学习过整除的一些初步知识, 会运用整除的性质解决一些简单的数论问题. 需要指出的是, 小学阶段讨论的是自然数集合中的整除问题, 而这里讨论的是整数集合中的整除问题. 在介绍整除、因数、倍数、素数、最大公因数与最小公倍数这些概念时, 应注意前后表述之间的联系与差别.

在编写教科书时, 对一些基本的知识点, 如整除的性质、能被一些特殊整数整除的整数特征、最大公因数与最小公倍数的性质等, 我们不仅要求学生理解它们的内容, 还要求学生说清道理; 对一些重要的方法, 如带余除法、埃拉托斯特尼筛法、辗转相除法、素因数分解式等, 要求学生不仅会正确地运用这些方法解决简单的数论问题, 还懂得这些方法的基本原理.

教材在介绍新概念、新结论和新方法之前, 采用了观察、思考、探究等方式, 让学生首先有一个感性认识, 然后逐步上升到理性认识, 最后通过例题和练习进行巩固. 这种做法, 不仅可以降低学生的认知难度, 还可以提高学生学习的积极性, 培养学生提出问题、分析问题和解决问题的能力.

整除是本讲知识系统的逻辑起点, 由它引出因数、倍数的概念和带余除法, 再由因数和倍数引出素数及其判别法和最大公因数与最小公倍数, 后面两部分内容的讨论又分别引出了辗转相除法和算术基本定理, 其中辗转相除法是由有限次带余除法组成的.

1. 整除

从知识层面看, 本节由三部分内容构成: 整数的概念和性质、带余除法、素数及其判别法, 其中带余除法的证明是学生学习的难点. 从方法层面看, 本节涉及到观察、类比和特殊化方法. 教学中应从这两个层面去把握.

(1) 整除的概念和性质

介绍整除的概念时要注意如下几点: 一是概念引入的背景, 即除法运算在整数集合中的封闭性问题; 二是整除的概念是在整数集合中定义的, 而不是小学阶段的自然数集合, 要注意语言表述的准确性和新旧知识之间的内在联系, 在选用整除和不整除的例子时, 突出负整数的例子, 如 $6 \mid -24$, $-4 \nmid 14$ 等; 三是引导学生提出需要研究的问题, 如本讲在引言中提出的问题, 通过这些问题把本专题的内容紧密联系起来.

教科书第 3 页让学生探究的是整除的一些最基本、最常用的性质, 这些性质由整除的定义很容易给出证明. 例如, 性质 (1) 的证明如下:

因为 $a \mid b$, 所以 $b = ar$;

又因为 $b \mid a$, 所以 $a = bs$.

于是, $ab = ab(rs)$, 而又 $ab \neq 0$, 所以 $rs = 1$, 从而 $r = s = 1$, 或 $r = s = -1$.

当 $r = s = 1$ 时, $a = b$;

当 $r = s = -1$ 时, $a = -b$.

在介绍能被一些特殊整数 (如 3, 9, 11, 7) 整除的正整数的特征时, 我们采用的方式是先观察, 然后归纳、猜想, 最后给出证明. 限于篇幅, 教科书中只介绍了能被 3 整除的正整数的特征发现的过程和证明, 对于能被其他特殊的整数整除的正整数的特征作为学生探究的内容. 学生对能被 3, 9, 11, 7 整除的正整数的特征并不会太陌生, 所以教学时应把更多的注意力放在这些特征的证明上.

关于能被 3, 9, 11 整除的正整数的特征要用到整数的多项式表示形式:

$$\overline{a_n \cdots a_2 a_1 a_0} = a_n \times 10^n + \cdots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0. \quad (1)$$