高职考试复习用书

数学

（第三版第3次修订）

Gao Zhi Kaoshi Fuxi Yong Shu

浙江科学技术出版社

ISBN 7-5341-2152-3
9 787534 121524
01>
ISBN 7-5341-2152-3
定　价：17.80元

高职考试复习用书

数　学

(第三版第三次修订)

主　审　许斯夫　童少飞　徐光考

主　编　朱小平　谢幼平　季明华　吴持生

副主编　齐　健　李　慧　羊国锋　周小娟

　　　　曹沈华　章润生

浙江科学技术出版社

主　审　许斯夫　童少飞　徐光考

主　编　朱小平　谢幼平　季明华　吴持生

副主编　齐　健　李　慧　羊国峰　周小娟　曹沈华　章润生

编　委　季时金　陆平林　杨月荣　蔡新强　吕章国　李　慧　杨裕铨

羊国锋　吴持生　潘小兰　郭海英　张竹琴　包名新　金承森

周小娟　曹沈华　李家根　夏　辉　沈　伟　胡成锋　王苏华

方国新　叶茂生　田国康　曲文娟　朱小平　乔春林　许斯夫

严　洁　吴国民　吴持生　何小海　张大海　陈申宝　陈伟峰

陈勇军　金小红　周惠媛　洪明刚　徐光考　徐海之　黄鹏程

童少飞　楼永实　潘教斌

图书在版编目(CIP)数据

高职考试复习用书.数学/朱小平主编. –3 版.
杭州:浙江科学技术出版社,2003.8

ISBN 7-5341-2152-3

Ⅰ.高…　Ⅱ.许…　Ⅲ.数学课-职业高中-升学
参考资料　Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 064355 号

高职考试复习用书

数　学

(第三版第三次修订)

本书编写组

*

浙江科学技术出版社出版

浙江万盛达实业有限公司印刷

浙江省新华书店发行

开本:787×1092　1/16　印张:14.75　字数:380 000

2001 年 1 月第 1 版

2001 年 9 月第 2 版

2003 年 8 月第 3 版

2006 年 8 月第 8 次印刷

ISBN 7-5341-2152-3/G·428

定价:17.80 元

封面设计:孙菁

前　言

《高职考试复习用书·数学(第三版第三次修订)》是在2005年8月出版的《高职考试复习用书·数学(第三版第二次修订)》的基础上,按照部颁数学教学大纲的教学要求和人民教育出版社出版的职业高级中学数学教材的内容,广泛听取有关专家和读者的意见,进行了全面修改、重新编写。本次编写旨在系统复习和巩固教材中的数学知识,注重对基础知识的理解和掌握,提高数学能力和应试能力。

本书共分12章,按考点分章节编写,每节约为1至2课时,力求与复习课时同步,使其更具有针对性。前面11章每章设有模块构建、考试要点和考试分析等栏目,目的是使学生从系统上把握知识之间的联系,对基本要求心中有数,从而增强赢得高职考试的信心。每章中的每一节设有知识要点、知识解读、例题剖析、习题精选等栏目,旨在力争揭示"三基"的联系,并通过讲和练,使学生形成准确的、深刻的数学知识,养成触类旁通的数学能力。本书每章都提供了复习测试题,是本章的一次小结回顾,旨在提醒读者不断巩固"三基",不断加深和提高认识。第十二章提供3套综合基础试卷和3套全真模拟试卷,供老师和同学选用。书末是浙江省2006年高等职业技术教育招生考试数学试卷和参考答案。

在本书编写过程中,得到了杭州中策职业学校、萧山区第一中等职业学校、宁波北仑职业高级中学、海宁市职业高级中学、富阳市职业高级中学、温州华侨职业中专、东阳市技术学校、温岭市职业技术学校、龙游县职业技术学校、海盐县职业教育成人教育中心、湖州交通学校、浙江信息工程学校、丽水市职业高级中学、宁波市职教中心学校、绍兴市职教中心、绍兴县职教中心、安吉县综合高级中学、德清县职业中专、临安市中等职业技术学校、黄岩职业技术学校、嵊州市中等职业技术学校、永嘉县职业中学、椒江职业中专、桐庐职业技术学校、温州瓯海职业中专、龙泉市职业高级中学的领导和老师们的大力支持和帮助,在此表示诚势的谢意。

由于水平有限,错误之处在所难免,恳请老师和同学批评指正。

编　者

2006年8月

目　录

第一章　集合与数理逻辑

模块构建

集合与数理逻辑的模块构建如下：

- 集合的概念
  - 元素与集合的关系
  - 集合的表示方法
  - 集合的分类
- 集合间的关系
  - 子集 — 真子集
  - 相等
- 集合的运算
  - 并集
  - 交集
  - 补集
- 充分条件、必要条件与充要条件

考试要点

1. 了解集合的意义及其表示方法，了解空集、全集、子集、交集、并集、补集的概念及表示方法，了解符号$\subseteq$、$\subsetneqq$、$=$、$\in$、$\notin$ 等含义，并能运用这些符号表示集合与集合、元素与集合的关系，会求一个非空集合的子集，掌握集合的交、并、补运算.

2. 理解充分条件、必要条件、充分必要条件的意义.

考试分析

集合是高中数学的基础内容之一. 在每年的高职考试中有一道题目，一般都是基础题，综合性较小. 主要考查元素与集合的关系[如2003年高职试卷一(1)]、子集与真子集的概念[如2004年高职试卷三(22)]、集合的运算[如2006年高职试卷二(16)、2005年高职试卷一(1)]、充分条件与必要条件[如2004年高职试卷一(9)、2003年高职试卷一(2)]及运算能力；主要的思想方法是数形结合与分类思想.

第一节　集合的概念

知识要点

1. 集合中的元素具有________、________、________等性质.

2. 元素与集合的关系是________或________，分写用符号________或________表示.

3. 专用集合符号：自然数集、正整数集、整数集、有理数集、实数集分别用________、________、________、________、________表示.

4. 集合的表示方法有________、________、________等.

5. 如果集合A中的任一个元素都是B中的元素，则A叫做B的________，记作________. 若A是B的子集，且B中至少有一个元素不属于A，则A叫做B的________，记作________.

6. 把________的集合叫做空集，记作____，规定$\varnothing$______A，$\varnothing$______A（A非空）.

7. 若$A\subseteq B$，$B\subseteq A$，则A____B.

【答】 1. 确定性、无序性、互异性 2. 属于、不属于，$\in$、$\notin$ 3. **N**、**N***、**Z**、Q、R 4. 列举法、描述法、图示法 5. 子集，$A\subseteq B$，真子集，$A\subsetneqq B$ 6. 不含有任何元素，$\varnothing$，$\subseteq$，$\subsetneqq$ 7. =

知识解读

1. 准确理解和正确使用集合之间的关系符号（$\subseteq$，$\supseteq$，$\subsetneqq$，$\supsetneqq$，=等），以及元素与集合之间的从属关系符号（$\in$，$\notin$），不能混淆.

2. 能用适当的方法表示集合. 若集合的元素是“离散”的，一般用列举法表示；若集合的元素是“连续”的，一般用描述法表示；若要讨论集合间关系的，可形象地用文氏图表示.

3. 空集是任意集合的子集（$\varnothing\subseteq A$），空集是任意非空集合的真子集（$\varnothing\subsetneqq A$，且A非空），任意一个集合是它本身的一个子集（$A\subseteq A$）；要注意$\varnothing$、$\{0\}$、0三者的区别.

4. 在集合中元素不多时，能不重不漏地写出所有子集；含n个元素的有限集合A的子集个数是2^n个，真子集个数为(2^n-1)个，非空真子集个数为(2^n-2)个.

例题剖析

例1 填空：

(1)1______**N**；　(2)0______**N***；　(3)**R**______**Z**；　(4)$\varnothing$______**Q**；

(5)$\{1\}$______$\{1,2,3\}$；(6)1______$\{1,2,3\}$；　(7)0______$\{0\}$；　(8)$\{0\}$______$\varnothing$；

(9)0______$\varnothing$；　(10)$\{a,b\}$______$\{(a,b)\}$；(11)$\{1,2,3\}$______$\{3,2,1\}$.

【剖析】 解题时注意点：①$\in$，$\notin$ 用来表示元素与集合之间的关系，因此有$1\in\mathbf{N}$，$0\notin\mathbf{N}^*$；②一般地，a表示一个元素，而$\{a\}$表示只有一个元素a的单元素集合，因此有$\{1\}\subsetneqq\{1,2,3\}$；$0\in\{0\}$；③$\varnothing$表示不包含任何元素的集合，而$\{0\}$表示含元素0的非空集合，因此有$\{0\}\supsetneqq\varnothing$，$0\notin\varnothing$，$0\in\{0\}$，而不能写成$\{0\}=\varnothing$，$0\in\varnothing$等；④集合中元素具有无序性，故有$\{1,2,3\}=\{3,2,1\}$；⑤$\{a,b\}$通常表示含有两个元素的数集，而$\{(a,b)\}$表示含有一个元素$(a,b)$的集合，通常表示点集或方程组的解集，因此有$\{a,b\}\neq\{(a,b)\}$.

【答】 (1)$\in$；(2)$\notin$；(3)$\supsetneqq$；(4)$\subsetneqq$；(5)$\subsetneqq$；(6)$\in$；(7)$\in$；(8)$\supsetneqq$；(9)$\notin$；(10)$\neq$；(11)=.

例2 方程组$\begin{cases}3x-2y=11,\\2x+3y=16\end{cases}$的解集是（　　）

A. $\{5,2\}$　B. $\{(x,y)\mid x=5或y=2\}$　C. $(5,2)$　D. $\{(5,2)\}$

【剖析】 用“代入消元法”或“加减消元法”可得方程组的解为$\begin{cases}x=5,\\y=2,\end{cases}$则用列举法表示为$\{(5,2)\}$，用描述法可表示为$\{(x,y)\mid x=5且y=2\}$或$\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}x=5\\y=2\end{cases}\right\}$. 而$\{5,2\}$表示两个元素的集合，$\{(x,y)\mid x=5或y=2\}$表示直线$x=5$和$y=2$上所有点构成的集合，$(5,2)$表示一个点不表示集合. 故选D.

【答】 D.

例3 写出集合$A=\{a,b,c\}$的所有子集.

【剖析】 集合的所有子集可以看成是从A中分别选取0个、1个、2个、3个元素的组合，即子集个数为$C_3^0+C_3^1+C_3^2+C_3^3$个.特别注意：①在写给定集合的子集时应不重不漏；②$\varnothing$与A是集合A的子集；③若集合的元素个数为n个，则子集的个数为$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$.

【答】 $\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}$.

例4 已知集合$A=\{x|-1<x\leqslant 1\}$，$B=\{x|x\leqslant a+1\}$，若$A\subsetneqq B$，求实数a的取值范围.

【剖析】 "连续型"集合的关系讨论可借助数轴直观的判断. $A\subsetneqq B$反映在图形中即A的图形含在B的里面，但要注意区间的端点.

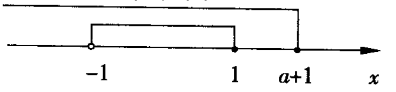

图 1.1.1

【解】 若$A\subsetneqq B$，则满足$a+1\geqslant 1$，

解得 $a\geqslant 0$.

习题精选

A　组

一、选择题

1. 下列各项中可以组成集合的是(　　)

A. 与1非常接近的全体实数　　B. 某校2006年度第一学期全体高三学生

C. 某校本学期视力比较差的全体学生　　D. 与π相差很小的全体实数

2. 下列四个关系式中，正确的是(　　)

A. $a=\{a\}$　　B. $a\subset\{a\}$　　C. $\{a\}\in\{a,b\}$　　D. $a\in\{a,b\}$

3. 下列各题中的M与P表示同一个集合的是(　　)

A. $M=\{(1,-3)\}$，$P=\{(-3,1)\}$　　B. $M=\{1,-3\}$，$P=\{-3,1\}$

C. $M=N$，$P=\mathbf{Z}$　　D. $M=\varnothing$，$P=\{0\}$

4. 已知集合$A=\{a|a\leqslant\sqrt{13}\}$，元素$b=\pi$，则下列关系中正确的是(　　)

A. $\{b\}\in A$　　B. $\{b\}\not\subset A$　　C. $b\in A$　　D. $b\notin A$

5. 集合$\{x,y,z\}$的非空子集有(　　)

A. 4个　　B. 6个　　C. 7个　　D. 8个

6. 在"$1\in\{0,1,2\}$；$\{1\}\in\{0,1,2\}$；$\{0,1,2\}\subseteq\{0,1,2\}$；$\varnothing\subsetneqq\{0,1,2\}$；$\{0,1,2\}=\{2,0,1\}$"中，这5个写法中错误的写法个数有(　　)

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

7. 集合$M=\{(x,y)|xy\geqslant 0,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$是指(　　)

A. 第一象限的点集　　B. 第三象限的点集

C. 第一、第三象限内的点集　　D. 不在第二、四象限的点集

二、填空题

1. 用适当的符号填空：

(1)0 ___ $\{0\}$；(2)d ___ $\{a,b,c\}$；　(3)$\{a\}$ ___ $\{a,b,c\}$；　(4)$\varnothing$ ___ $\{x|(x-1)^2<0\}$

2. 设集合$U=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1,x\in\mathbf{Z}\}$，$A=\{$不小于$-1$的负整数$\}$，$B=\{$小于1的非负整数$\}$，用列举法表示集合 (1)$U=$________；$A=$________；$C=$________；(2)$A$的所有子集为________，其中真子集为________.

3. 用集合表示方程$x+y=0$与$x-y=2$的公共解________；

4. 平面坐标系下，坐标轴上的点构成的集合可表示为________；

5. 若S表示方程$x^2-px+15=0$的解集，且$3\in S$，则方程的解集可表示为______(用列举法)；

6. 已知集合$P=\{x\mid x^2+x-6=0\}$，$Q=\{x\mid ax+1=0\}$，若$Q\subsetneqq P$，则a的值为__________；

三、解答题

1. 写出集合$\{a,b\}$的所有子集.

2. 试判断集合$A=\{$四边形$\}$，$B=\{$平行四边形$\}$，$C=\{$矩形$\}$，$D=\{$棱形$\}$，$E=\{$长方形$\}$，$F=\{$正方形$\}$之间的关系.

3. 若一数集中的任一元素的倒数仍在该集合中，则称该数集为"可倒数集"，

(1)判断集合$A=\{-1,1,2\}$是否为可倒数集；

(2)试写出一个含三个元素的可倒数集.

4. 若集合$P=\{x,1\}$，$Q=\{x^2,x\}$，且$P=Q$，求实数x的值.

5. 已知集合$A=\{x\mid ax^2+2x+1=0\}$，

(1)若A只有1个元素，试求a的值，并求出这个元素；

(2)若A是空集，求a的取值范围.

B 组

1. 已知集合$M=\{(x,y)\mid x+y<0,且\ xy>0\}$，$P=\{(x,y)\mid x<0,y<0\}$，则(　　)

A. $M\supsetneqq P$　　B. $M=P$　　C. $M\subsetneqq P$　　D. M与P关系不确定

2. 满足$\{a,b\}\subseteq M\subseteq\{a,b,c,d\}$的集合$M$有__________个；

3. 已知a,b,c为非零实数，求代数式$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$的值的集合.

4. 已知集合$P=\{x\mid |x|\leqslant 2\}$，$Q=\{x\mid m+1<x<4m+1\}$，若$Q\subseteq P$，求实数$m$的取值范围.

5. 已知集合$A=\{x\mid x=3k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{y\mid y=3k+2,k\in\mathbf{Z}\}$，若$x_0\in A$，$y_0\in B$. 求证：$x_0y_0\in B$.

第二节　集合的运算

知识要点

1. 由属于A又属于B的所有元素组成的集合，叫做A与B的________，记作________.

2. 由属于A或属于B的所有元素组成的集合，叫做A与B的________，记作________.

3. A是全集U中的一个子集，由U中所有不属于A的元素构成的集合叫做________，记作________.

4. $A\cap A=$______；$A\cap\varnothing=$______；$A\cup A=$______；$A\cup\varnothing=$______；$A\cap\complement_U A=$______；$A\cup\complement_U A=$______；$\complement_U(\complement_U A)=$______.

5. 如果$A\subseteq B$，则$A\cap B=$________；$A\cup B=$________.

【答】 1. 交集，$A\cap B$　2. 并集，$A\cup B$　3. A在U中的补集，$\complement_U A$　4. $A,\varnothing,A,A,\varnothing,U,A$　5. A,B

知识解读

1. 在考查抽象集合之间包含关系和进行交、并、补运算时，若集合元素是离散的，可使用文氏图；若集合元素是连续的，可运用数轴并注意区间端点的“开”与“闭”.

2. 集合的交、并、补运算，结果仍为集合.

例题剖析

例1 设全集$U=\{a,b,c,d,e,f,g\}$，集合$A=\{a,c,e,g\}$，$B=\{b,d,f,g\}$，求$A\cap B$，$\complement_U A$，$A\cup\complement_U B$.

【剖析】 离散型集合的交、并、补运算可直接观察求得或借助于文氏图得到.

【答】 $A\cap B=\{g\}$，$\complement_U A=\{b,d,f\}$，$A\cup\complement_U B=\{a,c,e,g\}$.

例2 设全集$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$A\cap B=\{2\}$，$\complement_U A\cap\complement_U B=\{1,9\}$，$\complement_U A\cap B=\{4,6,8\}$，则$A=$__________，$B=$__________.

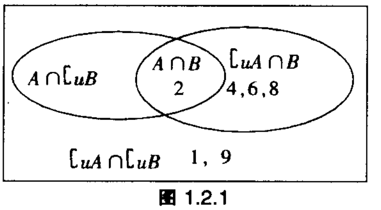

图 1.2.1

【剖析】 本题的关键是正确理解图1.2.1中四个部分的意义. 全集U被不重不漏地分为四个部分，它们分别表示为$A\cap\complement_U B$，$A\cap B$，$\complement_U A\cap B$，$\complement_U A\cap\complement_U B=\complement_U(A\cup B)$等四部分.

【答】 $A=\{2,3,5,7\}$，$B=\{2,4,6,8\}$

例3 设全集$U=R$，集合$M=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 10\}$，$N=\{x\mid x<1或x>7\}$，求$M\cup N$，$M\cap N$，$\complement_U M$.

【剖析】 “连续型”集合之间的运算可借助于数轴. 两个集合的并集即为两个集合的元素并在一起，交集即为两个集合的公共部分，补集即为全集R中去掉M剩下的部分. 特别注意两个集合的公共部分在结果中不能重复表示(图1.2.2).

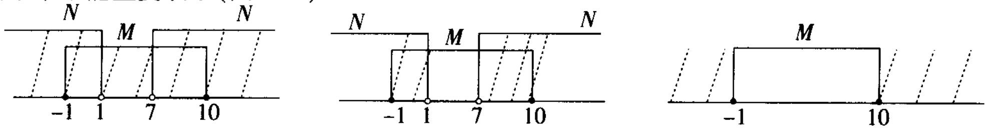

图 1.2.2

【答】 $M\cup N=R$，$M\cap N=\{x\mid -1\leqslant x<1或7<x\leqslant 10\}$，$\complement_U M=\{x\mid x<-1或x>10\}$.

例4 已知集合$A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid mx-2=0\}$，$A\cap B=B$，求m的值.

【剖析】 $A\cap B=B$，可知$B\subseteq A$，即B为集合A的子集.

【解】 若$B=\varnothing$，即方程$mx-2=0$的解集为空集时，$A\cap B=B$，此时$m=0$. 若$B\neq\varnothing$，且$A\cap B=B$，则

$B=\left\{\dfrac{2}{m}\right\}=\{1\}$，或$B=\left\{\dfrac{2}{m}\right\}=\{2\}$，解得 $m=1$或$m=2$.

综上，m的取值为$0,1,2$.

例5 已知集合$P=\{x\mid 15-2x-x^2<0\}$，$Q=\{x\mid a-1<x<a+1\}$，

(1)当a取何值时，$P\cap Q=\varnothing$；

(2)若$Q\subsetneqq P$，求a的取值范围.

【剖析】 $P\cap Q=\varnothing$，则P，Q两个集合无公共元素，也即表示两个集合的图形无重叠部分. 特别注意$Q=\varnothing$时，条件亦可能成立.

【解】 由题可得，集合$P=\{x\mid x<-5$或$x>3\}$，

(1)显然$Q\neq\varnothing$，要使$P\cap Q=\varnothing$，则需$\begin{cases}a-1\geqslant -5,\\ a+1\leqslant 3,\end{cases}$ 解得$-4\leqslant a\leqslant 2$.

(2)如图1.2.3所示，要使$Q\subsetneqq P$，则需满足$a-1\geqslant 3$或$a+1\leqslant -5$，解得$a\geqslant 4$或$a\leqslant -6$

所以当$-4\leqslant a\leqslant 2$时，$P\cap Q=\varnothing$；当$a\geqslant 4$或$a\leqslant -6$时，$Q\subsetneqq P$.

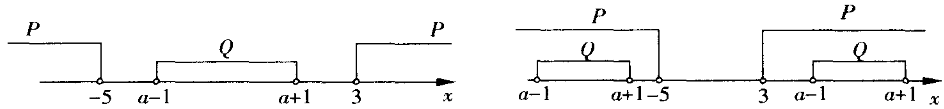

图 1.2.3

习题精选

A 组

一、选择题

1. 下列各表达式中，正确的是(　　)

A. $a\subsetneqq\{a,b\}$　　B. $\{a,c\}\cap\{b,d\}=\{0\}$

C. $a=\{a,b\}\cap\{a,c\}$　　D. $\{a,b\}\not\subset\{b,d\}$

2. 若集合$P=\{1,2,3\}$，$S=\{2,4,6\}$，则下列命题不正确的是(　　)

A. $2\in P$　　B. $P\cup S=\{1,2,3,4,6\}$　　C. $P\cap S=\{2\}$　　D. $\varnothing\not\subset P$

3. 设集合$X=\{0,1,2,4,5,7\}$，$Y=\{1,3,6,8,9\}$，$Z=\{3,7,8\}$，那么集合$(X\cap Y)\cup Z$是(　　)

A. $\{0,1,2,6,8\}$　　B. $\{3,7,8\}$　　C. $\{1,3,7,8\}$　　D. $\{1,3,6,7,8\}$

4. 设集合$M=\{x\mid 1<x\leqslant 3\}$，$N=\{x\mid 2\leqslant x<4\}$，则$M\cap N$等于(　　)

A. $\{x\mid 1<x<4\}$　　B. $\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3\}$　　C. $\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$　　D. $\{x\mid 3\leqslant x\leqslant 4\}$

5. 已知$M=\{(x,y)\mid x+y=2\}$，$N=\{(x,y)\mid x-y=4\}$，那么$M\cap N$为(　　)

A. $x=3,y=-1$　　B. $(3,-1)$　　C. $\{3,-1\}$　　D. $\{(3,-1)\}$

6. 设全集$U=\{3,4,5\}$，$A=\{|a-3|,3\}$，$\complement_U A=\{5\}$，则a的值是(　　)

A. 7　　B. −1　　C. 7或−1　　D. 1或−7

二、填空题

1. $\{$菱形$\}\cap\{$矩形$\}=$______________.

2. 设全集$U=R$，$P=\{x\mid x\geqslant 1\}$，$Q=\{x\mid 1<x<5\}$，则$\complement_U P\cap\complement_U Q=$______________.

3. 已知全集$I=\{1,2,3,4,5\}$，M，P是I的两个子集，且$M\cap P=\{2\}$，$\complement_I M\cap P=\{4\}$，$\complement_I M\cap\complement_I P=\{1,5\}$，则$M=$______________，$P=$______________.

4. 设集合$A=\{x\mid x\in\mathbf{Z}$且$-10\leqslant x\leqslant -1\}$，$B=\{x\mid x\in\mathbf{Z}$且$|x|\leqslant 5\}$，则$A\cup B$中的元素个数是______.

5. 已知全集$I=\{2,4,a^2-a+1\}$，及子集$B=\{a+1,2\}$，若$\complement_I B=\{7\}$，则$a=$______________.

三、解答题

1. 已知$A=\{x|x^2-px-q=0\}$，$B=\{x|x^2+qx-p=0\}$，且$A\cap B=\{1\}$，求$A\cup B$.

2. 设全集$U=\{x|1<x<7\}$，$A=\{x|2\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x|1<x\leqslant 6\}$，求$\complement_U A$，$\complement_U B\cap A$.

3. 若$A=\{x|-3<x<1\}$，$B=\{x|x+a>0\}$，且$A\cap B=A$，求实数a的取值范围.

4. 已知$M=\{(x,y)|y=x^2+x\}$，$N=\{(x,y)|y=x+a\}$，若集合$M\cap N=\varnothing$，求实数a的取值范围.

B　组

1. 设集合$M=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$，$N=\{(x,y)|x^2-y=0\}$，则$M\cap N$中的元素个数为______个.
2. 已知集合$A=\{x|y=\sqrt{x-1}\}$，$B=\{y|y=x^2-2x+3\}$，则$A\cap B=$______.
3. 已知集合$P=\{m^2,m+1,-3\}$，$Q=\{m-3,2m-1,m^2+1\}$，且$P\cap Q=\{-3\}$，求实数m的值.

4. 不等式$x^2-ax-8\geqslant 0$与$x^2-2ax-b<0$的解集分别为A，B，若$A\cap B=\{x|4\leqslant x<5\}$，求$a$、$b$的值.

第三节　充分条件与必要条件

知识要点

1. 若p推出q（$p\Rightarrow q$），称p是q的______，q是p的______；
2. 若$p\Rightarrow q$，且$q\Rightarrow p$，则称p是q的______，或者记作______；
3. 若$p\Rightarrow q$，且$q\Rightarrow r$，则p是r的______条件.

【答】 1. 充分条件，必要条件　2. 充要条件，$p\Leftrightarrow q$　3. 充分条件

知识解读

1. 正确理解充分条件、必要条件、充分必要条件的意义. ①p是q的充分条件表示有p足够，少了p也行；②p是q的必要条件表示有p不够，少了p不行；③p是q的充要条件表示有p足够，少了p不行；

2. 判断p与q的关系时，①应判断p是否能推出q，同时也应判断q是否能推出p；②正确把握相关概念、定理、公式的关键点.

例题剖析

例1 分别用"⇒"、"充分条件"、"必要条件"叙述下列真命题.

(1)如果$x>0$，则$x^2>0$.

(2)如果三角形的一条角平分线垂直这个角的对边，那么这个三角形是等腰三角形.

(3)如果a是整数，则a是有理数.

【剖析】 本题的关键是正确理解"推出"与"充分条件、必要条件"的对应关系.

【解】 (1)$x>0 \Rightarrow x^2>0$. $x>0$是$x^2>0$的充分条件. $x^2>0$是$x>0$的必要条件.

(2)三角形的一条角平分线垂直这个角的对边⇒这个三角形是等腰三角形. 三角形的一条角平分线垂直这个角的对边是这个三角形是等腰三角形的充分条件. 这个三角形是等腰三角形是三角形的一条角平分线垂直这个角的对边的必要条件.

(3)a是整数⇒a是有理数. a是整数是a是有理数的充分条件. a是有理数是a是整数的必要条件.

例2 试写出$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$的一个充分条件：____________.

【剖析】 本题是一道结论开放性的问题，能加深对充分条件的理解.解题关键就是对"$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$"进行转化而求得结果.

【答】 $b>a>0$、$a<b<0$、$b<0<a$或者$a=2$，$b=3$等.

例3 用充分不必要条件、必要不充分条件、充分必要条件、既不充分也不必要条件填空：

(1)"$\sqrt{x}=\sqrt{2}$"是"$x=2$"的________条件；

(2)"$x=y$"是"$\sin x=\sin y$"的________条件；

(3)"$b=0$"是"直线$y=kx+b$过原点"的________条件；

(4)设命题甲为：$0<x<5$；命题乙：$|x-2|<3$，那么甲是乙的________条件；

(5)"$\mathrm{tg}x=1$"是"$x=\frac{5\pi}{4}$"的________条件；

(6)"$b^2<4ac$"是"二次方程$ax^2+bx+c=0$无实数根"的________条件；

(7)"$a+c=2b$"是"a，b，c成等差数列"的________条件；

(8)"$a^2+b^2=0$"是"$a+b=0$"的________条件；

(9)"$a=-1$"是"直线$x+ay=2a+2$与$ax+y=a+1$平行"的________条件；

(10)"$x_1>3$，$x_2>3$"是"$x_1+x_2>6$，$x_1x_2>9$"的________条件.

【剖析】 (1)"$\sqrt{x}=\sqrt{2}$"⇔"$x=2$". 故为充要条件；(2)当$x=30°$，$y=150°$时，$\sin x=\sin y$. 故为充分不必要条件；(3)$b=0$时，直线$y=kx$显然过原点；若直线过原点，将(0,0)代入直线方程可得$b=0$. 故为充要条件；(4)命题乙即为$-1<x<5$，则甲⇒乙. 故为充分不必要条件；(5)注意三角函数的性质，故为必要不充分条件；(6)$b^2<4ac$，即二次方程的判别式$\Delta<0$⇔二次方程无实数根. 故为充要条件；(7)由等差中项定义可得. 故为充要条件；(8)$a^2+b^2=0$得出$a=b=0$，而$a+b=0$得出a、b互为相反数. 故为充分不必要条件；(9)由两直线平行的条件可得. 故为既不充分也不必要条件；(10)当$x_1=1$，$x_2=10$时，$x_1+x_2>6$，$x_1x_2>9$，故为充分不必要条件.

【答】 见剖析.

习题精选

A 组

一、选择题

1. $a>3$是$a>2$的(　　)

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件　C. 充要条件　D. 既非充分又非必要条件

2. “$x^2+y^2=0$”是“$xy=0$”的(　　)

A. 充要条件　B. 充分不必要条件　C. 必要不充分条件　D. 既非充分又非必要条件

3. “$x=y$”是“$\cos x=\cos y$”的(　　)

A. 充分不必要条件　B.必要不充分条件　C. 充要条件　D.既非充分又非必要条件

4. 已知a,b是空间的两条直线,那么“$a\perp b$”是“a,b相交”的(　　)

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件　C. 充要条件　D. 既非充分又非必要条件

5. 与命题$|x|=|y|$等价的命题是(　　)

A. $x=y$　B. $x^2=y^2$　C. $x^3=y^3$　D. $\sqrt{x}=\sqrt{y}$

6. 在$\triangle ABC$中,“$A>30°$”是“$\sin A>\frac{1}{2}$”的(　　)

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件　C. 充要条件　D. 既非充分又非必要条件

7. “$m=\frac{1}{2}$”是“直线$(m+2)x+3my+1=0$与直线$(m-2)x+(m+2)y-3=0$相互垂直”的(　　)

A. 充要条件　B. 充分不必要条件　C. 必要不充分条件　D. 既非充分又非必要条件

8. “平面外的直线垂直平面内的一条直线”是“平面外的直线垂直于这一平面”的(　　)

A. 充要条件　B. 充分不必要条件　C. 必要不充分条件　D. 既非充分又非必要条件

9. 对任意实数a,b,c,给出下列命题:

①“$a=b$”是“$ac=bc$”充要条件;②“$a+5$是无理数”是“a是无理数”的充要条件;③“$a>b$”是“$a^2>b^2$”的充分条件;④“$a<5$”是“$a<3$”的必要条件. 其中真命题的个数是(　　)

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

10. 设A,B,C,三个集合,则“$A\cap B=A\cap C$”是“$B=C$”的(　　)

A. 充分条件　B. 必要条件　C. 充要条件　D. 既非充分又非必要条件

二、填空题

1. “$x=2$”是“$x^2-4=0$”的________条件.
2. “一个整数的末尾数字为0”是“这个数字能被5整除”的________条件.
3. $|a|>b$是$|a|>|b|$的________条件.
4. “$1<x<5$”是“$\frac{1}{x}<1$”的________条件.
5. “四边形对角线互相平分”是“四边形为矩形”的________条件.
6. “两个三角形全等”是“它们有一组对边相等”的________条件.
7. “$x\in A\cap B$”是“$x\in A$”的________条件.
8. “$A=\varnothing$”是“$A\cup B=B$”的________条件.
9. “实数$a=0$”是“直线$ax-2y=1$与$2ax-2y=3$平行”的________条件.
10. 已知p是q的充要条件,r是s的充分条件,q是s的必要条件,r是q的必要条件,则r是p的条件;p是s的________条件.

B 组

1. 函数$y=x^2+bx$在区间$[0,+\infty)$上是单调函数的充要条件是________.
2. 已知方程$ax^2+2x+1=0$,求方程至少有一个负根的充要条件.

复习测试

一、选择题

1. 下列命题中正确的是(　　)

A. $\{4,5\}$和$\{5,4\}$是两个不同的集合　　B. $\{x\in\mathbf{R}\mid x^2+x+1=0\}$是空集

C. 比1大0.2的数不能组成集合　　D. 小于10的偶数集合是有限集

2. 下列书写正确的是(　　)

A. $\varnothing\in\{0\}$　　B. $0\subsetneqq\{0\}$　　C. $\{0\}\in\{0\}$　　D. $0\notin\varnothing$

3. 若集合$P=\{1,2,3\}$，$S=\{2,4,6\}$，则下列命题不正确的是(　　)

A. $2\in P$　　B. $P\cup S=\{1,2,3,4,6\}$

C. $P\cap S=\{2\}$　　D. $\varnothing\notin P$

4. 已知全集$U=\{2,4,6,8,10\}$，$A=\{2,8\}$，则$\complement_U A$为(　　)

A. $\{2,8\}$　　B. $\{2,4,6,8,10\}$

C. $\{4,6,10\}$　　D. $\varnothing$

5. "$|x|+|y|=0$"是"$xy=0$"的(　　)

A. 充要条件　　B. 充分非必要条件

C. 必要非充分条件　　D. 既非充分又非必要条件

6. 设集合$A=\{x\mid x-2<0\}$，下列元素中不属于A的是(　　)

A. 2　　B. 1　　C. 0　　D. -1

7. 用列举法表示集合$\{x\mid -9\leqslant x<-1$，且x为奇数$\}$，结果是(　　)

A. $\varnothing$　　B. $\{-9,-7,-5,-3\}$

C. $\{-9,-7,-5,-3,-1\}$　　D. $\{-7,-5,-3\}$

8. 设全集$U=\mathbf{R}$，集合$M=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 10\}$，$N=\{x\mid x>7$或$x<1\}$，则$M\cap N=$(　　)

A. $(7,10]$　　B. $[-1,1)\cup(7,10]$　　C. $[-1,1]$　　D. $(1,10]$

9. "$x^2-3x<0$"是"$0<x<3$"的(　　)

A. 充要条件　　B. 充分不必要条件　　C. 必要不充分条件　　D. 既非充分又非必要条件

10. 定义$A-B=\{x\mid x\in A$，且$x\notin B\}$，若$A=\{2,4,6,8,10\}$，$B=\{1,4,8\}$，则$A-B=$(　　)

A. $\{4,8\}$　　B. $\{1,2,6,10\}$　　C. $\{1\}$　　D. $\{2,6,10\}$

二、填空题

11. 集合$\{x\mid x^2-5x+6=0\}$用列举法可表示为____________.

12. "两个整数的和为偶数"是"这两个整数都是偶数"的________条件. (填充分、必要或充要)

13. 四边形的两条对角线互相垂直是四边形为菱形的________条件. (填上充分、必要或充要)

14. 已知命题：①$3\in\{1,3,5,7\}$；②$\varnothing=\{0\}$；③$\varnothing\subseteq\{0\}$；④$\{a\}\in\{a,b,c,d\}$；⑤$0\in\varnothing$. 其中为真命题的是________. (填上你认为正确的命题的序号)

15. 若$A\cup B=A\cap B$，则A________B.

16. 已知全集$U=\{1,2,3,4,5,6,7,\}$，集合$A=\{3,4,5\}$，$B=\{1,3,6\}$，则$A\cap\complement_U B=$______.

17. 设$A=\{x\mid -1<x\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid -3\leqslant x<1\}$则$A\cup B=$____________.

18. 设含有10个元素的集合的全部子集数为S，其中3个元素组成的子集数为T，则$\frac{S}{T}$的值是____.

三、解答题

19. 若集合$U=\{a,b,c,d,e,f\}$，$M=\{a,c,d\}$，$N=\{b,c,d,e\}$，求$M\cup N$，$\complement_U M\cap\complement_U N$，$\complement_U(M\cap N)$.

20. 写出集合$\{x\mid(x-a)(x-b)=0\}$的所有子集.

21. 请分别用列举法和描述法表示方程组$\begin{cases}x-3y=4,\\5x+y=4,\end{cases}$的解集.

22. 已知全集$U=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid x<5\}$，$B=\{x\mid 0\leqslant x<10\}$，求$\complement_U A$，$A\cap B$，$A\cup B$，$\complement_U A\cap B$.

23. 设$a=\{x\mid x=2n+1,n\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 10\}$，$C=\{x\mid x=3n,n\in\mathbf{N}\}$，求$(A\cap B)\cap C$.

24. 如果p是q的必要条件，m是n的充要条件，p是n的充分条件，求q与m的关系.

25. 若$A=\{x\mid x^2+ax+b\leqslant 0\}=[-2,3]$，求$a$、$b$的值.

26. 若$A=\{x\mid x^2+2x-3<0\}$，$B=\{x\mid x+a>0\}$且$A\subsetneqq B$，求a的取值范围.