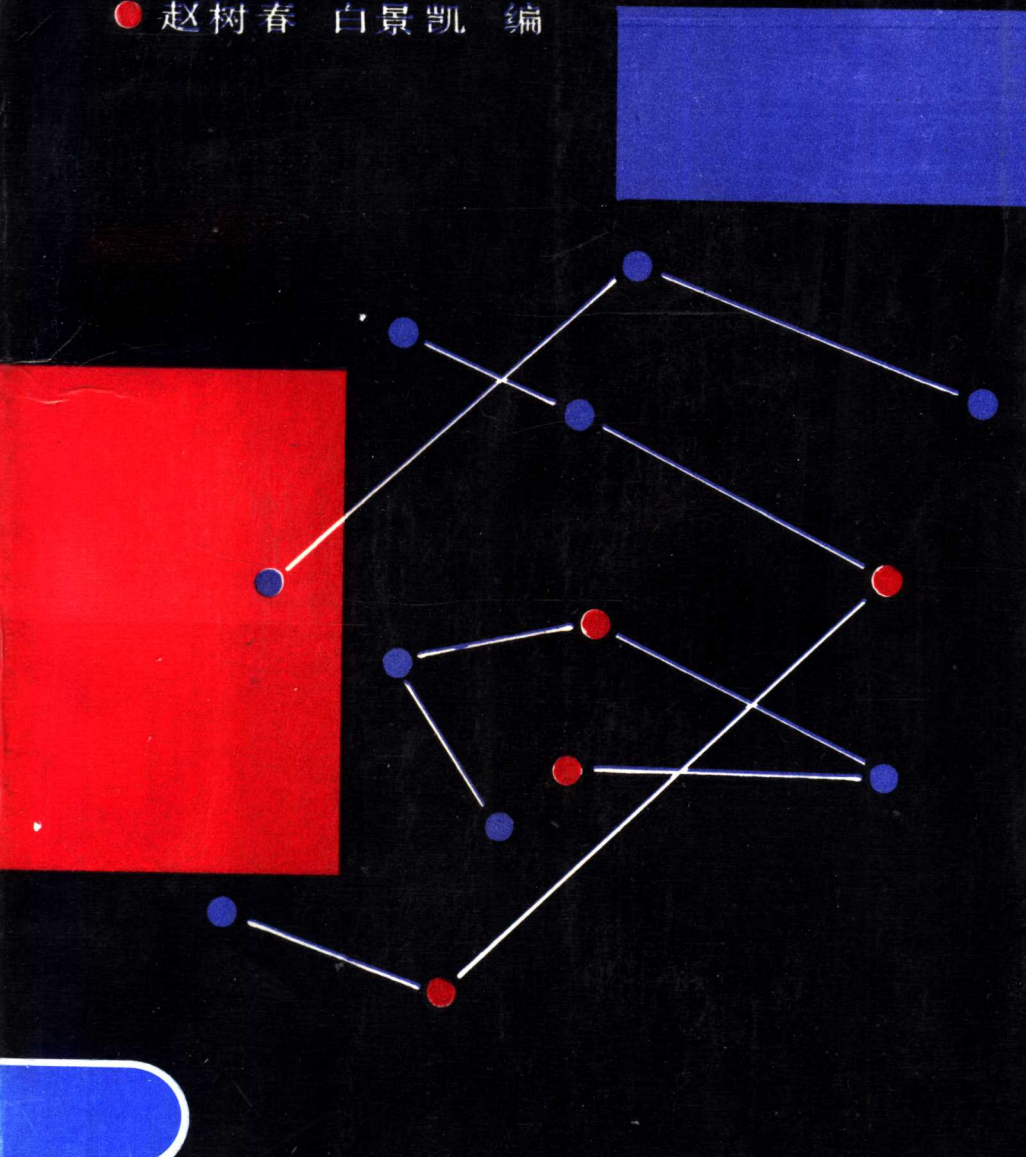


离散数学

● LISANSHUXUE

● 赵树春 白景凯 编



离散数学

赵树春 白景凯 编

江苏工业学院图书馆
藏书章

江苏教育出版社

离散数学

赵树春 白景凯 编

辽宁教育出版社出版 辽宁省新华书店发行
(沈阳市南京街6段1里2号) 沈阳新华印刷厂印刷

字数: 220,000 开本: $850 \times 1168 \frac{1}{32}$ 印张: $9\frac{1}{8}$

印数: 1—800

1990年11月第1版

1990年11月第1次印刷

责任编辑: 杨 力

插图: 潘智倩

封面设计: 宋丹心

责任校对: 理 力

ISBN 7-5382-1098-9/O·3

定价: 4.50元

序 言

离散数学是计算机专业的一门重要基础课，其中有些内容对于其它专业的学生也是必需的。离散数学主要包括以下几部分内容：集合论基础；代数系统；数理逻辑和图论。为了使不同专业的学生能选学其中的一部分或几部分内容，我们在本书中有意把这四部分内容写成相对独立的部分；当然，第一篇的几节是以后各部分都要用到的。

在本书的叙述过程中，特别注意了从具体到抽象的原则。根据多年的教学实践，工科大学生们对于学习离散数学大都感到困难，其主要原因在于离散数学的内容比较抽象。为了解决这个问题，我们特别注意了论述的“直观性”，每一个重要概念和定理的论述，都要在其先或后，用典型例子加以说明，因此，读者在阅读本书时，不可轻视其中的典型例子。本书每一节之后都配备了一定数量的练习，希望读者在阅读本书的同时，要解答其中的一部分习题，这是学好本书必不可少的工作。由于学时和篇幅所限，我们对于离散数学在计算机科学和其它科学中的应用论述较少，而把注意集中于离散数学本身主要内容的论述。

关于在本书的叙述中引用前面的定义和定理时写法为：“依定义（定理）I—1.2”表示“依第I章§1的定义（定理）

2”；“依定义(定理) 1. 2”表示“依本章§1的定义(定理) 2”；“依定义(定理) 2”表示“依本节的定义(定理) 2”。

限于笔者的水平，错误和疏漏在所难免，希望读者指正。

编 者

1989年10月

目 录

序言

第一篇 集合论	1
---------	---

第 I 章 集合与关系	1
-------------	---

§1 集合	1
-------	---

I—1 练习	3
--------	---

§2 集合的运算	4
----------	---

I—2 练习	8
--------	---

§3 笛卡儿乘积	11
----------	----

I—3 练习	13
--------	----

§4 关系	13
-------	----

I—4 练习	18
--------	----

§5 逆变关系与复合关系	19
--------------	----

I—5 练习	24
--------	----

§6 关系的某些性质	25
------------	----

I—6 练习	28
--------	----

§7 关系的传递闭包	32
------------	----

I—7 练习	37
--------	----

§8 等价关系与集合的划分	37
---------------	----

I—8 练习	41
--------	----

§9	序关系	45
I—9	练习	49
第 I 章	函数	51
§1	函数	51
I—1	练习	55
§2	复合函数和反函数	57
I—2	练习	63
§3	置换	64
I—3	练习	66
§4	集合的基数	66
I—4	练习	74
第二篇	代数系统	75
第 II 章	半群和群	75
§1	运算	75
II—1	练习	82
§2	半群	84
II—2	练习	87
§3	群的定义	89
II—3	练习	99
§4	阿贝尔群和循环群	101
II—4	练习	107
§5	子群	108
II—5	练习	111
§6	子群的陪集	111
II—6	练习	116
§7	正规子群与商群	117

II-7 练习	124
§8 同态和同构	125
II-8 练习	135
第IV章 环和域	136
§1 加群、环的定义	137
IV-1 练习	141
§2 交换律、单位元、零因子、整环	143
IV-2 练习	147
§3 域	147
IV-3 练习	150
第V章 格和布尔代数	151
§1 偏序集	151
V-1 练习	155
§2 格	155
V-2 练习	162
§3 格的性质	163
V-3 练习	166
§4 有余格和分配格	167
V-4 练习	173
§5 布尔代数	176
V-5 练习	187
§6 布尔表达式	190
V-6 练习	196
第三篇 数理逻辑	198
第VI章 命题逻辑	198
§1 命题	198

V—1 练习	199
§2 联结词	200
V—2 练习	203
§3 命题公式	204
V—3 练习	207
§4 等价式和蕴含式	208
V—4 练习	214
§5 范式	216
V—5 练习	223
§6 推理理论	224
V—6 练习	230
第VI章 谓词逻辑	232
§1 谓词与量词	232
V—1 练习	234
§2 谓词公式	234
V—2 练习	240
§3 谓词演算的等价式与蕴含式	242
V—3 练习	247
§4 谓词演算的推理理论	249
V—4 练习	252
第四篇 图论	254
第VII章 图论	254
§1 基本概念	254
V—1 练习	258
§2 顶点的度	259
V—2 练习	260

§3	路、圈和偶图	260
Ⅶ—3	练习	262
§4	尤拉图和哈密顿图	263
Ⅶ—4	练习	266
§5	树	267
Ⅶ—5	练习	270
§6	可平面图	271
Ⅶ—6	练习	273
§7	连通度	273
Ⅶ—7	练习	278
§8	有向图和根树	279
Ⅶ—8	练习	283
参考文献		284

第一篇 集合论

第 I 章 集合与关系

集合论是现代各科数学的基础，它渗入了许多科学技术领域。本章介绍集合论的基础知识，如集合的运算和性质，关系和函数，基数等等。

§1 集 合

1. 集合的概念

在数学中，集合是一个不加精确定义的基本概念，但我们可以对集合加以描述：把具有某种共同属性的一些对象，汇集成一个整体就形成一个集合，集合中的对象是该集合的元素。例如，自然数的全体，北京图书馆的藏书，平面上的所有点等都分别形成一个集合。以后我们用大写英文字母 $A, B, X, Y, \dots$ 表示集合，用小写英文字母 $a, b, x, y, \dots$ 表示元素。对于一个集合 A 来说，某一对象 a 或是 A 的元素，这时记作 $a \in A$ ，读作 a 属于 A ；或者 a 不是 A 的元素，这时记作 $a \notin A$ ，读作 a 不属于 A ；二者必居其一，而且只居其一。

集合是由元素组成的，表示一个集合就是要用适当的方法指明组成该集合的元素。表示集合的方法通常有两种：一种是列举法，它把组成一个集合的元素依次列举出来，写在一个花括号中。例如：

$$S = \{a, b, c, d\},$$

2 离散数学

$C = \{\text{李林, 张明, 王芳, 张晓梅}\},$

$I = \{1, 2, 3, \dots\}$

等等; 另一种是描述法, 它指明组成一个集合的元素的性质, 当集合 A 是由具有性质 P 的所有元素组成时, 我们把 A 记作

$A = \{x | x \text{ 具有性质 } P\}.$

这时 A 表示由具有性质 P 的所有元素组成的集合. 例如, 方程 $x^2 - 1 = 0$ 的所有解组成的集合是 $\{x | x^2 - 1 = 0\}$, 方程组

$\begin{cases} 2x + y = 1, \\ x + 2y = -4 \end{cases}$ 的所有解组成的集合是 $\{(x, y) | 2x + 1 = 1 \text{ 和 } x + 2y = -4\}$ 等等.

不包括任何元素的集合叫做空集, 记作 ϕ .

在本书中, 通常用 N 表示非负整数的集合 即 $N = \{0, 1, 2, \dots\}$; $I = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ 表示整数集合; $I_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ 表示正整数集合; $N_m = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$; $I_m = \{1, 2, \dots, m\}$; P 表示素数集合; Q 表示有理数集合; R 表示实数集合; C 表示复数集合.

2. 子集、集合相等

定义 1. 设 A, B 是两个集合, 如果 A 的每个元素都是 B 的元素, 则称 A 是 B 的子集, 记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$; 如果 $A \subseteq B$, 而且 B 中至少有一个元素不属于 A , 则说 A 是 B 的真子集, 记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

例如, 设 $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, b\}$, 则 $A \subseteq A$, $B \subset A$.

对于任意集合 A , 有 $A \subseteq A$; 对于任意集合 A , 有 $\phi \subseteq A$. 要理解 $\phi \subseteq A$ 这一断言, 只须把定义 1 改述如下: $A \subseteq B$ 意味着凡不属于 B 的元素都不属于 A .

定义 2. 设 A, B 是两个集合, 如果 $A \subseteq B$ 和 $B \subseteq A$, 则说 A 和 B 相等, 记作 $A = B$.

例如, 设 $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{d, c, b, a\}$, 则 $A = B$,
 $C = \{1, -1\}$, $D = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$, 则 $C = D$; 设 $K = \{(1, 1)\}$,
 $L = \{(x, y) \mid 2x + y = 3 \text{ 和 } x + 4y = 5\}$, 则 $K = L$.

3. 幂集

定义 3. 设 A 是一个集合, 由 A 的所有子集为元素组成的集合, 称为 A 的幂集, 记作 2^A 或 $\rho(A)$.

例如, 设 $A = \{a, b, c\}$, 则有:

$$\rho(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

通常把有限集 A 的元素的数目记作 $|A|$.

定理 1. 如果有限集 A 有 n 个元素, 即 $|A| = n$, 则 $\rho(A)$ 有 2^n 个元素.

证明: 因为 A 的子集分别由 A 的 0 个元素, 1 个元素, ..., n 个元素组成, 而 A 的由 k ($0 \leq k \leq n$) 个元素组成的子集数恰是从 n 个元素中取出 k 个不同元素的组合数 C_n^k . 因而 A 的所有子集的数目为:

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n;$$

这就是 $\rho(A)$ 的元素的数目. □

通常, 在我们所讨论的问题的领域中, 所讨论的集合都是某一个集合的子集, 这个集合称为全集, 记作 E . 例如, 在数论中全集为整数集 I , 在数学分析中全集为实数集 R , 在复变函数中全集为复数集 C .

I—1 练习

1. 用列举法或描述法表示下列集合,
 - a) 方程 $x^2 + 4x - 12 = 0$ 的解的集合;
 - b) 方程组 $\begin{cases} 3x + 4y = 11, \\ 4x - 3y = -2 \end{cases}$ 的解的集合;

c) 平面直角坐标系中单位圆的所有内部点所成的集合。

2. 令 $A = \{3, 4\}$, $B = \{x \mid x^2 - 7x + 12 = 0\}$, $C = \{\phi, 3, 4\}$, $D = \{4, 4, 3\}$, $G = \{4, \phi, \phi, 3\}$. 问上述集合中, 哪些是相等的, 哪些是不等的?

3. 判断下述各式哪些是成立的, 哪些是不成立的, 成立的画“√”, 不成立的画“×”。

a) $\phi \subseteq \phi$;

b) $\phi \in \phi$;

c) $\phi \subseteq \{\phi\}$;

d) $\phi \in \{\phi\}$;

e) $\{\phi\} \subseteq \{\phi\}$;

f) $\{\phi\} \in \{\phi\}$.

4. 写出下列集合的幂集合:

a) $\{a, \{b\}\}$;

b) $\{\phi, a\}$;

c) $\{x, y, z\}$.

5. 设 A, B, C 是任意三个集合, 判断下列命题是否为真? 如果为真, 请证明之; 如果不真, 请举反例。

a) 如果 $A \in B$ 及 $B \subseteq C$, 则 $A \in C$;

b) 如果 $A \in B$ 及 $B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$;

c) 如果 $A \subseteq B$ 及 $B \in C$, 则 $A \in C$;

d) 如果 $A \subseteq B$ 及 $B \in C$, 则 $A \subseteq C$;

e) 如果 $A \in B$ 及 $B \notin C$, 则 $A \notin C$;

f) 如果 $A \subseteq B$ 及 $B \notin C$, 则 $A \notin C$.

§2 集合的运算

1. 集合的运算

集合的主要运算有交、并和差运算。

定义1. 设 A, B 是两个集合, 由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合, 称为 A 和 B 的交集, 记作 $A \cap B$.

例1. 设 $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 则有 $A \cap B = \{2, 4, 6\}$.

定义2. 设 A, B 是两个集合, 由所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合, 称为 A 和 B 的并集, 记作 $A \cup B$.

例2. 对于例1中给定的集合 A 和 B , 有 $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$.

定义3. 设 A, B 是两个集合, 由所有属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合, 称为 A 与 B 的差集, 记作 $A - B$.

例3. 对于例1中的集合 A 和 B , 有 $A - B = \{0, 8, 10\}$, $B - A = \{1, 3, 5\}$.

定义4. 设 A 为一集合, E 为全集, 称集合 $E - A$ 为 A 的余集, 记作 $\bar{A}$.

例4. 设全集 $E = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{a, b\}$, 则 $\bar{A} = \{c, d, e\}$.

定理1. 设 A, B, C 为任意三个集合, 则下列各运算律成立:

1. $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$; (交换律)
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; (结合律)
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; (分配律)
4. $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$; (吸收律)
5. $A \cap A = A$, $A \cup A = A$; (幂等律)
6. $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$;

(德·摩根律)

$$7. A \cap \bar{A} = \phi, A \cup \bar{A} = E, \quad (\text{补余律})$$

$$8. E \cap A = A, \phi \cup A = A, \quad (\text{同一律})$$

$$9. \phi \cap A = \phi, E \cup A = E. \quad (\text{零律})$$

证明：我们只证明 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ，其余的留给读者作为练习。

首先，任取 $a \in A \cup (B \cap C)$ ，则或 $a \in A$ 或 $a \in B \cap C$ ，当 $a \in A$ 时，有 $a \in A \cup B$ 和 $a \in A \cup C$ ，此时 $a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ；当 $a \in B \cap C$ 时，有 $a \in B$ 和 $a \in C$ ，此时 $a \in A \cup B$ 和 $a \in A \cup C$ ，故 $a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 。所以

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C). \quad (1)$$

其次，任取 $a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ，则 $a \in A \cup B$ 和 $a \in A \cup C$ 。由 $a \in A \cup B$ 知 $a \in A$ 或 $a \in B$ ，由 $a \in A \cup C$ 知 $a \in A$ 或 $a \in C$ 。当 $a \in A$ 时，有 $a \in A \cup (B \cap C)$ ；当 $a \notin A$ 时，必有 $a \in B$ 和 $a \in C$ ，则 $a \in B \cap C$ ，从而 $a \in A \cup (B \cap C)$ 。所以

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C). \quad (2)$$

由式(1)、(2)和定义 1.2 得

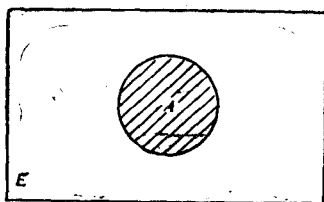
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \quad \square$$

2. 文代图

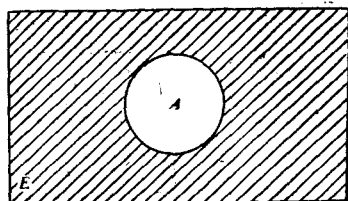
文氏 (John Venn, 英国数学家, 1834—1883) 图，是一种表示集合的直观方法。这种表示法用一个矩形内部的点表示全集合，用该矩形中的任意一个圆内的点表示全集合的任意一个子集 A 。这里，对所要求使用的几何图形的形状，尺寸和位置都未加限制，因此，也可以用任何简单闭曲线内部的点表示它们。

例如，下面各图中的阴影部分，分别表示图形下面所标明的集合。

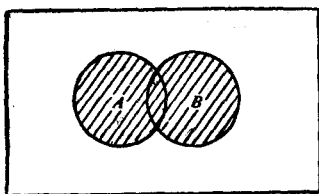
从图 I. 1 的 (e) 和 (f) 可知 $A - B = A - (A \cap B)$ ，而从 (g) 和 (h) 可知 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ 。



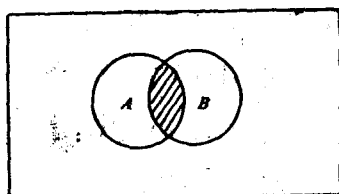
A
(a)



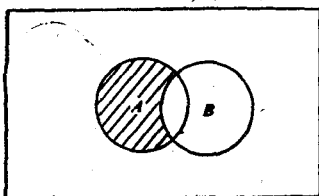
$\bar{A}$
(b)



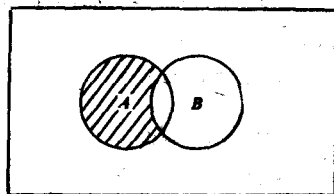
$A \cup B$
(c)



$A \cap B$
(d)



$A - B$
(e)



$A - (A \cap B)$
(f)