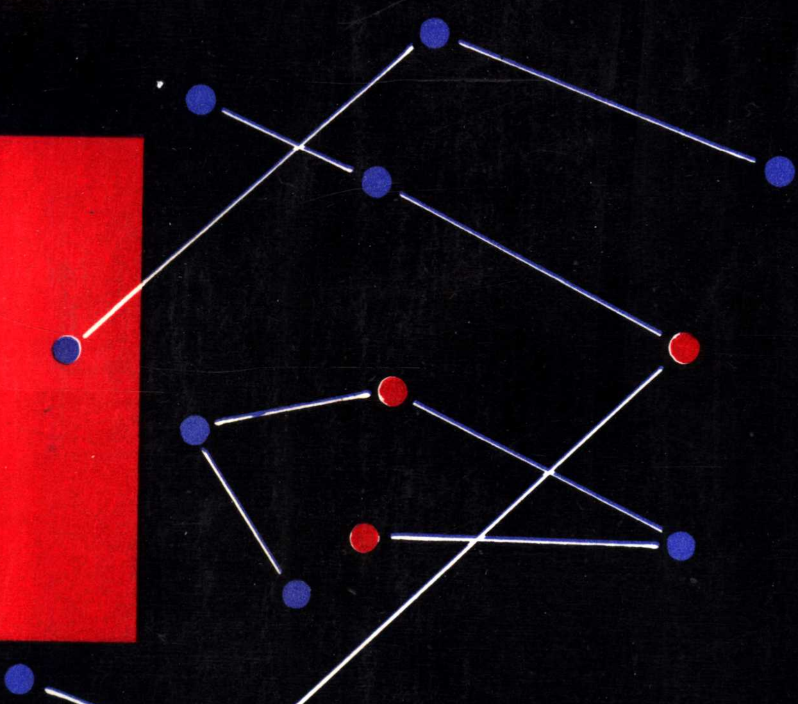
离散数学

LISANSHUXUE

赵树春　白景凯　编



离散数学

赵树春 白景凯 编

辽宁教育出版社

离散数学

赵树春　白景凯　编

辽宁教育出版社出版　辽宁省新华书店发行
（沈阳市南京街6段1里2号）　沈阳新华印刷厂印刷

字数：220,000　开本：850×1168 1/32　印张：$9^{1}/_{8}$
印数：1—800
1990年11月第1版　1990年11月第1次印刷

责任编辑：杨　力　插　图：潘智倩
封面设计：宋丹心　责任校对：理　力

ISBN 7-5382-1098-9/O·3

定价：4.50元

序　言

离散数学是计算机专业的一门重要基础课，其中有些内容对于其它专业的学生也是必需的。离散数学主要包括以下几部分内容：集合论基础；代数系统；数理逻辑和图论。为了使不同专业的学生能选学其中的一部分或几部分内容，我们在本书中有意把这四部分内容写成相对独立的部分；当然，第一篇的几节是以后各部分都要用到的。

在本书的叙述过程中，特别注意了从具体到抽象的原则。根据多年的教学实践，工科大学生们对于学习离散数学大都感到困难，其主要原因在于离散数学的内容比较抽象。为了解决这个问题，我们特别注意了论述的"直观性"，每一个重要概念和定理的论述，都要在其先或后，用典型例子加以说明，因此，读者在阅读本书时，不可轻视其中的典型例子。本书每一节之后都配备了一定数量的练习，希望读者在阅读本书的同时，要解答其中的一部分习题，这是学好本书必不可少的工作。由于学时和篇幅所限，我们对于离散数学在计算机科学和其它科学中的应用论述较少，而把注意集中于离散数学本身主要内容的论述。

关于在本书的叙述中引用前面的定义和定理时写法为："依定义（定理）Ⅰ—1.2"表示"依第Ⅰ章§1的定义(定理)

2”；“依定义（定理）1.2”表示“依本章§1的定义(定理)2”；“依定义(定理)2”表示“依本节的定义（定理）2”。

限于笔者的水平，错误和疏漏在所难免，希望读者指正。

编　者

1989年10月

目　录

第一篇　集合论

第Ⅰ章　集合与关系

集合论是现代各科数学的基础，它渗入了许多科学技术领域。本章介绍集合论的基础知识，如集合的运算和性质，关系和函数，基数等等。

§1　集　合

1. 集合的概念

在数学中，集合是一个不加精确定义的基本概念，但我们可以对集合加以描述：把具有某种共同属性的一些对象，汇集成一个整体就形成一个集合，集合中的对象是该集合的元素。例如，自然数的全体，北京图书馆的藏书，平面上的所有点等都分别形成一个集合。以后我们用大写英文字母A，B，X，Y，…表示集合，用小写英文字母 a，b，x，y，…表示元素。对于一个集合A来说，某一对象 a 或是 A 的元素，这时记作 $a\in A$，读作 a 属于 A；或者 a 不是A的元素，这时记作 $a\notin A$，读作 a 不属于A；二者必居其一，而且只居其一。

集合是由元素组成的，表示一个集合就是要用适当的方法指明组成该集合的元素。表示集合的方法通常有两种：一种是列举法，它把组成一个集合的元素依次列举出来，写在一个花括号中。例如：

$S=\{a,\ b,\ c,\ d\}$，

$C=\{$李林，张明，王芳，张晓梅$\}$，

$I=\{1, 2, 3, \cdots\}$

等等；另一种是描述法，它指明组成一个集合的元素的性质，当集合A是由具有性质P的所有元素组成时，我们把A记作

$$A=\{x \mid x\text{具有性质 } P\}.$$

这时A表示由具有性质P的所有元素组成的集合。例如，方程$x^2-1=0$的所有解组成的集合是$\{x \mid x^2-1=0\}$，方程组$\begin{cases}2x+y=1,\\ x+2y=-4\end{cases}$的所有解组成的集合是$\{(x, y) \mid 2x+1=1$和$x+2y=-4\}$等等。

不包括任何元素的集合叫做空集，记作ϕ。

在本书中，通常用N表示非负整数的集合，即$N=\{0, 1, 2, \cdots\}$；$I=\{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$表示整数集合；$I_+=\{1, 2, 3, \cdots\}$表示正整数集合；$N_m=\{0, 1, 2, \cdots, m-1\}$；$I_m=\{1, 2, \cdots, m\}$；$P$表示素数集合；$Q$表示有理数集合；$R$表示实数集合；$C$表示复数集合。

2. 子集、集合相等

定义1. 设A, B是两个集合，如果A的每个元素都是B的元素，则称A是B的子集，记作$A\subseteq B$或$B\supseteq A$；如果$A\subseteq B$，而且B中至少有一个元素不属于A，则说A是B的真子集，记作$A\subset B$或$B\supset A$。

例如，设$A=\{a, b, c, d\}$，$B=\{a, b\}$，则$A\subseteq A$，$B\subset A$。

对于任意集合A，有$A\subseteq A$；对于任意集合A，有$\phi\subseteq A$。要理解$\phi\subseteq A$这一断言，只须把定义1改述如下：$A\subseteq B$意味着凡不属于B的元素都不属于A。

定义2. 设A, B是两个集合，如果$A\subseteq B$和$B\supseteq A$，则说A和B相等，记作$A=B$。

例如，设 $A=\{a, b, c, d\}$，$B=\{d, c, b, a\}$，则 $A=B$；$C=\{1, -1\}$，$D=\{x \mid x^2-1=0\}$，则 $C=D$；设 $K=\{(1,1)\}$，$L=\{(x, y) \mid 2x+y=3$ 和 $x+4y=5\}$，则 $K=L$。

3. 幂集

定义 3。设 A 是一个集合，由 A 的所有子集为元素组成的集合，称为 A 的幂集，记作 2^A 或 $\rho(A)$。

例如，设 $A=\{a, b, c\}$，则有：

$\rho(A)=\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$。

通常把有限集 A 的元素的数目记作 $|A|$。

定理 1。如果有限集 A 有 n 个元素，即 $|A|=n$，则 $\rho(A)$ 有 2^n 个元素。

证明：因为 A 的子集分别由 A 的 0 个元素，1 个元素，…，n 个元素组成，而 A 的由 $k(0 \leqslant k \leqslant n)$ 个元素组成的子集数恰是从 n 个元素中取出 k 个不同元素的组合数 C_n^k。因而 A 的所有子集的数目为：

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n,$$

这就是 $\rho(A)$ 的元素的数目。 □

通常，在我们所讨论的问题的领域中，所讨论的集合都是某一个集合的子集，这个集合称为全集，记作 E. 例如，在数论中全集为整数集 I，在数学分析中全集为实数集 R，在复变函数中全集为复数集 C。

I—1　练　习

1. 用列举法或描述法表示下列集合：

a) 方程 $x^2+4x-12=0$ 的解的集合；

b) 方程组 $\begin{cases} 3x+4y=11, \\ 4x-3y=-2 \end{cases}$ 的解的集合；

c）平面直角坐标系中单位圆的所有内部点所成的集合。

2. 令 $A=\{3, 4\}$，$B=\{x|x^2-7x+12=0\}$，$C=\{\phi, 3, 4\}$，$D=\{4, 4, 3\}$，$G=\{4, \phi, \phi, 3\}$。问上述集合中，哪些是相等的，哪些是不等的？

3. 判断下述各式哪些是成立的，哪些是不成立的，成立的画“$\checkmark$”，不成立的画“$\times$”。

a）$\phi\subseteq\phi$；

b）$\phi\in\phi$；

c）$\phi\subseteq\{\phi\}$；

d）$\phi\in\{\phi\}$；

e）$\{\phi\}\subseteq\{\phi\}$；

f）$\{\phi\}\in\{\phi\}$。

4. 写出下列集合的幂集合：

a）$\{a, \{b\}\}$；

b）$\{\phi, a\}$；

c）$\{x, y, z\}$。

5. 设 A，B，C 是任意三个集合，判断下列命题是否为真？如果为真，请证明之；如果不真，请举反例。

a）如果 $A\in B$ 及 $B\subseteq C$，则 $A\in C$；

b）如果 $A\in B$ 及 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$；

c）如果 $A\subseteq B$ 及 $B\in C$，则 $A\in C$；

d）如果 $A\subseteq B$ 及 $B\in C$，则 $A\subseteq C$；

e）如果 $A\in B$ 及 $B\nsubseteq C$，则 $A\notin C$；

f）如果 $A\subseteq B$ 及 $B\notin C$，则 $A\notin C$。

§2 集合的运算

1. 集合的运算

集合的主要运算有交、并和差运算。

定义1．设 A, B 是两个集合，由所有既属于A又属于B的元素组成的集合，称为A和B的交集，记作 $A\cap B$.

例1．设 $A=\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，则有 $A\cap B=\{2, 4, 6\}$.

定义2．设 A, B 是两个集合，由所有属于A或属于 B 的元素组成的集合，称为A和B的并集，记作 $A\cup B$.

例2．对于例1中给定的集合A和B,有 $A\cup B=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$．

定义3．设A, B 是两个集合，由所有属于 A 但不属于B的元素组成的集合，称为A与B差集，记作 $A-B$.

例3．对于例1中的集合A和 B，有 $A-B=\{0, 8, 10\}$, $B-A=\{1, 3, 5\}$.

定义4．设A为一集合，E为全集，称集合 $E-A$ 为 A 的余集，记作$\overline{A}$.

例4．设全集 $E=\{a, b, c, d, e\}$, $A=\{a, b\}$,则$\overline{A}=\{c, d, e\}$.

定理1．设 A, B, C 为任意三个集合，则下列各运算律成立：

1. $A\cap B=B\cap A$, $A\cup B=B\cup A$；（交换律）
2. $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$, $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；（结合律）
3. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,
   $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；（分配律）
4. $A\cap(A\cup B)=A$, $A\cup(A\cap B)=A$；（吸收律）
5. $A\cap A=A$, $A\cup A=A$；（幂等律）
6. $\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$, $\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}$；（德·摩根律）

7. $A\cap\overline{A}=\phi$, $A\cup\overline{A}=E$; (补余律)

8. $E\cap A=A$, $\phi\cup A=A$; (同一律)

9. $\phi\cap A=\phi$, $E\cup A=E$。 (零律)

证明：我们只证明 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，其余的留给读者作为练习。

首先，任取 $a\in A\cup(B\cap C)$，则或 $a\in A$ 或 $a\in B\cap C$，当 $a\in A$ 时，有 $a\in A\cup B$ 和 $a\in A\cup C$，此时 $a\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$；当 $a\in B\cap C$ 时，有 $a\in B$ 和 $a\in C$，此时 $a\in A\cup B$ 和 $a\in A\cup C$，故 $a\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$。所以

$$A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)。\tag{1}$$

其次，任取 $a\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，则 $a\in A\cup B$ 和 $a\in A\cup C$。由 $a\in A\cup B$ 知 $a\in A$ 或 $a\in B$；由 $a\in A\cup C$ 知 $a\in A$ 或 $a\in C$。当 $a\in A$ 时，有 $a\in A\cup(B\cap C)$；当 $a\notin A$ 时，必有 $a\in B$ 和 $a\in C$，则 $a\in B\cap C$，从而 $a\in A\cup(B\cap C)$。所以

$$(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)。\tag{2}$$

由式(1)、(2)和定义1．2得

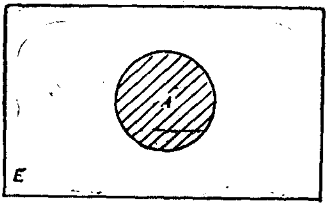
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)。$$ □

2. 文代图

文氏（John Venn，英国数学家，1834—1883）图，是一种表示集合的直观方法。这种表示法用一个矩形内部的点表示全集合，用该矩形中的任意一个圆内的点表示全集合的任意一个子集 A。这里，对所要求使用的几何图形的形状，尺寸和位置都未加限制，因此，也可以用任何简单闭曲线内部的点表示它们。

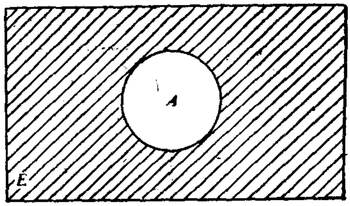
例如，下面各图中的阴影部分，分别表示图形下面所标明的集合。

从图I．1的(e)和(f)可知$A-B=A-(A\cap B)$；而从(g)和(h)可知$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。



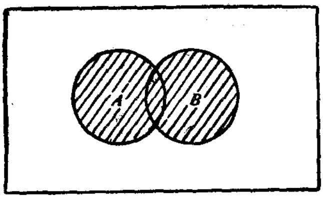
A

(a)



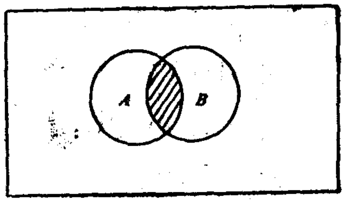
$\overline{A}$

(b)



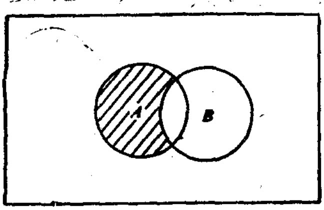
$A \cup B$

(c)



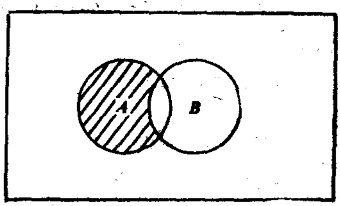
$A \cap B$

(d)



$A - B$

(e)



$A - (A \cap B)$

(f)